2026 CANPOINT

CANPOINT®

全品

高考复习方案

数学 RJB 听课手册

参考答案

扫码获取 详解详析

第一单元 预备知识

第1讲 集合

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)确定性 互异性 (2)①$\in$ ②$\notin$
(3)描述法 图示法(维恩图)
(4)$\mathbf{N}$ $\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$ $\mathbf{Z}$ $\mathbf{Q}$ $\mathbf{R}$
2. 任意一个元素 $B\supseteq A$ 至少 $\subsetneqq$
相同 $A=B$ 不含
3. 且 且 $A\cap B$ 或 或 $A\cup B$ 不 $\notin$ $\complement_U A$
4. (1)$\subseteq$ (2)$B\cup A$ A (3)$\varnothing$ A $\cap$ $(\complement_U A)$ $(\complement_U B)$

【对点演练】

1. $\in$ $\subsetneqq$ $=$ [解析] 由$x^2-5x+6=0$,解得$x=2$或$x=3$,所以$A=\{2,3\}$,所以$3\in A$,$\{2\}\subsetneqq A$,$\{2,3\}=A$.
2. $\{(1,1)\}$ $\supseteq$ [解析] 由$\begin{cases}2x-y=1,\\x+4y=5,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$所以$D=\{(1,1)\}$.显然点$(1,1)$在直线$y=x$上,所以$C\supseteq D$.
3. $\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 10\}$ $\{x|2<x<3$或$7\leqslant x<10\}$ [解析] ∵$A=\{x|3\leqslant x<7\}$,$B=\{x|2<x<10\}$,∴$A\cup B=\{x|2<x<10\}$,∴$\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x|x\leqslant 2$或$x\geqslant 10\}$.又$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<3$或$x\geqslant 7\}$,∴$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|2<x<3$或$7\leqslant x<10\}$.
4. -3 [解析] 因为$-3\in A$,所以$a-2=-3$或$a^2+4a=-3$.若$a-2=-3$,则$a=-1$,此时$a^2+4a=-3=a-2$,不满足元素的互异性.若$a^2+4a=-3$,则$a=-1$(舍去)或$a=-3$,此时$A=\{-5,-3,10\}$,满足题意.故$a=-3$.
5. $[-4,+\infty)$ [解析] $A=\{x|y=\ln(x-1)\}=\{x|x>1\}$,因为$y=x^2-4x=(x-2)^2-4\geqslant-4$,当且仅当$x=2$时取等号,所以$B=\{y|y=x^2-4x,x\in A\}=\{y|y\geqslant-4\}$,所以$A\cup B=[-4,+\infty)$.
6. $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$ [解析] 因为$A\cap B=B$,所以$B\subseteq A$.若B为空集,则关于x的方程$ax=1$无解,可得$a=0$;若B不为空集,则$a\neq 0$,由$ax=1$,得$x=\frac{1}{a}$,所以$\frac{1}{a}=2$或$\frac{1}{a}=3$,可得$a=\frac{1}{2}$或$a=\frac{1}{3}$.综上,实数a的所有可能取值组成的集合为$\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$.
7. $\{a|a=1$或$a\leqslant-1\}$ [解析] $A=\{x|x^2+4x=0\}=\{-4,0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,对于方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$,$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8(a+1)$.①当$\Delta<0$时,$a<-1$,此时集合$B=\varnothing$,满足题意.②当$\Delta=0$时,$a=-1$,此时集合$B=\{x|x^2=0\}=\{0\}$,满足题意.③当$\Delta>0$时,$a>-1$,此时集合中有两个元素,又$A=\{-4,0\}$,$B\subseteq A$,所以$B=\{-4,0\}$,所以$\begin{cases}2(a+1)=4,\\a^2-1=0,\end{cases}$解得$a=1$.综上所述,实数$a$的取值范围是$\{a|a=1$或$a\leqslant-1\}$.

● 课堂考点探究

例1 (1)A (2)2 [解析] (1)因为集合$A=\{x|2mx-3>0,m\in\mathbf{R}\}$,$2\in A$且$1\notin A$,所以$\begin{cases}4m-3>0,\\2m-3\leqslant 0,\end{cases}$解得$\frac{3}{4}<m\leqslant\frac{3}{2}$.故选A.
(2)当$x=1,y=1,2,4$时,$x-y$分别为$0,-1,-3$,均不满足$x-y\in A$.当$x=2,y=1$时,满足$x-y\in A$;当$x=2,y=2$时,不满足$x-y\in A$;当$x=2,y=4$时,不满足$x-y\in A$.当$x=4,y=1$时,不满足$x-y\in A$;当$x=4,y=2$时,满足$x-y\in A$;当$x=4,y=4$时,不满足$x-y\in A$.所以$B=\{(2,1),(4,2)\}$,故集合B中的元素有2个.

变式题 (1)D (2)-1 [解析] (1)当$m=0$时,$A=\{x|2x=0\}=\{0\}$,符合题意;当$m\neq 0$时,由题意知$\Delta=4-4m^2=0$,解得$m=\pm1$.综上,m的取值集合是$\{-1,0,1\}$.故选D.
(2)由题意得$a\neq 0$,$a\neq 1$,则$\begin{cases}\frac{b}{a}=0,\\a+b=1或a^2=1,\end{cases}$可得$\begin{cases}a=-1,\\b=0,\end{cases}$经验证,符合题意,所以$(a+b)^{2025}=-1$.

例2 (1)B (2)B [解析] (1)由题意得$P=\{x|x\geqslant-1\}$,$Q=\{y|y\geqslant 0\}$,所以$Q\subseteq P$,$P\cup Q=\{x|x\geqslant-1\}$,$P\cap Q=\{y|y\geqslant 0\}$.故选B.
(2)由$A\subseteq B$,可得$0\in B$.若$a-2=0$,则$a=2$,此时$A=\{0,-2\}$,$B=\{1,0,2\}$,不满足$A\subseteq B$;若$2a-2=0$,则$a=1$,此时$A=\{0,-1\}$,$B=\{1,-1,0\}$,满足$A\subseteq B$.故选B.

变式题 (1)C (2)A [解析] (1)因为集合A满足条件$\{2,3\}\subseteq A\subsetneqq\{1,2,3,4,5\}$,所以集合$A$的个数与集合$\{1,4,5\}$的真子集的个数相同,故集合$A$的个数为$2^3-1=7$.故选C.
(2)$A=\{x|1<x<3\}$,$B=\{x|m<x<2m+1\}$.①当$B=\varnothing$时,$m\geqslant 2m+1$,解得$m\leqslant-1$;②当$B\neq\varnothing$时,需满足$\begin{cases}m<2m+1,\\m\geqslant 1,\\2m+1\leqslant 3,\end{cases}$解得$m=1$.综上可知$m$的取值范围为$(-\infty,-1]\cup\{1\}$.故选A.

例3 (1)A (2)A [解析] (1)因为$A=\{x|2x-x^2\geqslant 0\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{y|y>1\}$,所以$A\cap B=(1,2]$.故选A.
(2)由题意得$M\cup N=\{x|x<2\}$,所以$\{x|x\geqslant 2\}=\complement_U(M\cup N)$,故选A.

变式题 (1)A (2)B [解析] (1)由题意知$A=\{x|3^x<27,x\in\mathbf{N}\}=\{x|x<3,x\in\mathbf{N}\}=\{0,1,2\}$,$B=\{x\in\mathbf{Z}|-2<x<2\}=\{-1,0,1\}$,所以$A\cup B=\{-1,0,1,2\}$.故选A.
(2)∵$A=\{x||x-2|\geqslant 1\}=\{x|x\leqslant 1$或$x\geqslant 3\}$,∴$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|1<x<3\}$,图中阴影部分表示的集合是$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x|2\leqslant x<3\}$.故选B.

例4 (1)A (2)$[1,+\infty)$ [解析] (1)由题可得$B=\{x|-1<x<3\}$,由$A\cup B=B$,可得$m\in B$且$m\neq 1,m\neq 2$,结合四个选项可知,m的值可能是0.故选A.
(2)由题意知$A=\{x|-1<x<1\}$,又$B=\{x|x>a,a\in\mathbf{R}\}$且$A\cap B=\varnothing$,所以$a\geqslant 1$,即$a$的取值范围是$[1,+\infty)$.

变式题 (1)B (2)B [解析] (1)因为$S=\{x|x<-1$或$x>5\}$,$T=\{x|a<x<a+8\}$,且$S\cup T=\mathbf{R}$,所以$\begin{cases}a<-1,\\a+8>5,\end{cases}$解得$-3<a<-1$,即实数$a$的取值范围为$(-3,-1)$.故选B.
(2)因为$A\cap B=B$,所以$B\subseteq A$,所以$3a=1$或$3a=a^2$,解得$a=\frac{1}{3}$或$a=0$或$a=3$.当$a=\frac{1}{3}$时,$A=\left\{1,9,\frac{1}{9}\right\}$,$B=\{9,1\}$,符合题意;当$a=0$时,$A=\{1,9,0\}$,$B=\{9,0\}$,符合题意;当$a=3$时,根据集合元素互异性可判断不符合题意.所以实数$a$的个数为2.故选B.

例5 B [解析] 依题意,$I=\{x\in\mathbf{N}|x^2-6x+5<0\}=\{x\in\mathbf{N}|1<x<5\}=\{2,3,4\}$.$I$的2划分有$\{\{2,3\},\{4\}\}$,$\{\{2,4\},\{3\}\}$,$\{\{3,4\},\{2\}\}$,共3个;$I$的3划分有$\{\{2\},\{3\},\{4\}\}$,共1个.故集合$I$的所有划分的个数为4.故选B.

变式题 AD [解析] 因为P是一个数集,且至少含有两个数,所以P中必有一个非零实数.对于选项A,若P为数域,$a,b\in P$,则当$a=b\neq 0$时,$a-b=0\in P$,$\frac{a}{b}=1\in P$,故A正确;对于选项B,取$a=1,b=2$,但$\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$,不满足条件,故B错误;对于选项C,例如$M=\mathbf{Q}\cup\{\sqrt{2}\}$,取$a=1,b=\sqrt{2}$,但$1+\sqrt{2}\notin M$,所以数集$M$不是一个数域,故C错误;对于选项D,由选项A可知,数域中必含有0,1两个数,根据数域的定义可知,数域必为无限集,故D正确.故选AD.

第2讲 常用逻辑用语

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)任意 所有 每一个 $\forall$
(2)存在 有 至少有一个 $\exists$
(3)存在量词命题 全称量词命题
3. 充分 必要 充分不必要 必要不充分
充要 既不充分也不必要

【对点演练】

1. 充分不必要 [解析] 由三角形是等边三角形可得到该三角形一定是等腰三角形,但反之不成立,所以"三角形是等边三角形"是"三角形是等腰三角形"的充分不必要条件.
2. 存在 真 $\forall x\in\mathbf{Q},|x|\notin\mathbf{N}$
[解析] 命题"$\exists x\in\mathbf{Q},|x|\in\mathbf{N}$"含有存在量词,所以是存在量词命题,因为$1\in\mathbf{Q}$,$|1|\in\mathbf{N}$成立,所以该命题是真命题.存在量词命题的否定需要把存在量词改为全称量词,并否定结论,所以"$\exists x\in\mathbf{Q},|x|\in\mathbf{N}$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{Q},|x|\notin\mathbf{N}$".
3. 充要 [解析] 当$a^2+b^2=c^2$时,$\triangle ABC$为直角三角形,充分性成立;当$\triangle ABC$为直角三角形时,因为$a\leqslant b\leqslant c$,所以$a^2+b^2=c^2$,必要性也成立.故"$a^2+b^2=c^2$"是"$\triangle ABC$为直角三角形"的充要条件.
4. 3 [解析] 因为"$\forall x\in[-1,2]$,$x^2-m\leqslant 1$"为真命题,所以$m\geqslant x^2-1$对$x\in[-1,2]$恒成立,所以$m\geqslant 3$,故m的最小值为3.
5. 存在一个奇数,它的立方不是奇数
[解析] 命题"奇数的立方是奇数"是省略了全称量词"所有的"的全称量词命题,由全称量词命题的否定是存在量词命题,可得命题"奇数的立方是奇数"的否定是"存在一个奇数,它的立方不是奇数".
6. ①$a<3$ ②$a>3$ ③$a=3$
[解析] ①因为$x\in A$是$x\in B$的充分不必要条件,所以$A\subsetneqq B$,则$a<3$;②因为$x\in A$是$x\in B$的必要不充分条件,所以$B\subsetneqq A$,则$a>3$;③因为$x\in A$是$x\in B$的充分必要条件,所以$A=B$,则$a=3$.
7. 充分不必要 [解析] $\ln(x+1)<0$等价于$0<x+1<1$,即$-1<x<0$.显然由$-1<x<0$可以推出$x<0$,但由$x<0$不

能推出$-1<x<0$,所以"$\ln(x+1)<0$"是"$x<0$"的充分不必要条件.

8. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ [解析] 由已知得$\exists x\in\mathbf{R}$, $ax^2+2x+3\leqslant0$为真命题.①若$a=0$,则不等式为$2x+3\leqslant0$,该不等式有解,满足题意;②若$a<0$,则显然满足题意;③若$a>0$,则需满足$\Delta=4-12a\geqslant0$,解得$0<a\leqslant\frac{1}{3}$.综上可知,a的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

● **课堂考点探究**

例1 C [解析] 因为$\log_2\frac{1}{2}=-1$, $\cos 0=1$, $0^2=0$,所以选项A,B中命题均为真命题,选项C中命题为假命题;因为$y=2^x$, $x\in\mathbf{R}$的值域为$(0,+\infty)$,所以$2^x>0$,所以D中命题为真命题.故选C.

变式题 BD [解析] 对于选项A,当$x>0$时,$\frac{2^x}{3^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$,所以$2^x<3^x$恒成立,故A中命题是假命题;对于选项B,当$x\in(1,+\infty)$时,$\frac{\log_2 x}{\log_3 x}=\frac{\lg x}{\lg 2}\times\frac{\lg 3}{\lg x}=\frac{\lg 3}{\lg 2}>1$,且$\log_3 x>0$,所以$\log_2 x>\log_3 x$,故B中命题是真命题;对于选项C,D,当$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$时,$\left(\frac{1}{2}\right)^x<1$, $\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$,则$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$,故C中命题是假命题,D中命题是真命题.故选BD.

例2 (1)$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $x\leqslant\sin x$ (2)D

[解析] (1)命题p: $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $x>\sin x$的否定是"$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $x\leqslant\sin x$".

(2)因为命题p是存在量词命题,存在量词命题的否定为全称量词命题,所以命题p的否定是"所有的等差数列都不是等比数列".故选D.

变式题 (1)D (2)B [解析] (1)命题"$\exists m\in\mathbf{N}$, $\sqrt{m^2+1}\in\mathbf{N}$"为存在量词命题,其否定是"$\forall m\in\mathbf{N}$, $\sqrt{m^2+1}\notin\mathbf{N}$",故选D.

(2)当$x=-\frac{1}{2}$时,$\left|-\frac{1}{2}+1\right|=\frac{1}{2}<1$,故$p$是假命题,则$\neg p$是真命题;当$x=1$时,$1^3=1$,故$q$是真命题,则$\neg q$是假命题.故选B.

例3 A [解析] 因为"$\exists x\in[2,6]$, $f(x)\leqslant-2a+3$"是假命题,所以"$\forall x\in[2,6]$, $f(x)>-2a+3$"是真命题,则$ax^2-2ax+2a-3>0$对任意$x\in[2,6]$恒成立.令$h(x)=ax^2-2ax+2a-3$,当$a=0$时,$h(x)=-3<0$,不符合题意,故$a\neq0$,则函数$h(x)$的图象的对称轴为直线$x=1$,要使得对任意$x\in[2,6]$, $h(x)>0$恒成立,只需$\begin{cases}h(2)=2a-3>0,\\h(6)=26a-3>0,\end{cases}$解得$a>\frac{3}{2}$,所以实数$a$的取值范围是$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.故选A.

变式题 $(-1,+\infty)$ [解析] 若"$\exists\alpha\in[0,+\infty)$, $\cos\alpha<m$"为真命题,则$m>(\cos\alpha)_{\min}$, $\alpha\in[0,+\infty)$.因为$y=\cos\alpha$在$[0,+\infty)$上的最小值为-1,所以$m>-1$.

例4 (1)A (2)B (3)D [解析] (1)由$\ln x\leqslant0$,解得$0<x\leqslant1$,则$A=(0,1]$.由$2^x\leqslant2$,解得$x\leqslant1$,则$B=(-\infty,1]$.因为$(0,1]\subsetneqq(-\infty,1]$,所以"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分不必要条件.故选A.

(2)由$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$,得$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,即$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,可知$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$等价于$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.若$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,可知必要性成立;若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,无法推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,例如$\boldsymbol{a}=(1,0)$, $\boldsymbol{b}=(0,1)$,满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,但$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$且$\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$,可知充分性不成立.综上所述,"$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$"是"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$或$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$"的必要不充分条件.故选B.

(3)$|x|>|y|$等价于$x^2>y^2$,推不出$x>y$,排除A,B;由$\frac{x}{y}>1$,可得$\frac{x-y}{y}>0$,解得$x>y>0$或$x<y<0$,所以$\frac{x}{y}>1$是$x>y$的既不充分也不必要条件,排除C;由$2^{x-y}>2$,得$x-y>1$,即$x>y+1$, $x>y+1$可以推出$x>y$,反之推不出,D正确.故选D.

变式题 (1)B (2)C [解析] (1)若$a<-1$,且$b<-1$,则根据不等式的性质可得$a+b<-2$,且$ab>1$,即必要性成立,当$a=-3$, $b=-\frac{1}{2}$时,满足$a+b<-2$,且$ab>1$,但是$b=-\frac{1}{2}>-1$,故充分性不成立.所以"$a+b<-2$,且$ab>1$"是"$a<-1$,且$b<-1$"的必要不充分条件.故选B.

(2)因为$\alpha\cap\beta=l$,所以$l\subset\alpha$且$l\subset\beta$.若$l\perp\gamma$,则$\alpha\perp\gamma$且$\beta\perp\gamma$,故充分性成立;若$\alpha\perp\gamma$且$\beta\perp\gamma$,设$\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$,则存在直线$a\subset\gamma$,使得$a\perp m$,所以$a\perp\alpha$,由于$l\subset\alpha$,故$a\perp l$,同理存在直线$b\subset\gamma$,使得$b\perp n$,所以$b\perp\beta$,由于$l\subset\beta$,故$b\perp l$,易知a,b不平行,即a,b是平面γ内的两条相交直线,所以$l\perp\gamma$,故必要性成立.故选C.

例5 证明:设$f(x)=x^2+2ax+b$.

必要性:∵关于x的方程$x^2+2ax+b=0$有两个不相等的实数根,且两根均小于2,∴$\begin{cases}4a^2-4b>0,\\-\frac{2a}{2}<2,\\f(2)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}4a^2-4b>0,\\a>-2,\\4+4a+b>0,\end{cases}$

不能得出$a\geqslant2$,且$-4<b<4$,

∴必要性不成立.

充分性:二次函数$f(x)=x^2+2ax+b$的图象的对称轴方程为$x=-a$,

当$a\geqslant2$时,$-a\leqslant-2$,即$-a<2$①,

又$-4<b<4$,∴$f(2)=4+4a+b>0$②,

$\Delta=(2a)^2-4b=4a^2-4b>0$③,

由①②③得二次函数$f(x)$的图象与x轴有两个交点,且两个交点的横坐标均小于2,∴方程$x^2+2ax+b=0$有两个不相等的实数根,且两根都小于2,

∴充分性成立.

故"$a\geqslant2$,且$-4<b<4$"是"关于x的方程$x^2+2ax+b=0$有两个不等实数根,且两根均小于2"的充分不必要条件.

变式题 证明:(1)充分性:∵$a=b=c=0$,

∴$ab+bc+ac=0$,充分性成立.

必要性:∵$ab+bc+ac=0$, $a+b+c=0$, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$,∴$a^2+b^2+c^2=0$,可得$a=b=c=0$,必要性成立.∴"$a=b=c=0$"是"$ab+bc+ac=0$"的充要条件.

(2)由$a\geqslant b\geqslant c$,且$abc=1>0$,得$a>0$, $b<0$, $c<0$,∵$a+b+c=0$,∴$a=-b-c=-b+(-c)\geqslant2\sqrt{bc}=\frac{2}{\sqrt{a}}$,当且仅当$b=c$时等号成立,∴$a\geqslant\frac{2}{\sqrt{a}}$,则$a^2\geqslant\frac{4}{a}$,则$a^3\geqslant4$,可得$\sqrt[3]{4}\leqslant a=-b-c\leqslant-2c$,解得$c\leqslant-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.∴"$abc=1$, $a\geqslant b\geqslant c$"是"$c\leqslant-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$"的充分条件.

例6 A [解析] 由$1<2^x<4$,得$0<x<2$.因为p是q的充分不必要条件,所以$x^2-ax-1<0$在$(0,2)$上恒成立,所以$\begin{cases}\Delta=a^2+4>0,\\-1\leqslant0,\\4-2a-1\leqslant0,\end{cases}$解得$a\geqslant\frac{3}{2}$.故选A.

变式题 $(-\infty,-1]$ [解析] 由$|x+2a|<3$,得$-2a-3<x<-2a+3$,记$A=\{x|-2a-3<x<-2a+3\}$, $B=\{x|x\geqslant a\}$.因为p是q的必要不充分条件,所以$A\subsetneqq B$,所以$a\leqslant-2a-3$,解得$a\leqslant-1$.

第3讲 等式与不等式

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. (1)> = < (2)> = <
2. (2)$a+c=b+c$ $a-c=b-c$

(3)$ac=bc$ $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

3. > > < $a>c$
4. $a+c>b+d$ $ac>bd$ $a^n>b^n$

【对点演练】

1. $M>N$ [解析] $M-N=x^2+y^2+1-2x-2y+2=(x-1)^2+(y-1)^2+1>0$.故$M>N$.
2. $(-\pi,0)$ [解析] 由已知得$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<-\beta<\frac{\pi}{2}$,所以$-\pi<\alpha-\beta<\pi$,又$\alpha<\beta$,所以$\alpha-\beta<0$,故$-\pi<\alpha-\beta<0$.
3. ④ [解析] 对于①,$\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=\frac{c(b-a)}{ab}$,由$a>b$,得$b-a<0$,但$c$,$ab$的正负无法判断,故①错误;对于②,当$c<0$时,得$ac<bc$,故②错误;对于③,$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$,由$a>b$,得$a-b>0$,但$c$的正负无法判断,故③错误;对于④,由$a>b$,得$a-c>b-c$,故④正确.故填④.
4. ③ [解析] 当$c<0$时,①显然错误;当$c=0$时,②显然错误;若$ac^2>bc^2$,则$c^2>0$, $a>b$,③正确;当$a=-2$, $b=-3$, $c=3$, $d=2$时,$ac=-6=bd$,④显然错误.故填③.
5. $(-24,8)$ [解析] 依题意可得$4<\frac{1}{b}<8$,当$0\leqslant a<1$时,可得$0\leqslant\frac{a}{b}<8$;当$-3<a<0$时,$0<-a<3$,所以$0<\frac{-a}{b}<24$,所以$-24<\frac{a}{b}<0$.综上可知,$-24<\frac{a}{b}<8$.
6. $p\geqslant q$ [解析] $p-q=2x^4+1-2x^3-x^2=2x^3(x-1)-(x+1)(x-1)=(x-1)(2x^3-x-1)=(x-1)(x^3-x+x^3-1)=(x-1)[x(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)]=(x-1)^2(x^2+x+x^2+x+1)=(x-1)^2(2x^2+2x+1)=(x-1)^2[2(x^2+x)+1]=(x-1)^2\left[2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-2\times\frac{1}{4}+1\right]=(x-1)^2\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\geqslant0$,故$p\geqslant q$.

● **课堂考点探究**

例1 解:(1)$(x^2-y^2)^2-xy(x-y)^2=(x+y)^2(x-y)^2-xy(x-y)^2=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)=(x-y)^2\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]\geqslant0$,

∴$(x^2-y^2)^2\geqslant xy(x-y)^2$.

(2)$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$.

当$a>b>0$时,$\frac{a}{b}>1$, $a-b>0$,

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，$\therefore a^a b^b>a^b b^a$；

当 $a=b>0$ 时，$\frac{a}{b}=1$，$a-b=0$，

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}=1$，$\therefore a^a b^b=a^b b^a$；

当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1$，$a-b<0$，

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，$\therefore a^a b^b>a^b b^a$.

综上所述，$a^a b^b\geqslant a^b b^a$.

变式题 (1)D (2)B [解析] (1) $b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}$，$\because \sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{3}+1>0$，$a=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$，$\therefore b>a$. 又 $0<a<1$，$\therefore a-a^2=a(1-a)>0$，$\therefore a>c$，$\therefore b>a>c$. 故选 D.

(2) 方法一：易知 a,b,c 都是正数. $\because \frac{b}{a}=\frac{3\ln 4}{4\ln 3}=\log_{81}64<1$，$\therefore a>b$，$\because \frac{b}{c}=\frac{5\ln 4}{4\ln 5}=\log_{625}1024>1$，$\therefore b>c$，$\therefore c<b<a$. 故选 B.

方法二：构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\mathrm{e}$；令 $f'(x)<0$，得 $x>\mathrm{e}$. $\therefore f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，$\therefore f(3)>f(4)>f(5)$，即 $a>b>c$. 故选 B.

例 2 (1)D (2)ACD [解析] (1) 取 $a=1$，$b=-1$，则 $\frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{b^2+1}=\frac{1}{2}$，$a^2b=-1$，$ab^2=1$，则 $a^2b<ab^2$，故 A，B 错误. 取 $a=0$，$b=-2$，则 $a^2=0$，$ab=0$，$b^2=4$，故 C 错误. 因为 $a>b$，所以 $2a>b+a>2b$，所以 $a>\frac{a+b}{2}>b$，故 D 正确. 故选 D.

(2) 由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$ 得 $c\neq 0$. 当 $c>0$ 时，由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$，得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，即 $b<a<0$，所以 $|b|>|a|$，$0<\frac{a}{b}<1$；当 $c<0$ 时，由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$，得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$，即 $b>a>0$，所以 $|b|>|a|$，$0<\frac{a}{b}<1$，故 A，D 正确；由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$，得 $\frac{c^3}{a}-\frac{c^3}{b}=\frac{c^3(b-a)}{ab}<0$，由上述分析可知 a 与 b 同号，即 $ab>0$，所以 c 与 $b-a$ 异号，即 c 与 $a-b$ 同号，故 C 正确；由 $c(a-b)>0$，得 $ac>bc$，故 B 错误. 故选 ACD.

变式题 (1)D (2)ABC [解析] (1) 当 $a=1$，$b=-1$ 时，满足 $a>b$，但 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 中不等式不一定成立；当 $a=1$，$b=-1$ 时，满足 $a>b$，但 $a^2=b^2$，故 B 中不等式不一定成立；当 $a=1$，$b=-1$ 时，满足 $a>b$，但 $\ln b$ 不存在，故 C 中不等式不一定成立；由 $a>b$，得 $a-b>0$，则 $2^{a-b}>1$，故 D 中不等式一定成立. 故选 D.

(2) 对于 A，因为 $a+c>b+c$，所以 $a>b$，故 A 符合题意；对于 B，因为 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，所以 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}>0$，所以 $a-b>0$，即 $a>b$，故 B 符合题意；对于 C，因为 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，所以 $\frac{a}{c^2}-\frac{b}{c^2}=\frac{a-b}{c^2}>0$，即 $a>b$，故 C 符合题意；对于 D，取 $a=-1$，$b=0$，满足 $a^2>b^2$，但 $a<b$，故 D 不符合题意. 故选 ABC.

例 3 $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$ [解析] $\because -3<a<-2$，$\therefore -\frac{1}{2}<\frac{1}{a}<-\frac{1}{3}$，故 $\frac{1}{3}<-\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$. 又 $\because 2<b<4$，$\therefore \frac{2}{3}<-\frac{b}{a}<2$，则 $-2<\frac{b}{a}<-\frac{2}{3}$.

变式题 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ [解析] 因为 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，所以 $a>0$，$c<0$，$b=-a-c$. 由 $b=-a-c<a$，得 $2a>-c$，故 $\frac{c}{a}>-2$. 由 $b=-a-c>c$，得 $-a>2c$，故 $\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$，所以 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$.

第 4 讲　均值不等式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) $a>0,b>0$　(2) $a=b$　(3) $\frac{a+b}{2}$

2. (1) $2ab$　(2) 2　3. (1) $2\sqrt{p}$　(2) $\frac{p^2}{4}$

【对点演练】

1. ± 1　2 [解析] $x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}=2$，当且仅当 $x=\pm 1$ 时，等号成立，则 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的最小值为 2.

2. $\frac{9}{8}$ [解析] 因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以 $3-2x>0$，所以 $y=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(3-2x)\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{2x+(3-2x)}{2}\right]^2=\frac{9}{8}$，当且仅当 $2x=3-2x$，即 $x=\frac{3}{4}$ 时取等号.

3. 3 [解析] 因为 $x>2$，所以 $f(x)=x+\frac{1}{x-2}=(x-2)+\frac{1}{x-2}+2\geqslant 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+2=4$，当且仅当 $x-2=\frac{1}{x-2}$，即 $x=3$ 时，等号成立. 故 $a=3$.

4. 40　9 [解析] 设矩形菜园的相邻两条边的长分别为 x m，y m，则篱笆的长度为 $2(x+y)$ m. 由题知 $xy=100$，由 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$，可得 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=20$，所以 $2(x+y)\geqslant 40$，当且仅当 $x=y=10$ 时，等号成立. 因此，当这个矩形菜园是边长为 10 m 的正方形时，所用篱笆最短，此时所用篱笆的长度是 40 m. 若矩形菜园和墙平行的边长为 $x(0<x\leqslant 9)$ m，与墙不平行的边长为 y m，则篱笆的长度为 $(x+2y)$ m，又 $xy=100$，所以 $x+2y=x+\frac{200}{x}$，因为 $f(x)=x+\frac{200}{x}$ 在 $(0,9]$ 上单调递减，所以当 $x=9$ 时所用篱笆最短.

5. $3+2\sqrt{3}$ [解析] 因为 $x<0$，所以 $-3x>0$，$-\frac{1}{x}>0$，所以 $y=3-3x-\frac{1}{x}=3+\left[(-3x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\right]\geqslant 3+2\sqrt{(-3x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=3+2\sqrt{3}$，当且仅当 $-3x=-\frac{1}{x}$，即 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，所以 $y=3-3x-\frac{1}{x}$ 的最小值是 $3+2\sqrt{3}$.

6. 3 [解析] 设 $x+2=t$，则 $x+\frac{4}{x+2}=t+\frac{4}{t}-2$. 由 $x\geqslant 2$ 得 $t\geqslant 4$，因为函数 $y=t+\frac{4}{t}-2$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $t=4$ 时，$y=t+\frac{4}{t}-2$ 取得最小值，最小值为 $4+\frac{4}{4}-2=3$，故 $x+\frac{4}{x+2}$ 的最小值为 3.

● 课堂考点探究

例 1 (1)BD (2)ABD [解析] (1) 对于 A，当 $a=1$，$b=-1$ 时，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-2$，故 A 错误；对于 B，因为 $(a-b)^2\geqslant 0$，所以 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，所以 $\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\geqslant ab$，即 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，当且仅当 $a=b$ 时取等号，故 B 正确；对于 C，当 $a=-1$，$b=-1$ 时，$a+b=-2<2\sqrt{|ab|}=2$，故 C 错误；对于 D，因为 $(a+b)^2\geqslant 0$，所以 $a^2+b^2+2ab\geqslant 0$，即 $a^2+b^2\geqslant -2ab$，当且仅当 $a=-b$ 时取等号，故 D 正确. 故选 BD.

(2) 对于 A，因为正实数 m,n 满足 $m+n=1$，所以 $0<mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{1}{mn}\geqslant 4$，当且仅当 $m=n=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 A 正确；对于 B，$(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2=m+n+2\sqrt{mn}\leqslant m+n+m+n=2$，则 $\sqrt{m}+\sqrt{n}\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $m=n=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 B 正确；对于 C，$1=m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$，所以 $\sqrt{mn}\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $m=n=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 C 错误；对于 D，由 $\frac{m+n}{2}\leqslant\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$，可得 $m^2+n^2\geqslant\frac{(m+n)^2}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $m=n=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 (1)D (2)B [解析] (1) 对于选项 A，当 $x<0$ 时，$y=x+\frac{2}{x}<0$，即最小值不是 $2\sqrt{2}$，故选项 A 不符合题意；对于选项 B，当 $x>0$ 时，$y=x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，即 $y=x+\frac{1}{x}$ 的最小值是 2，故选项 B 不符合题意；对于选项 C，$y=\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$，令 $t=\sqrt{x^2+3}$，则 $t\geqslant\sqrt{3}$，$y=t+\frac{1}{t}$ 在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，当 $t=\sqrt{3}$ 时，$y=t+\frac{1}{t}$ 取得最小值，最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选项 C 不符合题意；对于选项 D，$y=\mathrm{e}^x+\frac{2}{\mathrm{e}^x}\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=\ln\sqrt{2}$ 时取等号，即 $y=\mathrm{e}^x+\frac{2}{\mathrm{e}^x}$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$，故选项 D 符合题意. 故选 D.

(2) 由题知，$0<a<b$，且 $a+b=1$，所以 $0<a<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<b<1$，故排除 D. 因为 $a^2+b^2>\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{1}{2}$，所以排除 A. 因为 $a^2+b^2>2ab$，所以排除 C. 故选 B.

例 2 (1)A (2)C [解析] (1) $\because x>0$，$\therefore x+1>1$，$\therefore y=2+3x+\frac{4}{x+1}=2+3(x+1)-3+\frac{4}{x+1}=3(x+1)+\frac{4}{x+1}-$

$1\geqslant 2\sqrt{3(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=4\sqrt{3}-1$，当且仅当 $3(x+1)=\frac{4}{x+1}$，即 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ 时，等号成立，∴函数 $y=2+3x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为 $4\sqrt{3}-1$. 故选 A.

(2)因为 $-1<x<0$，所以 $x\sqrt{3-2x^2}=-\sqrt{x^2(3-2x^2)}=-\sqrt{2x^2\left(\frac{3}{2}-x^2\right)}\geqslant-\sqrt{2\left(\frac{x^2+\frac{3}{2}-x^2}{2}\right)^2}=-\sqrt{2\times\frac{9}{16}}=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$（当且仅当 $x^2=\frac{3}{2}-x^2$，即 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号），故 $x\sqrt{3-2x^2}$ 的最小值为 $-\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 故选 C.

例3 (1)A (2)A [解析](1)因为 $0<x<\frac{1}{2}$，所以 $1-2x>0$，且 $2x+(1-2x)=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-2x}=[2x+(1-2x)]\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-2x}\right)=3+\frac{1-2x}{x}+\frac{2x}{1-2x}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{1-2x}{x}\cdot\frac{2x}{1-2x}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{1-2x}{x}=\frac{2x}{1-2x}$，即 $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-2x}$ 的最小值是 $3+2\sqrt{2}$. 故选 A.

(2)由题意可知 $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}=1$，∴$2x+y=(2x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{y}\right)=\frac{8x}{y}+\frac{2y}{x}+8\geqslant 2\sqrt{\frac{8x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}+8=16$，当且仅当 $\frac{8x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=4,y=8$ 时，等号成立，则 $2x+y$ 的最小值为16.

例4 A [解析] 由 $x^2-2xy+2=0$ 可得 $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$，所以 $x+y=x+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}=\frac{3x}{2}+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{x}}=\sqrt{6}$，当且仅当 $\frac{3x}{2}=\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，等号成立，所以 $x+y$ 的最小值为 $\sqrt{6}$. 故选 A.

【应用演练】

1. A [解析] 因为 $0<x<2$，所以 $y=x\sqrt{4-x^2}=\sqrt{x^2(4-x^2)}\leqslant\frac{x^2+(4-x^2)}{2}=2$，当且仅当 $x^2=4-x^2$，即 $x=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $y=x\sqrt{4-x^2}$ 的最大值为2. 故选 A.

2. C [解析] 因为 $\frac{1}{x}+2y=2$，所以 $\frac{1}{2x}+y=1$，因为 $x>0,y>0$，所以 $x+\frac{1}{y}=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{2x}+y\right)=\frac{1}{2}+xy+\frac{1}{2xy}+1=\frac{3}{2}+xy+\frac{1}{2xy}\geqslant\frac{3}{2}+2\sqrt{xy\cdot\frac{1}{2xy}}=\frac{3}{2}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，当且仅当 $\begin{cases}xy=\frac{1}{2xy},\\ \frac{1}{2x}+y=1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{2}}{2},\\ y=2-\sqrt{2}\end{cases}$ 时取等号. 故选 C.

3. BC [解析] 由 $a>1,b>1,ab-a-b=0$，得 $ab=a+b$. 对于 A，$ab=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，即 $\sqrt{ab}\geqslant 2$，即 $ab\geqslant 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，故 ab 的最小值为4，故 A 错误；对于 B，由 $ab=a+b$，得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $2a+b=(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{2}+1$ 时，等号成立，故 B 正确；对于 C，由 $ab=a+b$，得 $(a-1)(b-1)=1$，则 $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{(a-1)(b-1)}}=2$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，故 C 正确；对于 D，$a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，故 D 错误. 故选 BC.

4. 4 [解析] 由 $a>0,b>0,ab=2$，得 $a=\frac{2}{b}$，故 $\frac{a+4b+2b^3}{b^2+1}=\frac{\frac{2}{b}+4b+2b^3}{b^2+1}=\frac{2+4b^2+2b^4}{b(b^2+1)}=2\times\frac{(b^2+1)^2}{b(b^2+1)}=2\times\frac{b^2+1}{b}=2\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2\times 2\sqrt{b\times\frac{1}{b}}=4$，当且仅当 $b=1$ 时等号成立.

例5 解：(1)根据题意，当 $t=0$ 时，$x=1$，则 $1=4-\frac{k}{1}$，解得 $k=3$，所以 $x=4-\frac{3}{2t+1}$，所以 $y=1.5\cdot\frac{6+12x}{x}\cdot x-(6+12x)-t=3+6x-t=3+6\left(4-\frac{3}{2t+1}\right)-t=27-\frac{18}{2t+1}-t(t\geqslant 0)$.

(2)由(1)知，$y=27-\frac{18}{2t+1}-t=27.5-\left[\frac{9}{t+0.5}+(t+0.5)\right]\leqslant 27.5-2\sqrt{\frac{9}{t+0.5}\cdot(t+0.5)}=21.5$，当且仅当 $\frac{9}{t+0.5}=t+0.5$，即 $t=2.5$ 时等号成立，

所以该厂家2026年该产品的年促销费用为2.5万元时该产品的年利润最大.

变式题 (1)20 (2)$y=\frac{7x}{4}+\frac{11\ 200}{x}$，$x\in[60,120]$ 80 280 [解析](1)由题知 $\overline{C}=\frac{C(q)}{q}=\frac{\frac{1}{4}q^2+100}{q}=\frac{q}{4}+\frac{100}{q}\geqslant 2\sqrt{\frac{q}{4}\cdot\frac{100}{q}}=10$，当且仅当 $\frac{q}{4}=\frac{100}{q}$，即 $q=20$ 时取等号，故当 $q=20$ 时，平均成本最少.

(2)若车速为 x km/h，则从 A 地到 B 地所需时间为 $\frac{100}{x}$ h，依题意可得 $y=\frac{100}{x}\left(42+\frac{7x^2}{400}+70\right)=\frac{7x}{4}+\frac{11\ 200}{x}$，$x\in[60,120]$. $y=\frac{7x}{4}+\frac{11\ 200}{x}\geqslant 2\sqrt{\frac{7x}{4}\cdot\frac{11\ 200}{x}}=280$，当且仅当 $\frac{7x}{4}=\frac{11\ 200}{x}$，即 $x=80$ 时取等号，所以以80 km/h的车速行驶，快递公司需要支付的总费用最少，最少费用为280元.

拓展应用1 三元均值不等式、柯西不等式

【典型例题】

例1 9 [解析] $y=6x+\frac{3}{x^2}=3x+3x+\frac{3}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{3x\cdot 3x\cdot\frac{3}{x^2}}=9$，当且仅当 $3x=\frac{3}{x^2}$，即 $x=1$ 时，等号成立.

例2 (1)25 (2)3 [解析](1)方法一(均值不等式)：∵$0<x<\frac{1}{2}$，∴$1-2x>0$，∴$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}=\left(\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}\right)(2x+1-2x)=4+9+\frac{2(1-2x)}{x}+\frac{18x}{1-2x}\geqslant 13+2\sqrt{36}=25$，当且仅当 $\frac{2(1-2x)}{x}=\frac{18x}{1-2x}$，即 $x=\frac{1}{5}$ 时取等号，∴函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ 的最小值为25.

方法二(柯西不等式)：∵$0<x<\frac{1}{2}$，∴$1-2x>0$，∴$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}=\frac{4}{2x}+\frac{9}{1-2x}=\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2x}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{1-2x}}\right)^2\right][(\sqrt{2x})^2+(\sqrt{1-2x})^2]\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{2x}}\times\sqrt{2x}+\frac{3}{\sqrt{1-2x}}\times\sqrt{1-2x}\right)^2=25$，当且仅当 $\frac{2}{2x}=\frac{3}{1-2x}$，即 $x=\frac{1}{5}$ 时取等号，∴函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ 的最小值为25.

方法三(权方和不等式)：由 $0<x<\frac{1}{2}$，得 $1-2x>0$，由权方和不等式可得 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}=\frac{4}{2x}+\frac{9}{1-2x}\geqslant\frac{(2+3)^2}{2x+1-2x}=25$，当且仅当 $\frac{2}{2x}=\frac{3}{1-2x}$，即 $x=\frac{1}{5}$ 时取等号，∴函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ 的最小值为25.

(2)由题意得 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，函数 $y=2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+1}=\sqrt{2}\times\sqrt{2-2x}+1\cdot\sqrt{2x+1}\leqslant\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2-2x})^2+(\sqrt{2x+1})^2}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$，当且仅当 $\sqrt{2-2x}\cdot 1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x+1}$，即 $x=0$ 时取等号，所以函数 $y=2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x+1}$ 的最大值为3.

【巩固演练】

1. C [解析] 因为 a,b,c 均为正数，且 $a+b+c=1$，所以 $0<a<1,0<b<1,0<c<1$，所以 $(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant\left[\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，当且仅当 $1-a=1-b=1-c$，即 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

2. B [解析] 方法一(均值不等式)：由题意得 $k\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立. ∵$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2=\frac{x+5y+2\sqrt{5xy}}{x+y}\leqslant\frac{x+5y+5x+y}{x+y}=6$，当且仅当 $5x=y$ 时，等号成立，∴$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}\leqslant\sqrt{6}$，∴$k\geqslant\sqrt{6}$.

方法二(柯西不等式):由题意得 $k\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立.∵$(\sqrt{x}+\sqrt{5y})^2\leqslant(x+y)(1+5)=6(x+y)$,当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{1}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{5}}$,即 $5x=y$ 时,等号成立,∴$\sqrt{x}+\sqrt{5y}\leqslant\sqrt{6}\sqrt{x+y}$,即 $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}\leqslant\sqrt{6}$,∴$k\geqslant\sqrt{6}$.

方法三(权方和不等式):由题意得 $k\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}$ 恒成立.∵$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}\right)^2=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{5y})^2}{x+y}\leqslant\frac{x}{x}+\frac{5y}{y}=6$,当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{5y}}{y}$,即 $5x=y$ 时,等号成立,∴$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5y}}{\sqrt{x+y}}\leqslant\sqrt{6}$,∴$k\geqslant\sqrt{6}$.

3. $\sqrt{11}$ [解析] 令 $a_1=\sqrt{3}x$,$a_2=\sqrt{2}y$,$b_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$,$b_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$,代入柯西不等式 $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$,得 $(2x+y)^2\leqslant(3x^2+2y^2)\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=6\times\frac{11}{6}=11$,当且仅当 $\frac{3x}{2}=2y$ 时等号成立,所以 $-\sqrt{11}\leqslant2x+y\leqslant\sqrt{11}$,所以 $2x+y$ 的最大值为 $\sqrt{11}$.

4. -1 [解析] $\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}$,且 $\left(\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}\right)[(2x^2+1)-(2x^2+2)]=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\right)^2-\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\right)^2\right][(\sqrt{2x^2+1})^2-(\sqrt{2x^2+2})^2]\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\sqrt{2x^2+1}-\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\cdot\sqrt{2x^2+2}\right)^2=1$,当且仅当 $\frac{1}{\sqrt{2x^2+1}}\cdot\sqrt{2x^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2x^2+2}}\cdot\sqrt{2x^2+1}$,即 $x=0$ 时,等号成立,即 $-\left(\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}\right)\leqslant1$,所以 $\frac{1}{2x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}=\frac{1}{2x^2+1}-\frac{4}{2x^2+2}\geqslant-1$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

第5讲 一元二次方程、不等式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. $\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$ $\left\{x\middle|x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$ **R** $\{x|x_1<x<x_2\}$ ∅ ∅

【对点演练】

1. $(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$ [解析] 由 $x^2-5x-6=(x-6)(x+1)\geqslant0$,解得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant6$,即原不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup[6,+\infty)$.

2. -14 [解析] 由题意知 $-\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ 是 $ax^2+bx+2=0$ 的两根,则 $\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a},\\ \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{a},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-12,\\ b=-2,\end{cases}$ 所以 $a+b=-14$.

3. $[0,4)$ [解析] 当 $m=0$ 时,$1>0$,不等式恒成立;当 $m\neq0$ 时,由题得 $\begin{cases}m>0,\\ \Delta=m^2-4m<0,\end{cases}$ 解得 $0<m<4$.综上,m 的取值范围是 $[0,4)$.

4. $\left\{x\middle|\frac{7}{2}<x<5\right\}$ [解析] 由 $(5-x)(2x-7)>0$,得 $(x-5)(2x-7)<0$,解得 $\frac{7}{2}<x<5$,所以原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{7}{2}<x<5\right\}$.

5. $\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant1\}$ [解析] 由 $\frac{2}{x+1}\leqslant1$ 得 $\frac{2}{x+1}-1\leqslant0$,得 $\frac{2-x-1}{x+1}\leqslant0$,得 $\frac{x-1}{x+1}\geqslant0$,得 $x-1=0$ 或 $(x-1)(x+1)>0$,得 $x=1$ 或 $x<-1$ 或 $x>1$,得 $x<-1$ 或 $x\geqslant1$,所以原不等式的解集为 $\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant1\}$.

6. ③④ [解析] 当 $a<2$ 时,解集为 $(a,2)$;当 $a=2$ 时,解集为∅;当 $a>2$ 时,解集为 $(2,a)$.故填③④.

7. $(-\infty,1)$ [解析] 当 $a=0$ 时,不等式为 $2x+1<0$,有实数解,满足题意;当 $a<0$ 时,不等式对应的二次函数的图象开口向下,$\Delta=4-4a>0$,所以不等式有实数解,满足题意;当 $a>0$ 时,若不等式有实数解,则 $\Delta=4-4a>0$,解得 $a<1$,所以 $0<a<1$.综上,a 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

● 课堂考点探究

例1 (1) $\left\{x\middle|\frac{2}{3}\leqslant x<3\right\}$ (2) $[-2,-1)\cup(2,3]$ [解析] (1)不等式 $\frac{2x+1}{3-x}\geqslant1$ 可变形为 $\frac{3x-2}{x-3}\leqslant0$,即 $(3x-2)(x-3)\leqslant0$,且 $x-3\neq0$,解得 $\frac{2}{3}\leqslant x<3$,故原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{2}{3}\leqslant x<3\right\}$.

(2)由题得 $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-2\leqslant4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\ x^2-x-6\leqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x-2)(x+1)>0,\\ (x-3)(x+2)\leqslant0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x>2\text{ 或 }x<-1,\\ -2\leqslant x\leqslant3,\end{cases}$ 故原不等式的解集为 $[-2,-1)\cup(2,3]$.

例2 解:若 $a=0$,则不等式化为 $-2x+2<0$,解得 $x>1$,不等式的解集为 $\{x|x>1\}$.

若 $a\neq0$,则不等式化为 $(ax-2)(x-1)<0$,一元二次方程 $(ax-2)(x-1)=0$ 的解为 $x_1=\frac{2}{a}$,$x_2=1$.当 $0<a<2$ 时,$\frac{2}{a}>1$,则原不等式的解集为 $\left\{x\middle|1<x<\frac{2}{a}\right\}$;当 $a=2$ 时,$\frac{2}{a}=1$,则原不等式的解集为∅;当 $a>2$ 时,$\frac{2}{a}<1$,则原不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{2}{a}<x<1\right\}$;

当 $a<0$ 时,$\frac{2}{a}<1$,不等式化为 $(-ax+2)(x-1)>0$,解得 $x>1$ 或 $x<\frac{2}{a}$,故原不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>1\text{ 或 }x<\frac{2}{a}\right\}$.

综上所述,当 $a<0$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>1\text{ 或 }x<\frac{2}{a}\right\}$;当 $a=0$ 时,不等式的解集为 $\{x|x>1\}$;当 $0<a<2$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|1<x<\frac{2}{a}\right\}$;当 $a=2$ 时,不等式的解集为∅;当 $a>2$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{2}{a}<x<1\right\}$.

例3 解:设 $e^x=t>0$,不等式 $f(x)<0$ 可化为 $(at-1)(2t+1)<0$.当 $a\leqslant0$ 时,∵$t>0$,∴不等式 $(at-1)(2t+1)<0$ 恒成立,此时不等式的解集为 **R**;当 $a>0$ 时,∵$t>0$,∴由 $(at-1)(2t+1)<0$ 得 $0<t<\frac{1}{a}$,∴$0<e^x<\frac{1}{a}$,解得 $x<-\ln a$,此时不等式的解集为 $(-\infty,-\ln a)$.综上所述,当 $a\leqslant0$ 时,不等式的解集为 **R**;当 $a>0$ 时,不等式的解集为 $(-\infty,-\ln a)$.

变式题 解:当 $\Delta=a^2-4\leqslant0$,即 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时,不等式的解集为∅;当 $\Delta=a^2-4>0$,即 $a>2$ 或 $a<-2$ 时,$x^2-ax+1=0$ 的根为 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$,$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$,不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$.综上,当 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时,不等式的解集为∅;当 $a>2$ 或 $a<-2$ 时,不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}<x<\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$.

例4 C [解析] 当 $k=0$ 时,不等式 $kx^2+(k-6)x+2>0$ 可化为 $-6x+2>0$,显然不符合题意;当 $k\neq0$ 时,因为 $kx^2+(k-6)x+2>0$ 的解集为 **R**,所以 $\begin{cases}k>0,\\ \Delta=(k-6)^2-4k\times2<0,\end{cases}$ 解得 $2<k<18$.综上,实数 k 的取值范围是 $(2,18)$.故选C.

变式题 B [解析] 不等式 $mx^2+mx-4<2x^2+2x-1$ 对任意实数 x 恒成立,即不等式 $(m-2)x^2+(m-2)x-3<0$ 对任意实数 x 恒成立.当 $m=2$ 时,不等式可化为 $-3<0$,恒成立,符合题意;当 $m\neq2$ 时,由题意得 $m-2<0$,且 $\Delta=(m-2)^2+12(m-2)=m^2+8m-20=(m+10)(m-2)<0$,解得 $-10<m<2$.综上所述,实数 m 的取值范围是 $(-10,2]$.故选B.

例5 D [解析] 当 $x=0$ 时,原不等式为 $-3<0$,恒成立;当 $x\in(0,2]$ 时,由题得 $2a>\frac{x^2-3}{x}=x-\frac{3}{x}$ 恒成立,令 $f(x)=x-\frac{3}{x}$,$x\in(0,2]$,易知 $f(x)=x-\frac{3}{x}$ 在 $(0,2]$ 上单调递增,所以当 $x=2$ 时,$f(x)=x-\frac{3}{x}$ 取得最大值,即 $f(x)_{\max}=f(2)=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$,所以 $2a>\frac{1}{2}$,则 $a>\frac{1}{4}$.综上,实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$.故选D.

变式题 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ [解析] 由题意得函数 $f(x)=x^2+mx-1$ 在 $[m,m+1]$ 上的最大值小于0,因为函数 $f(x)=x^2+mx-1$ 的图象开口向上,所以 $\begin{cases}f(m)=m^2+m^2-1<0,\\ f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m^2-1<0,\\ 2m^2+3m<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$,故实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.

例6 B [解析] $f(x)=x^2+(m-4)x+4-2m=(x-2)m+x^2-4x+4$,令 $g(m)=(x-2)m+x^2-4x+4$,$m\in[-1,1]$.当 $x=2$ 时,$g(m)=0$,不符合题意;当 $x>2$ 时,$g(m)$ 单调递增,由 $g(-1)=(x-2)\cdot(-1)+x^2-4x+4>0$,可得 $x>3$;当 $x<2$ 时,$g(m)$ 单调递减,由 $g(1)=(x-2)\cdot1+x^2-4x+4>0$,可得 $x<1$.综上,x 的取值范围是 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.故选B.

变式题 A [解析] 由题得不等式 $(x-4)a-x^2-3x+16\leqslant0$ 对任意 $a\in[-2,4]$ 恒成立,

所以$\begin{cases}-2(x-4)-x^2-3x+16\leqslant 0,\\4(x-4)-x^2-3x+16\leqslant 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x^2-5x+24\leqslant 0,\\-x^2+x\leqslant 0,\end{cases}$解得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -8$. 故选 A.

第二单元　函数

第 6 讲　函数的概念及其表示

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 实数集　每一个实数 x　唯一确定
2. (1)定义域　值域
   (2)定义域　对应关系
3. 解析法　列表法　图象法　4. 对应关系

【对点演练】

1. $(-\infty,-3)\cup(-3,8]$　[解析] 要使函数 $f(x)$ 有意义,只需 $8-x\geqslant 0$ 且 $x+3\neq 0$,即 $x\leqslant 8$ 且 $x\neq -3$,故 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-3)\cup(-3,8]$.
2. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　[解析] 函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{1}{2}\right\}$,$y=\frac{x}{2x+1}=\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}-\frac{\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}$,因为 $\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}\neq 0$,所以 $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)}\neq\frac{1}{2}$,故函数 $y=\frac{x}{2x+1}$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.
3. ②　[解析] 对于①,在集合 N 中找不到与 2 对应的元素,故不是从集合 M 到集合 N 的函数;对于③,在集合 N 中可以找到两个元素与 1 对应,故不是从集合 M 到集合 N 的函数;对于④,在集合 N 中找不到与 2 对应的元素,故不是从集合 M 到集合 N 的函数. 故填②.
4. $[-3,0]\cup[2,3]$　$[1,5]$　$[1,2)\cup(4,5]$　[解析] 由函数图象可知,函数的定义域是 $[-3,0]\cup[2,3]$,函数的值域是 $[1,5]$,其中只有唯一的 x 值与之对应的 y 值的范围是 $[1,2)\cup(4,5]$.
5. $x-1(x>0)$　[解析] 令 $t=e^x$,则 $t>0$,所以 $f(t)=t-1(t>0)$,则 $f(x)=x-1(x>0)$.
6. $(-\infty,-1]\cup(0,1]$　[解析] 当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)\geqslant 2$ 即为 $x^2+1\geqslant 2$,解得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1$,所以 $x\leqslant -1$;当 $x>0$ 时,$f(x)\geqslant 2$ 即为 $-x+3\geqslant 2$,解得 $x\leqslant 1$,所以 $0<x\leqslant 1$. 综上所述,x 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup(0,1]$.
7. -15　[解析] ∵函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$,∴$(1,+\infty)$ 是不等式 $a\cdot 3^{-2x}+2\cdot 3^{-x}+1>0$ 的解集,令 $m=3^x$,得不等式 $m^2+2m+a>0(m>0)$ 的解集为 $(3,+\infty)$,所以 3 是关于 m 的方程 $m^2+2m+a=0$ 的根,将 $m=3$ 代入方程可得 $a=-15$. 经检验知当 $a=-15$ 时,不等式 $a\cdot 3^{-2x}+2\cdot 3^{-x}+1>0$ 的解集是 $(1,+\infty)$,故实数 a 的值为 -15.

● 课堂考点探究

例 1　(1)D　(2)C　[解析] (1)要使函数 $f(x)=\frac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-3)}$ 有意义,需满足 $\begin{cases}|x-2|-1\geqslant 0,\\x-3>0,\\x-3\neq 1,\end{cases}$ 解得 $x>3$ 且 $x\neq 4$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3,4)\cup(4,+\infty)$. 故选 D.

(2)由题意,要使函数 $y=\frac{f(x+1)}{\sqrt{x-1}}+(x-2)^0$ 有意义,需满足 $\begin{cases}0\leqslant x+1\leqslant 4,\\x-1>0,\\x-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $1<x<2$ 或 $2<x\leqslant 3$,所以函数 $y=\frac{f(x+1)}{\sqrt{x-1}}+(x-2)^0$ 的定义域是 $(1,2)\cup(2,3]$. 故选 C.

变式题　(1)B　(2)$(-2,2]$　[解析] (1)因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1,10]$,所以要使函数 $y=(x-3)^0f(3x)$ 有意义,需满足 $\begin{cases}x-3\neq 0,\\1\leqslant 3x\leqslant 10,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}$ 且 $x\neq 3$,所以 $y=(x-3)^0f(3x)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{3},3\right)\cup\left(3,\frac{10}{3}\right]$. 故选 B.

(2)因为函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $[-1,1)$,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,3)$,由 $-1\leqslant 1-x<3$,解得 $-2<x\leqslant 2$,所以函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $(-2,2]$.

例 2　(1)D　(2)$f(x)=x^2-x+1$

(3)$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x\neq 0)$　[解析] (1)方法一:因为 $f\left(\frac{1-x}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-1=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\frac{2}{x}-2=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+2\left(\frac{1}{x}-1\right)$,所以 $f(x)=x^2+2x(x\neq -1)$. 故选 D.

方法二:设 $t=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1(t\neq -1)$,则 $\frac{1}{x}=t+1(t\neq -1)$,所以 $f(t)=(t+1)^2-1=t^2+2t$,所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^2+2x(x\neq -1)$. 故选 D.

(2)设 $f(x)=ax^2+bx+c$,$a\neq 0$,∵$f(0)=1$,∴$c=1$,则 $f(x)=ax^2+bx+1$. 在 $f(x+1)-f(x)=2x$ 中,令 $x=0$,则 $f(1)-f(0)=0$,∴$f(1)=1$,即 $a+b+1=1$,故 $a+b=0$①;令 $x=1$,则 $f(2)-f(1)=2$,∴$f(2)=3$,即 $4a+2b+1=3$,故 $2a+b=1$②. 由①②得 $a=1,b=-1$,∴$f(x)=x^2-x+1$.

(3)∵$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x+1}{\sqrt{1+x^2}}$①,

∴$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{2\cdot\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=\frac{2+x}{\sqrt{1+x^2}}$②,由①×2−②得 $3f(x)=\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$,∴$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x\neq 0)$.

变式题　(1)AC　(2)D　(3)$f(x)=x^2-2x-3(x\geqslant 1)$　[解析] (1)设 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$,则 $f(2x)=2kx+b$,故 $f[f(2x)]=f(2kx+b)=2k^2x+kb+b$. 因为 $f[f(2x)]=8x+3$,所以 $\begin{cases}2k^2=8,\\kb+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2,\\b=-3,\end{cases}$ 所以 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$. 故选 AC.

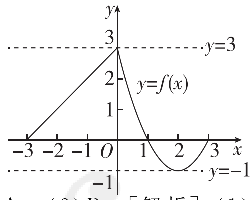
(2)用 $-x$ 替换 x,则由 $f(x)+2f(-x)=x^2-x$ 得 $f(-x)+2f(x)=x^2+x$,联立可解得 $f(x)=\frac{x^2}{3}+x$. 故选 D.

(3)令 $t=\sqrt{x}+1\geqslant 1$,则 $x=(t-1)^2$,故 $f(t)=(t-1)^2-4=t^2-2t-3(t\geqslant 1)$,即 $f(x)=x^2-2x-3(x\geqslant 1)$.

例 3　(1)C　(2)D　[解析] (1)因为 $e^2>3$,所以 $f(e^2)=\ln e^2-2=0$,所以 $f[f(e^2)]=f(0)=e^0-0=1$. 故选 C.

(2)方法一:当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时,$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$,此时 $f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$,即 $-1\leqslant f(x)\leqslant 3$;当 $-3\leqslant x<0$ 时,$f(x)=x+3$,此时 $0\leqslant f(x)<3$. 综上,函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,3]$.

方法二:画出 $f(x)$ 的大致图象,如图所示,由图可知,函数 $f(x)$ 的最小值为 -1,最大值为 3,故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,3]$. 故选 D.



例 4　(1)A　(2)B　[解析] (1)∵函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x>0,\\x+1,x\leqslant 0,\end{cases}$ ∴$f(1)=2^1=2$,又 $f(a)+f(1)=0$,∴$f(a)=-2$. 当 $a>0$ 时,$f(a)=2^a=-2$,无解;当 $a\leqslant 0$ 时,$f(a)=a+1=-2$,解得 $a=-3$. 故选 A.

(2)当 $x<0$ 时,不等式 $f(x)<2$ 即为 $-x^2-2x<2$,所以 $x^2+2x+2>0$,可得 $x<0$;当 $x\geqslant 0$ 时,不等式 $f(x)<2$ 即为 $\log_2(x+1)<2$,所以 $x+1<4$,且 $x+1>0$,所以 $0\leqslant x<3$. 综上,不等式 $f(x)<2$ 的解集是 $(-\infty,3)$. 故选 B.

【应用演练】

1. B　[解析] 由题意知,$f(1)=a+3$,$f(-1)=\frac{1}{2}$,即 $f(a+3)=\frac{1}{2}$. 当 $a+3\geqslant 0$,即 $a\geqslant -3$ 时,$f(a+3)=a+3(a+3)=4a+9=\frac{1}{2}$,解得 $a=-\frac{17}{8}$,满足题意;当 $a+3<0$,即 $a<-3$ 时,$f(a+3)=2^{a+3}=\frac{1}{2}$,解得 $a=-4$,满足题意. 所以 $a=-\frac{17}{8}$ 或 $a=-4$. 故选 B.
2. C　[解析] 当 $a>0$ 时,$-a<0$,由 $f(a)>f(-a)$ 得 $\log_2 a>\log_{\frac{1}{2}}a$,所以 $2\log_2 a>0$,可得 $a>1$;当 $a<0$ 时,$-a>0$,由 $f(a)>f(-a)$ 得 $\log_{\frac{1}{2}}(-a)>\log_2(-a)$,所以 $2\log_2(-a)<0$,可得 $0<-a<1$,即 $-1<a<0$. 综上可知,$-1<a<0$ 或 $a>1$. 故选 C.
3. ABD　[解析] 由 $D(x)=\begin{cases}1,x\text{ 是有理数},\\0,x\text{ 是无理数},\end{cases}$ 可得 $D(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$,所以 $D[D(x)]=1$,故选项 A,B 正确. 因为当 x 是无理数时,$D(x)=0$ 且 $x+1$ 是无理数,所以 $D(x+1)=0$,所以 $D(x+1)\neq D(x)+1$,故选项 C 错误. 当 x 是无理数时,$x+1$,$-x-1$ 均为无理数,此时有 $D(x+1)=D(-x-1)=0$;当 x 是有理数时,$x+1$,$-x-1$ 均为有理数,此时有 $D(x+1)=D(-x-1)=1$. 所以对任意 $x\in\mathbf{R}$,总有 $D(x+1)=D(-x-1)$,故选项 D 正确. 故选 ABD.
4. $\{0\}\cup[1,2)$　[解析] 当 $x\in(0,2)$ 时,函数 $y=[x]\cdot x=\begin{cases}0,0<x<1,\\x,1\leqslant x<2,\end{cases}$ 所以函数 $y=[x]\cdot x$ 的取值范围为 $\{0\}\cup[1,2)$.
5. $\frac{81}{16}$　[解析] ∵$\log_3\frac{1}{16}=-\log_3 16$,$3^2<16<3^3$,∴$-3<\log_3\frac{1}{16}<-2$,∴$f\left(\log_3\frac{1}{16}\right)=f\left(\log_3\frac{1}{16}+2\right)=f\left(\log_3\frac{1}{16}+2+2\right)=f\left(\log_3\frac{81}{16}\right)=3^{\log_3\frac{81}{16}}=\frac{81}{16}$.

第7讲　函数的单调性

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $f(x_1)<f(x_2)$　$f(x_1)>f(x_2)$
 上升的　下降的
2. 单调性　单调区间
3. $f(x)\leqslant M$　$f(x_0)=M$　$f(x)\geqslant M$
 $f(x_0)=M$　纵坐标　纵坐标

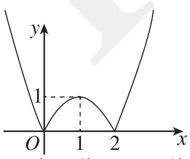
【对点演练】

1. $(2,3]$　$[-3,2]$　[解析] 由函数 $f(x)=(x-2)^2+5(x\in[-3,3])$ 的图象可得 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(2,3]$,单调递减区间是 $[-3,2]$.
2. $>$　[解析] 因为对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 都有 $\frac{x_1-x_2}{f(x_1)-f(x_2)}>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,又 $-3>-\pi$,所以 $f(-3)>f(-\pi)$.
3. $(-\infty,2]$　[解析] 函数 $f(x)=|x-a|+1$ 的单调递增区间是 $[a,+\infty)$,当 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增时,$[2,+\infty)\subseteq[a,+\infty)$,所以 $a\leqslant 2$,故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.
4. $[3,+\infty)$　[解析] 由 $x^2-2x-3\geqslant 0$ 得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3$,故 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.由函数 $y=x^2-2x-3$ 在 $(-\infty,-1]$ 上单调递减,在 $[3,+\infty)$ 上单调递增,得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[3,+\infty)$.
5. $\left(-\infty,\frac{13}{8}\right]$　[解析] 由题知 $\begin{cases}a-2<0,\\(a-2)\times 2\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2-1,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant\frac{13}{8}$,即实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{13}{8}\right]$.
6. (1)$(-\infty,-3]$　(2)-3　[解析] (1)函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=1-a$,由题意得 $1-a\geqslant 4$,解得 $a\leqslant -3$,故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.
 (2)函数 $f(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=1-a$,由题意得 $1-a=4$,解得 $a=-3$.

● 课堂考点探究

例1　解:任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$,且 $x_1<x_2$,易知 $f(x)=\frac{a(x-1+1)}{x-1}=a\left(1+\frac{1}{x-1}\right)$,则 $f(x_1)-f(x_2)=a\left(1+\frac{1}{x_1-1}\right)-a\left(1+\frac{1}{x_2-1}\right)=\frac{a(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$,又 $x_2-x_1>0$,$x_1-1<0$,$x_2-1<0$,故当 $a>0$ 时,$f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减;当 $a<0$ 时,$f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

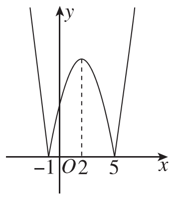
变式题　BD　[解析] 对于A,画出函数 $y=|x^2-2x|$ 的图象,如图所示,易知函数 $y=|x^2-2x|$ 在其定义域内不是增函数,故A错误;



对于B,因为函数 $y=e^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,$y=e^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,所以 $y=e^x-e^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,故B正确;对于C,函数 $y=\log_{0.5}x$ 在定义域上是减函数,而 $y=x+1$ 在定义域上为增函数,所以函数 $y=\log_{0.5}(x+1)$ 在定义域 $(-1,+\infty)$ 上为减函数,故C错误;对于D,$y=x+\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$y'=1-\sin x\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,故 $y=x+\cos x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,故D正确.故选BD.

例2　(1)$(-1,2)$,$(5,+\infty)$　(2)A

[解析] (1)函数 $y=|-x^2+4x+5|=\begin{cases}-x^2+4x+5,x\in[-1,5],\\x^2-4x-5,x\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty),\end{cases}$ 由 $|-x^2+4x+5|=0$,解得 $x=-1$ 或 $x=5$,作出函数 $y=|-x^2+4x+5|$ 的图象如图所示.由图可知,函数 $y=|-x^2+4x+5|$ 的单调递增区间为 $(-1,2)$,$(5,+\infty)$.



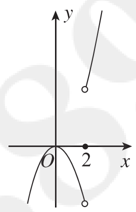
(2)由题得 $f'(x)=1+\ln x$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{e}$,当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>\frac{1}{e}$ 时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.故选A.

变式题　(1)C　(2)$(\pi,2\pi)$　(3)$[0,2)$

[解析] (1)由 $x^2-2x>0$,解得 $x<0$ 或 $x>2$,所以函数 $y=\ln(x^2-2x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.令 $u=x^2-2x$,则函数 $u=x^2-2x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,而函数 $y=\ln u$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,故由复合函数的单调性可得 $y=\ln(x^2-2x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$.故选C.

(2)由 $y=\sin x-x\cos x(0<x<2\pi)$,得 $y'=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$,令 $y'<0$,得 $\pi<x<2\pi$,所以函数 $y=\sin x-x\cos x(0<x<2\pi)$ 的单调递减区间为 $(\pi,2\pi)$.

(3)由题意知 $g(x)=x^2f(x-1)=\begin{cases}x^2,x>2,\\0,x=2,\\-x^2,x<2,\end{cases}$ 作出函数 $g(x)$ 的图象,如图所示.由图可知,$g(x)$ 的单调递减区间是 $[0,2)$.



例3　(1)D　(2)B

[解析] (1)由 $-x^2+4x>0$,得 $0<x<4$,即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,4)$.令 $g(x)=-x^2+4x$,$x\in(0,4)$,则 $g(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增,在 $[2,4)$ 上单调递减,又 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2]$.因为 $f(x)$ 在 $(a,a+1)$ 上单调递增,所以 $\begin{cases}a\geqslant 0,\\a+1\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant 1$.故选D.

(2)因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $-\frac{-2a}{-2}\geqslant 0$,且 $-a\leqslant e^0+\ln 1$,解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$,故选B.

变式题　(1)D　(2)$[2,3]$　[解析] (1)因为 $y=2^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,所以根据复合函数的单调性可得 $u=x(x-a)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,故 $\frac{a}{2}\geqslant 1$,解得 $a\geqslant 2$,故选D.

(2)因为函数 $f(x)$ 满足对任意实数 $x_1\neq x_2$,都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ 成立,所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,则 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 1,\\a>0,\\-a+6\geqslant a,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant a\leqslant 3$,所以 a 的取值范围是 $[2,3]$.

例4　B　[解析] 因为 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<1<c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3$,所以 $0<a<b<c$.
$f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=\lg\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}(x\in\mathbf{R})$,易知 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,$y=\lg u$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,所以 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,所以 $f(a)>f(b)>f(c)$.故选B.

例5　(1)D　(2)$[-2,1]$　[解析] (1)在 $f(xy)=f(x)+f(y)-1$ 中,令 $x=y=1$,得 $f(1)=f(1)+f(1)-1$,即 $f(1)=1$,所以 $f(\log_2 x-1)>f(1)$.因为函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的减函数,所以 $\begin{cases}\log_2 x-1>0,\\\log_2 x-1<1,\end{cases}$ 解得 $2<x<4$,故选D.

(2)因为 $y=e^{-x}$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减,$y=-x^2-2x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,并且 $e^{-0}=1$,$-0^2-2\times 0+1=1$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.因为 $f(a-1)\geqslant f(-a^2+1)$,所以 $a-1\leqslant -a^2+1$,解得 $-2\leqslant a\leqslant 1$,故实数 a 的取值范围是 $[-2,1]$.

【应用演练】

1. A　[解析] $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0,\\-x^2,x<0,\end{cases}$ 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.由 $f(2x)>f(1-x)$,得 $2x>1-x$,解得 $x>\frac{1}{3}$.故选A.
2. B　[解析] 由 $x_0>0$,得 $x_0+1>x_0>0$,因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x_0+1)<f(x_0)$,故B正确,A错误.当 $x_0>0$ 时,x_0-1 与 0 的大小关系无法确定,无法比较 $f(x_0-1)$ 与 $f(x_0)$ 的大小,故C,D错误.故选B.
3. A　[解析] 构造函数 $f(x)=2^x-3^{-x}$,易知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.由 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$ 得 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$,即 $f(x)<f(y)$,$\therefore x<y$,$\therefore y-x+1>1$,$\therefore \ln(y-x+1)>0$.故选A.
4. $(-\infty,0)$　[解析] 当 $x\leqslant 3$ 时,$f(x)=x^2-3x$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减,在 $\left[\frac{3}{2},3\right]$ 上单调递增,当 $x>3$ 时,$f(x)=\frac{1}{3}x-1$ 单调递增,且 $\frac{1}{3}\times 3-1=3^2-3\times 3$,因此函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$ 上单调递减,在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.易知 $1-x<2-x$,则当 $1-x\geqslant\frac{3}{2}$,即 $x\leqslant -\frac{1}{2}$ 时,$f(1-x)<f(2-x)$ 恒成立;当 $x>-\frac{1}{2}$ 时,$2-x<\frac{5}{2}<3$,原不等式化为 $(1-x)^2-3(1-x)<(2-x)^2-3(2-x)$,解得 $x<0$,则 $-\frac{1}{2}<x<0$.综上,不等式 $f(1-x)<f(2-x)$ 的解集为 $(-\infty,0)$.

增分微课1　函数的值域与最值

例1　(1)$\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right]$　(2)$\left[\log_{\frac{1}{2}}5,\log_{\frac{1}{2}}\frac{11}{4}\right]$

[解析] (1)因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 和 $y=\frac{1}{2^x}$ 在 $[1,2)$ 上均单调递减,所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{2^x}$ 在 $[1,2)$ 上单调递减,所以 $\log_{\frac{1}{2}}2+\frac{1}{2^2}<y\leqslant\log_{\frac{1}{2}}1+\frac{1}{2}$,即 $-\frac{3}{4}<y\leqslant\frac{1}{2}$,所以函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x+\frac{1}{2^x}$,$x\in[1,2)$ 的值域为 $\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right]$.

(2)设 $t=x^2-3x+5=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$,

$\because 0\leqslant x\leqslant 2$,$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时,t 取得最小值 $\frac{11}{4}$,当 $x=0$ 时,t 取得最大值 5,即 $\frac{11}{4}\leqslant t\leqslant 5$. $\because$ 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}} t$ 为减函数,$\therefore \log_{\frac{1}{2}}5\leqslant f(x)\leqslant \log_{\frac{1}{2}}\frac{11}{4}$,即函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\log_{\frac{1}{2}}5,\log_{\frac{1}{2}}\frac{11}{4}\right]$.

变式题 (1)$\left[\frac{1}{8},33\right]$ (2)4

[解析] (1)因为 $y=2^{x-5}$ 和 $y=\log_3\sqrt{x-1}$ 在 $[2,10]$ 上都单调递增,所以 $y=2^{x-5}+\log_3\sqrt{x-1}$ 在 $[2,10]$ 上单调递增,当 $x=2$ 时,$y_{\min}=2^{-3}+\log_3\sqrt{2-1}=\frac{1}{8}$,当 $x=10$ 时,$y_{\max}=2^5+\log_3\sqrt{9}=33$,故所求函数的值域为 $\left[\frac{1}{8},33\right]$.

(2)当 $x\leqslant 1$ 时,$f(x)=4e^{x-1}$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增,此时 $f(x)_{\max}=f(1)=4$;当 $x>1$ 时,$f(x)=\frac{4}{x}-x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,此时 $f(x)<f(1)=4$. 综上可知,$f(x)$ 的最大值为 4.

例 2 (1)$\frac{17}{8}$ (2)$[-4,-3]$

[解析](1)令 $\sqrt{1-x}=t(t\geqslant 0)$,则 $x=1-t^2$,所以 $y=-2t^2+t+2=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{17}{8}(t\geqslant 0)$,由二次函数的性质知,当 $t=\frac{1}{4}=\sqrt{1-x}$,即 $x=\frac{15}{16}$ 时,$f(x)$ 取得最大值 $\frac{17}{8}$.

(2)$f(x)=4^x-2^{x+1}-3=(2^x)^2-2\cdot 2^x-3$,设 $t=2^x$,$g(t)=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$,$\because x\in[-1,1]$,$\therefore t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,结合二次函数的性质可得 $g(t)\in[-4,-3]$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-4,-3]$.

变式题 (1)B (2)$[4-\sqrt{5},4+\sqrt{10}]$

[解析](1)$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,令 $\sqrt{x^2+4}=t(t\geqslant 2)$,则 $y=t+\frac{1}{t}$,易知 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $y_{\min}=\frac{5}{2}$. 故选 B.

(2)由 $5-x^2\geqslant 0$,得 $|x|\leqslant\sqrt{5}$,令 $x=\sqrt{5}\cos\beta,\beta\in[0,\pi]$,则 $y=\sqrt{5}\cos\beta+4+\sqrt{5}\sin\beta=\sqrt{10}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)+4$. 因为 $0\leqslant\beta\leqslant\pi$,所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\beta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$,则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$. 当 $\beta=\frac{\pi}{4}$ 时,$y_{\max}=4+\sqrt{10}$;当 $\beta=\pi$ 时,$y_{\min}=4-\sqrt{5}$,所以函数 $y=x+4+\sqrt{5-x^2}$ 的值域为 $[4-\sqrt{5},4+\sqrt{10}]$.

例 3 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

[解析] $f(x)=\frac{2x-3}{3x+1}=\frac{2x+\frac{2}{3}-\frac{11}{3}}{3x+1}=\frac{\frac{2}{3}(3x+1)-\frac{11}{3}}{3x+1}=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{3x+1}$,其中 $y=-\frac{11}{3}\cdot\frac{1}{3x+1}$ 的值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$.

变式题 $\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 3\}$ [解析] $y=\frac{3x+1}{x-2}=\frac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\frac{7}{x-2}$,因为 $\frac{7}{x-2}\neq 0$,所以 $3+\frac{7}{x-2}\neq 3$,所以 $y=\frac{3x+1}{x-2}$ 的值域为 $\{y\in\mathbf{R}\mid y\neq 3\}$.

例 4 C [解析] 设 $y=\frac{8x+15}{x^2+3x+4}$,则 $yx^2+(3y-8)x+4y-15=0$,当 $y=0$ 时,$x=-\frac{15}{8}$;当 $y\neq 0$ 时,视其为关于 x 的二次方程,由 $\Delta=(3y-8)^2-4y(4y-15)\geqslant 0$,得 $\begin{cases}-\frac{16}{7}\leqslant y\leqslant 4,\\ y\neq 0.\end{cases}$ 综上,函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{16}{7},4\right]$. 故选 C.

变式题 C [解析] 方法一:由 $y=\frac{x}{x^2+x+1}$,得 $yx^2+(y-1)x+y=0$,当 $y=0$ 时,得 $x=0$,不符合题意;当 $y\neq 0$ 时,由 $\Delta=(y-1)^2-4y^2\geqslant 0$,解得 $-1\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}$,又 $x>0$,所以 $y>0$,所以 $0<y\leqslant\frac{1}{3}$. 综上,$y=\frac{x}{x^2+x+1}(x>0)$ 的值域为 $\left(0,\frac{1}{3}\right]$. 故选 C.

方法二:$y=\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}$,当 $x>0$ 时,$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立,而 $x^2+x+1>0$ 恒成立,故 $0<\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $y=\frac{x}{x^2+x+1}(x>0)$ 的值域为 $\left(0,\frac{1}{3}\right]$. 故选 C.

例 5 D [解析] $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant 2$,当 $x=1$ 时,$f(x)$ 取得最小值 $f(1)=2$. 令 $f(x)=18$,即 $x^2-2x+3=18$,解得 $x=-3$ 或 $x=5$,当 $x\in[-3,1)$ 时,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(1,5]$ 时,$f(x)$ 单调递增,所以 n 的最大值为 5,m 的最小值为 -3,所以 $n-m$ 的最大值为 $5-(-3)=8$. 故选 D.

变式题 2 [解析] $f(x)=-x^2+4x+a=-(x-2)^2+4+a$,根据二次函数性质可知,函数 $f(x)$ 在 $[0,2)$ 上单调递增,在 $(2,3]$ 上单调递减,则 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=a=2$.

例 6 解:(1)因为 $x\geqslant\frac{5}{2}$,所以 $x-2\geqslant\frac{1}{2}>0$,所以 $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{2x-4}=\frac{(x-2)^2+1}{2(x-2)}=\frac{(x-2)}{2}+\frac{1}{2(x-2)}\geqslant 2\sqrt{\frac{(x-2)}{2}\times\frac{1}{2(x-2)}}=1$,当且仅当 $\frac{(x-2)}{2}=\frac{1}{2(x-2)}$,即 $x=3$ 时等号成立,所以 $f(x)$ 的最小值为 1.

(2)因为 $0\leqslant x\leqslant 3$,所以 $1\leqslant x+1\leqslant 4$,所以 $g(x)=x+\frac{9}{x+1}=(x+1)+\frac{9}{x+1}-1\geqslant 2\sqrt{(x+1)\times\frac{9}{x+1}}-1=5$,当且仅当 $x+1=\frac{9}{x+1}$,即 $x=2$ 时等号成立,所以 $g(x)$ 的最小值为 5.

变式题 (1)AB [解析] 对于 A,$\because x>1$,$\therefore f(x)=2x+\frac{1}{x-1}=2(x-1)+\frac{1}{x-1}+2\geqslant 2\sqrt{2(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+2=2\sqrt{2}+2$,当且仅当 $2(x-1)=\frac{1}{x-1}$,即 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,故 A 正确;对于 B,$\because f(x)=x+\frac{1}{4x}=x+\frac{\frac{1}{4}}{x}$,$\therefore f(x)$ 在 $(2,4]$ 上单调递增,$\therefore \frac{17}{8}<f(x)\leqslant\frac{65}{16}$,故 B 正确;对于 C,$\because x>4$,$\therefore f(x)=\log_2 x+\log_x 2\geqslant 2\sqrt{\log_2 x\cdot\log_x 2}=2$,当且仅当 $\log_2 x=\log_x 2$,即 $x=2$ 时取等号,$\because x>4$,$\therefore$ 等号取不到,故 C 错误;对于 D,$\because xy=1$,$\therefore x,y$ 同号,当 x,y 同负时,显然 $x+y<0$,故 D 错误. 故选 AB.

(2)解:由题意得 $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$,令 $t=\sqrt{x^2+4}(t\geqslant 2)$,则 $y=t+\frac{1}{t}$,$\because$ 当 $t\geqslant 2$ 时,函数 $y=t+\frac{1}{t}$ 单调递增,$\therefore$ 当 $t=2$ 时,y 取得最小值,最小值为 $\frac{5}{2}$,$\therefore y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值是 $\frac{5}{2}$.

第 8 讲 函数的奇偶性、对称性

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. y 轴 原点

【对点演练】

1. ①③ [解析] 根据偶函数的定义,可知①③是偶函数.

2. (0,1) [解析] $f(x)=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$,函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向上平移一个单位长度得到 $y=1+\frac{1}{x}$ 的图象,又 $y=\frac{1}{x}$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称,所以 $f(x)=1+\frac{1}{x}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称.

3. $(-2,0)\cup(2,5]$ [解析] 由图象知,当 $0<x<2$ 时,$f(x)>0$,当 $2<x\leqslant 5$ 时,$f(x)<0$. 因为 $f(x)$ 是奇函数,所以当 $-2<x<0$ 时,$f(x)<0$,当 $-5\leqslant x<-2$ 时,$f(x)>0$. 综上,$f(x)<0$ 的解集是 $(-2,0)\cup(2,5]$.

4. 非奇非偶 [解析] 由 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ 1-x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $x=1$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{1\}$,因为函数 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称,所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

5. $x=a$ $(b,0)$ [解析] 因为 $y=f(x+a)$ 是偶函数,所以其图象关于 y 轴对称,将 $y=f(x+a)$ 的图象向左($a<0$)或向右($a>0$)平移 $|a|$ 个单位长度,得到函数 $y=f(x)$ 的图象,则 $y=f(x+a)$ 图象的对称轴平移至直线 $x=a$ 处,即函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称. 同理,函数 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(b,0)$ 对称.

6. $\begin{cases}x^2+x,x>0,\\ 0,x=0,\\ -x^2+x,x<0\end{cases}$ [解析] 当 $x<0$ 时,$-x>0$,所以 $f(x)=-f(-x)=-(-x)[(-x)+1]=-x^2+x$. 由奇函数的定义可知 $f(0)=0$,所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+x,x>0,\\ 0,x=0,\\ -x^2+x,x<0.\end{cases}$

● 课堂考点探究

例 1 B [解析] 对于 A,由 $x+1\neq 0$,得

$x\neq -1$,则 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq -1\}$,定义域不关于原点对称,故 $f(x)=\frac{x^2+x}{x+1}$ 为非奇非偶函数,A 不符合题意;对于 B,$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$,故 $f(x)$ 为偶函数,B 符合题意;对于 C,因为 $\sqrt{x^2+1}-x>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,所以 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=\log_2(\sqrt{x^2+1}+x)=\log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,C 不符合题意;对于 D,$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=2^{-x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-2^x=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,D 不符合题意.故选 B.

变式题 (1)ABC (2)BC [解析](1)对于 A,$f(x)=e^x-e^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=e^{-x}-e^x=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,故 A 正确;对于 B,$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,设 $x<0$,则 $-x>0$,所以 $f(-x)=-x^2-x$,则 $f(-x)=-f(x)$,同理当 $x>0$ 时,$f(-x)=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是奇函数,故 B 正确;对于 C,$f(x)=\tan x$ 为奇函数,故 C 正确;对于 D,$f(x)=x-\cos x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=-x-\cos x$,$f(-x)\neq f(x)$,$f(-x)\neq -f(x)$,所以函数 $f(x)=x-\cos x$ 既不是偶函数也不是奇函数,故 D 错误.故选 ABC.

(2)对于 A,设 $F(x)=f(x)g(x)$,则 $F(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-F(x)$,故 $F(x)$ 为奇函数,故 A 错误;对于 B,设 $m(x)=|f(x)|+g(x)$,则 $m(-x)=|f(-x)|+g(-x)=|f(x)|+g(x)=m(x)$,故 $m(x)$ 为偶函数,故 B 正确;对于 C,设 $n(x)=f(x)|g(x)|$,则 $n(-x)=f(-x)|g(-x)|=-f(x)|g(x)|=-n(x)$,故 $n(x)$ 为奇函数,故 C 正确;对于 D,设 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$,则 $\varphi(-x)=f(-x)-g(-x)=-f(x)-g(x)\neq\pm\varphi(x)$,故 $\varphi(x)$ 为非奇非偶函数,故 D 错误.故选 BC.

例 2 (1)B (2)$-2^{-x}-2x+1$

[解析](1)方法一:由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.令 $h(x)=\ln\frac{2x-1}{2x+1}$,则 $h(-x)=\ln\frac{-2x-1}{-2x+1}=\ln\frac{2x+1}{2x-1}=-h(x)$,所以 $h(x)$ 为奇函数.令 $g(x)=x+a$,由 $f(x)$ 为偶函数,$h(x)$ 为奇函数,可得 $g(x)$ 为奇函数,所以 $a=0$,故选 B.

方法二:由题知函数 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(1)=f(-1)$,故 $(1+a)\ln\frac{1}{3}=(-1+a)\ln 3$,解得 $a=0$,故选 B.

(2)∵$f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,∴$f(0)=1+m=0$,解得 $m=-1$,故当 $x\geq 0$ 时,$f(x)=2^x-2x-1$,当 $x<0$ 时,$-x>0$,故 $f(x)=-f(-x)=-[2^{-x}-2(-x)-1]=-2^{-x}-2x+1$.

变式题 (1)C (2)$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

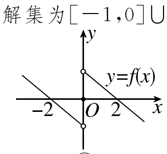
[解析](1)当 $x>0$ 时,$-x<0$,则 $f(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x$,因为函数 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)=-2^x$,$x>0$,即 $g(x)=-2^x$.故选 C.

(2)因为 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,$g(-x)=g(x)$,所以 $\begin{cases}f(x)+g(x)=e^x+x,\\ f(-x)+g(-x)=e^{-x}-x,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}f(x)+g(x)=e^x+x,\\ -f(x)+g(x)=e^{-x}-x,\end{cases}$ 解得 $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

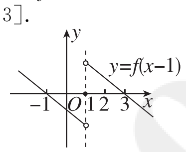
例 3 (1)B (2)$[-1,0]\cup[1,3]$

[解析](1)易知 $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=f\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$,显然 $\frac{1}{\sqrt{e}}>\frac{1}{2}>\frac{1}{\pi}$,因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{1}{\pi}\right)$,又 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$,$f\left(\frac{1}{\pi}\right)=f\left(-\frac{1}{\pi}\right)$,所以 $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)>f\left(-\frac{1}{2}\right)>f\left(-\frac{1}{\pi}\right)$.故选 B.

(2)方法一:由题意可得 $y=f(x)$ 的图象可如图①所示,∵$y=f(x-1)$ 的图象可由 $y=f(x)$ 的图象向右平移一个单位得到(如图②),∴满足 $xf(x-1)\geq 0$ 即满足 $f(x-1)$ 与 x 同号或二者至少有一个为零,由图可得不等式 $xf(x-1)\geq 0$ 的解集为 $[-1,0]\cup[1,3]$.



①



②

方法二:由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数,所以 $f(0)=0$,由 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减,且 $f(2)=0$ 可得 $f(-2)=0$,所以当 $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ 时,$f(x)>0$;当 $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ 时,$f(x)<0$.则对于函数 $f(x-1)$ 而言,当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,3)$ 时,$f(x-1)>0$;当 $x\in(-1,1)\cup(3,+\infty)$ 时,$f(x-1)<0$.又 $f(-1-1)=f(3-1)=f(1-1)=0$,所以满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围为 $[-1,0]\cup[1,3]$.

变式题 (1)$\{x\mid x<-4$ 或 $x>1\}$ (2)D

[解析](1)$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,∵$f(-x)=e^x-e^{-x}+x^3=-f(x)$,∴$f(x)$ 为奇函数,又 $f(x^2-4)+f(3x)<0$,∴$f(x^2-4)<-f(3x)=f(-3x)$,易知 $f(x)=e^{-x}-e^x-x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,∴$x^2-4>-3x$,解得 $x<-4$ 或 $x>1$,即所求解集为 $\{x\mid x<-4$ 或 $x>1\}$.

(2)由 $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$,且定义域关于原点对称,得 $f[f(x)]$ 是奇函数,由 $f[g(-x)]=f[g(x)]$,且定义域关于原点对称,得 $f[g(x)]$ 为偶函数,故 A,B 选项均错误.由题易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,由 $-1>-2$,得 $f(-1)<f(-2)$,从而 $f[f(-1)]>f[f(-2)]$,故 C 选项错误.由题易知函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,由 $0=f(0)<f(-1)<f(-2)$,得 $|-f(-1)|<f(-2)$,从而 $g[-f(-1)]>g[f(-2)]$,故 D 选项正确.故选 D.

例 4 14 [解析]令 $g(x)=f(x)-7=ax^3+3\sin x$,且 $x\in[-2024,2024]$,则 $g(-x)=a(-x)^3+3\sin(-x)=-ax^3-3\sin x=-g(x)$,所以 $g(x)$ 为奇函数且其图象在 $[-2024,2024]$ 上连续,根据奇函数图象的对称性得 $g(x)$ 在 $[-2024,2024]$ 上的最大值、最小值关于原点对称,则 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=M-7+m-7=0$,故 $M+m=14$.

变式题 (1)C (2)$\frac{\pi}{4}$ [解析](1)因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上的单调性与 $f(x)$ 在 $[3,7]$ 上的单调性相同,也单调递增,$f(x)$ 在 $[3,7]$ 上的最小值为 5,即 $f(3)=5$,所以 $f(x)$ 在区间 $[-7,-3]$ 上的最大值为 $f(-3)=-f(3)=-5$.故选 C.

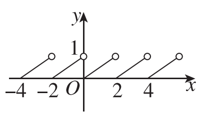
(2)设 $g(x)=\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,则 $g(-x)=\cos x\cdot\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$,$g(x)+g(-x)=\cos x\cdot\ln 1=0$,则 $g(x)$ 是奇函数,∴$g(x)$ 的最大值和最小值互为相反数,且 $f(x)$ 的最大值为 M,最小值为 m,∴$M+m=\frac{\pi}{2}$,则 $f(M+m)=\frac{\pi}{4}$.

例 5 证明:$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$ 的定义域为 $(0,2)$,设 $P(m,n)$ 为 $y=f(x)$ 图象上任意一点,$P(m,n)$ 关于 $(1,a)$ 的对称点为 $Q(2-m,2a-n)$,因为 $P(m,n)$ 在 $y=f(x)$ 的图象上,所以 $n=\ln\frac{m}{2-m}+am+b(m-1)^3$,

而 $f(2-m)=\ln\frac{2-m}{m}+a(2-m)+b(2-m-1)^3=-\left[\ln\frac{m}{2-m}+am+b(m-1)^3\right]+2a=-n+2a$,所以 $Q(2-m,2a-n)$ 也在 $y=f(x)$ 的图象上,所以 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,a)$ 中心对称.

变式题 (1)D (2)AC [解析](1)对于 A,$y=x^3$ 为奇函数,故 $y=x^3+1$ 的图象有对称中心 $(0,1)$;对于 B,$y=x+\frac{1}{x}$ 为奇函数,将其图象向右平移一个单位后得到 $y=x-1+\frac{1}{x-1}=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ 的图象,故有对称中心 $(1,0)$;对于 C,$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 为奇函数,其图象有对称中心 $(0,0)$;对于 D,$y=\left|x+\frac{1}{x}\right|$ 的图象不存在对称中心,故选 D.

(2)对于 A,∵$f(x)$ 是奇函数,∴$f(x)$ 的图象关于原点对称,而 $f(x-1)$ 的图象是将 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位得到的,∴$f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称,故 A 正确.



对于 B,由 $f(x+1)=f(x-1)$,得 $f(x)=f(x+2)$,其图象不一定关于直线 $x=1$ 对称,若 $f(x)$ 的图象如图所示,该函数满足 $f(x)=f(x+2)$,但函数图象不关于直线 $x=1$ 对称,故 B 不正确.对于 C,$g(x)=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,则有 $g(x+1)=g(-x+1)$,即 $f(x)=f(-x)$,即 $f(x)$ 为偶函数,故 C 正确.对于 D,函数 $y=f(x+1)$ 的图象与函数 $y=f(1-x)$ 的图象关于 y 轴对称,故 D 不正确.故选 AC.

第 9 讲 函数性质的综合应用

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

(1)非零常数 每一个 x

$f(x+T)=f(x)$ 非零常数

(2)最小的正数 最小的正数

【对点演练】

1. 8 [解析]因为 $f(x+3)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是以 3 为周期的周期函数,所以 $f(2024)=f(674\times 3+2)=f(2)=8$.
2. 5 [解析]∵$f(x)$ 为偶函数,∴$f(-1)=f(1)$,又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,∴$f(1)=f(3)=2\times 3-1=5$,∴$f(-1)=5$.
3. 4 [解析]由 $f(1-x)=f(x+1)$ 且 $f(x)$ 是奇函数,得 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,所以 $f(x)$ 的周期为 4.
4. $f(x)=(x+1)^2+1$(答案不唯一)

[解析]由 $y=f(2x-1)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数可得 $f(-2x-1)=f(2x-1)$,所以

$f(-x-1)=f(x-1)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，又 $f(0)=2$，所以满足条件的一个函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=(x+1)^2+1$.

● **课堂考点探究**

例1 (1)$\frac{13}{2}$ (2)$f(x)=\log_2(5-x),x\in[2,4]$ [解析](1)$\because f(x)f(x+2)=13$，$\therefore f(x+2)=\frac{13}{f(x)}$，$\therefore f(x+4)=\frac{13}{f(x+2)}=\frac{13}{\frac{13}{f(x)}}=f(x)$，$\therefore f(x)$ 的周期为 4，$\therefore f(2025)=f(1)=\frac{13}{f(3)}=\frac{13}{2}$.

(2)根据题意，设 $x\in[2,4]$，则 $x-4\in[-2,0]$，则有 $4-x\in[0,2]$，又当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$，所以 $f(4-x)=\log_2[(4-x)+1]=\log_2(5-x)$，又 $f(x)$ 是周期为 4 的偶函数，所以 $f(x)=f(x-4)=f(4-x)=\log_2(5-x),x\in[2,4]$，即 $f(x)=\log_2(5-x),x\in[2,4]$.

变式题 (1)D (2)AB [解析](1)因为 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 6，所以 $f(2024)=f(337\times6+2)=f(2)=f(-1+3)=-f(-1)=-2^{-1}=-\frac{1}{2}$，故选 D.

(2)对于 A，$f(2027)=f(507\times4-1)=f(-1)=f(1)=0$，所以 A 正确；对于 B，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2^x-2$ 单调递增，所以当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $[-1,2]$，由函数 $f(x)$ 是偶函数，可得 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的取值范围也为 $[-1,2]$，又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,2]$，所以 B 正确；对于 C，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2^x-2$ 单调递增，又 $f(x)$ 的周期是 4，所以 $f(x)$ 在 $[4,6]$ 上也单调递增，所以 C 错误；对于 D，当 $x\in[0,2]$ 时，令 $f(x)=2^x-2=0$，得 $x=1$，所以 $f(1)=f(-1)=0$，又 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(5)=f(-5)=0$，$f(3)=f(-3)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[-6,6]$ 上有 6 个零点，所以 D 错误，故选 AB.

例2 (1)C (2)C [解析](1)将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度，得到函数 $f(x-1)$ 的图象，因为函数 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$ 对称，则 $f(x)$ 为偶函数. 因为 $f(x+4)=-f(x)+4$，所以 $f(x+8)=-f(x+4)+4=-[-f(x)+4]+4=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 8 为一个周期的偶函数，所以 $f(4050)=f(8\times506+2)=f(2)$. 由 $f(2)=f(-2+4)=-f(-2)+4=-f(2)+4$，得 $f(2)=2$，所以 $f(4050)=2$. 故选 C.

(2)$\because f(2x+1)$ 为偶函数，$\therefore f(-2x+1)=f(2x+1)$，$\therefore f(-x+1)=f(x+1)$，$\therefore f(-x)=f(x+2)$，$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. $\because f(x)$ 的图象关于点 $(2,3)$ 中心对称，$\therefore f(-x)+f(x+4)=6$，令 $x=-2$，得 $f(2)+f(2)=6$，$\therefore f(2)=3$. 又 $f(-x)=f(x+2)$，$\therefore f(x+2)+f(x+4)=6$，$\therefore f(x)+f(x+2)=6$，以上两式相减可得 $f(x+4)-f(x)=0$，即 $f(x+4)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 的周期为 4. 将 $x=1$ 代入 $f(x)+f(x+2)=6$，可得 $f(1)+f(3)=6$，又 $f(4)=f(0)=f(1-1)=f(1+1)=3$，$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=12$，$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(23)=5\times12+f(1)+f(2)+f(3)=60+6+3=69$. 故选 C.

变式题 (1)ABC (2)C [解析](1)对于 A，因为 $f(1-2x)$ 为偶函数，所以 $f(1-2x)=f(1+2x)$，则曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，故 A 正确；对于 B，因为曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(2-x)$，又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)=-f(-x)$，则 $f(2-x)=-f(-x)$，可得 $f(2+x)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $f(x)$ 的周期为 4，故 B 正确；对于 C，因为 $f(1)=3$，且 $f(0)=0$，$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2)=0$，$f(3)=f(-1)=-f(1)=-3$，$f(4)=f(0)=0$，则 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2025)=506[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)=506\times(3+0-3+0)+3=3$，故 C 正确；对于 D，由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，得 $f(-x)=f(2+x)$，又 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2+x)=f(6+x)$. 所以 $f(-x)=f(6+x)$，则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称，D 错误. 故选 ABC.

(2)由题可知 $f(x)=f(2-x)$，且 $f(2-x)+f(2+x)=0$，所以 $f(x)=-f(2+x)$，所以 $f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 对于 $f(2-x)+f(2+x)=0$，令 $x=0$，得 $f(2)+f(2)=0$，故 $f(2)=0$，则 $f(0)=f(2)=0$，$f(4)=f(0)=0$，所以 $f(2)=f(4)=f(6)=\cdots=f(2022)=0$，所以 $g(2)=g(4)=g(6)=\cdots=g(2022)=0$. 由 $g(23)=44$，得 $22f(23)=22f(3)=-22f(1)=44$，所以 $f(1)=-2$，则 $f(3)=2$，所以 $g(1)+g(3)=0+2f(3)=4$，$g(5)+g(7)=4f(5)+6f(7)=4f(1)+6f(3)=4$，…，$g(2021)+g(2023)=2020f(2021)+2022f(2023)=2020f(1)+2022f(3)=4$，所以 $\sum_{i=1}^{2023}g(i)=[g(2)+g(4)+g(6)+\cdots+g(2022)]+[g(1)+g(3)]+[g(5)+g(7)]+\cdots+[g(2021)+g(2023)]=4\times506=2024$. 故选 C.

例3 D [解析]由 $f(x)+g(2-x)=5$ 得 $f(x)=5-g(2-x)$①. 由 $g(x)-f(x-4)=7$ 得 $f(x-4)=g(x)-7$，所以 $f(x)=g(x+4)-7$②. 由①②得 $5-g(2-x)=g(x+4)-7$，即 $g(x+4)+g(2-x)=12$，所以 $y=g(x)$ 的图象关于点 $(3,6)$ 对称，$g(3)=6$，又 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以函数 $g(x)$ 是周期为 4 的函数，且 $g(1)=g(3)=6$，$f(x)=g(x)-7$. 因为 $g(4)+g(2)=12$，所以 $g(4)=12-g(2)=12-4=8$，所以 $f(1)=g(1)-7=-1$，$f(2)=g(2)-7=-3$，$f(3)=g(3)-7=-1$，$f(4)=g(4)-7=1$，所以 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(22)=5\times(-4)+(-1)+(-3)=-24$. 故选 D.

变式题 C [解析]因为函数 $y=f(2x+1)$ 为偶函数，所以 $f(-2x+1)=f(2x+1)$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 令 $h(x)=2^{1-x}+2^{x-1}-5$，则 $h(2-x)=2^{x-1}+2^{1-x}-5=h(x)$，可得函数 $h(x)=2^{1-x}+2^{x-1}-5$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以函数 $g(x)=f(x)+2^{1-x}+2^{x-1}-5$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则函数 $g(x)$ 的零点关于直线 $x=1$ 对称. 若 $g(x)$ 的零点个数为奇数，则 $g(1)=f(1)+1+1-5=0$，所以 $f(1)=3$. 故选 C.

例4 ABD [解析]由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，取 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$，取 $y=-x$，则有 $f(x-x)=f(0)=f(x)+f(-x)=0$，所以函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 由 $f(x+2)=-f(x)$，得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，因此函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，故 A 正确；$f(x+2)=-f(x)=f(-x)$，因此 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 B 正确；因为 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增，于是得 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减，故 C 错误；由 $f(x+2)=-f(x)$，得 $f(2)=-f(0)=0=f(0)$，故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 AC [解析]由 $f(1+x)=f(1-x)$，可得 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=1$，所以 $f(0)=f(2)$，又由 $f(1+x)=f(1-x)$，可知 $f(2+x)=f(-x)$. 因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，即 $f(2+x)=-f(2-x)$，所以 $f(4+x)=-f(-x)$，所以 $-f(2+x)=f(4+x)$，即 $-f(x)=f(2+x)$，所以 $f(x)=f(x+4)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(-2)=f(2)$，所以 $f(0)=f(-2)$，故 A 正确，B 错误. 因为 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增，且 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(x)$ 在 $(3,4]$ 上单调递增，又 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $(1,2]$ 上单调递减，则函数 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递减，故 C 正确. 根据 $f(x)$ 的周期为 4，可得 $f(2021)=f(1)$，$f(2022)=f(2)$，$f(2023)=f(3)$，因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2)=f(0)$ 且 $f(3)=f(-1)$，即 $f(2021)=f(1)$，$f(2022)=f(0)$，$f(2023)=f(-1)$，由 C 选项的分析可知，函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增，在 $(-1,0]$ 上单调递增，而 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 的大小关系不能确定，若 $f(-1)=f(1)=0$，则 $f(2021)>f(2022)>f(2023)$ 不成立，故 D 错误. 故选 AC.

增分微课 2 抽象函数

例1 D [解析]由 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，取 $y=x$，得 $f(2x)=[f(x)]^2$，又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$，所以 $f(4)=[f(2)]^2=[f(1)]^4=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^8=2^8=256$. 故选 D.

变式题 D [解析]令 $a=b=0$，得 $f(0)=2f(0)$，所以 $f(0)=0$；令 $a=1,b=-1$，得 $f(0)=f(1)+f(-1)+1=0$，又 $f(-1)=3$，所以 $f(1)=-4$；令 $a=b=1$，得 $f(2)=f(1)+f(1)-1=-9$；令 $a=1,b=2$，得 $f(3)=f(1)+f(2)-2=-15$. 故选 D.

例2 解：(1)证明：令 $x_1=x_2=1$，得 $f(1)=2f(1)$，$\therefore f(1)=0$. 令 $x_1=x_2=-1$，得 $f(1)=f(-1)+f(-1)=0$，

$\therefore f(-1)=0$，$\therefore f(-x)=f(-1\cdot x)=f(-1)+f(x)=f(x)$. $\therefore f(x)$ 是偶函数.

(2)证明：设 $x_2>x_1>0$，则 $f(x_2)-f(x_1)=f\left(x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\right)-f(x_1)=f(x_1)+f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-f(x_1)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$，

$\because x_2>x_1>0$，$\therefore \frac{x_2}{x_1}>1$，$\therefore f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$，

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，$\therefore f(x_2)>f(x_1)$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(3)$\because f(2)=1$，$\therefore f(4)=f(2)+f(2)=2$. $\because f(x)$ 是偶函数，$\therefore$ 不等式 $f(2x^2-1)<2$ 可化为 $f(|2x^2-1|)<f(4)$，

又函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore |2x^2-1|<4$，解得 $-\frac{\sqrt{10}}{2}<x<\frac{\sqrt{10}}{2}$，又 $2x^2-1\neq0$，解得 $x\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

变式题 (1)ABC (2)ABC [解析](1)令 $x=y=0$，可得 $f(0)=0$，故 A 正确；令 $x=y=1$，可得 $f(1)=f(1)+f(1)$，即 $f(1)=0$，故 B 正确；令 $x=y=-1$，则 $f(1)=f(-1)+f(-1)$，可得 $f(-1)=0$，令 $x=-1,y=x$，可得 $f[(-1)\times x]=x^2\times f(-1)+(-1)^2\times f(x)$，即 $f(-x)=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数，故 C 正确；设函数 $f(x)=0$，此时满足 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，但函数 $f(x)$ 没有极值点，故 D 错误. 故选 ABC.

(2)由 $f(x+y)=f(x)+f(y)-2$，令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)-2$，得

$f(0)=2$，故 A 正确；令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)+f(-x)-2$，即 $f(x)+f(-x)=4$，故 B 正确；令 $x=2024$，$y=-2024$，则 $f(0)=f(2024)+f(-2024)-2$，即 $f(2024)+f(-2024)=4$，故 C 正确；对任意 $y\in\mathbf{R}$，$x>0$，设 $z=x+y>y$，因为当 $x>0$ 时，$f(x)>2$，所以 $f(z)-f(y)=f(x)-2>0$，即 $f(z)>f(y)$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，故 D 错误．故选 ABC．

例 3 A ［解析］方法一：令 $x=1$，$y=0$，得 $2f(1)=f(1)f(0)$，所以 $f(0)=2$．令 $y=1$，得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)$，所以 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$，即 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，所以 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，所以 $f(x+2)=-f(x-1)$，即 $f(x+3)=-f(x)$，所以 $f(x)=-f(x+3)=f(x+6)$，即 $f(x)$ 是周期为 6 的周期函数．因为 $f(0)=2$，$f(1)=1$，$f(2)=f(1)-f(0)=-1$，$f(3)=-f(0)=-2$，$f(4)=-f(1)=-1$，$f(5)=-f(2)=1$，$f(6)=f(0)=2$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=[f(1)+f(2)+\cdots+f(18)]+[f(19)+f(20)+f(21)+f(22)]=f(19)+f(20)+f(21)+f(22)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3$．

方法二：由 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，联想到余弦函数和差化积公式 $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$．设 $f(x)=a\cos\omega x$，则由方法一中 $f(0)=2$，$f(1)=1$ 知 $a=2$，$2\cos\omega=1$，解得 $\cos\omega=\dfrac{1}{2}$，不妨取 $\omega=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\cos\dfrac{\pi}{3}x$，则 $f(x+y)+f(x-y)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{3}y\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x-\dfrac{\pi}{3}y\right)=4\cos\dfrac{\pi}{3}x\cos\dfrac{\pi}{3}y=f(x)f(y)$，所以 $f(x)=2\cos\dfrac{\pi}{3}x$ 符合条件，因此 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$，且 $f(2)=-1$，$f(3)=-2$，$f(4)=-1$，$f(5)=1$，$f(6)=2$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$．故选 A．

变式题 B ［解析］由题得 $f(x+y)+f(x-y)=\dfrac{1}{2}f(x)f(y)$，令 $x=y=0$，有 $2f(0)=\dfrac{1}{2}[f(0)]^2$，则 $f(0)=0$ 或 $f(0)=4$．若 $f(0)=0$，则令 $x=1$，$y=0$，有 $2f(1)=\dfrac{1}{2}f(1)f(0)$，得 $f(1)=0$，与已知 $f(1)=2\sqrt{3}$ 矛盾，所以 $f(0)=4$．令 $x=y=1$，有 $f(2)+f(0)=\dfrac{1}{2}[f(1)]^2$，则 $f(2)+4=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2=6$，得 $f(2)=2$．令 $x=2$，$y=1$，有 $f(3)+f(1)=\dfrac{1}{2}f(2)f(1)$，得 $f(3)=0$．令 $x=3$，$y=2$，有 $f(5)+f(1)=\dfrac{1}{2}f(3)f(2)$，得 $f(5)=-2\sqrt{3}$．令 $x=5$，$y=2$，有 $f(7)+f(3)=\dfrac{1}{2}f(5)f(2)$，得 $f(7)=-2\sqrt{3}$．令 $x=7$，$y=2$，有 $f(9)+f(5)=\dfrac{1}{2}f(7)f(2)$，得 $f(9)=0$．令 $x=9$，$y=2$，有 $f(11)+f(7)=\dfrac{1}{2}f(9)f(2)$，得 $f(11)=2\sqrt{3}$．令 $x=0$，有 $f(y)+f(-y)=\dfrac{1}{2}f(0)f(y)$，得 $f(-y)=f(y)$．令 $x=3$，有 $f(3+y)+f(3-y)=\dfrac{1}{2}f(3)f(y)=0$，即 $f(3+y)=-f(3-y)$，所以 $f(6+y)=-f(-y)=-f(y)$，故 $f(12+y)=-f(6+y)=f(y)$，所以 $f(x)$ 的周期为 12，所以 $f(2025)=f(12\times168+9)=f(9)=0$．故选 B．

例 4 B ［解析］因为 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，所以 $f(3)>f(2)+f(1)=3$，$f(4)>f(3)+f(2)>5$，$f(5)>f(4)+f(3)>8$，$f(6)>5+8=13$，$f(7)>8+13=21$，$f(8)>13+21=34$，$f(9)>21+34=55$，$f(10)>34+55=89$，…，$f(20)>10\,946$．故选 B．

变式题 BC ［解析］令 $x=y=0$，则有 $f(0)=f(0)+f(0)+0$，即 $f(0)=0$，令 $y=1$，则有 $f(x+1)=f(x)+f(1)+x=f(x)+x$，所以 $f(2)=f(1)+1=1\neq0=-f(0)$，所以函数 $f(x)$ 的图象不关于点 $(1,0)$ 对称，故 A 错误，B 正确；由上知 $f(x+1)=f(x)+x$，即 $f(x+1)-f(x)=x$，则 $f(2024)=f(2024)-f(2023)+f(2023)-f(2022)+\cdots+f(2)-f(1)+f(1)=2023+2022+\cdots+1+0=\dfrac{(2023+1)\times2023}{2}=1012\times2023$，故 C 正确；因为 $f(x+1)=f(x)+x$，则 $f'(x+1)=f'(x)+1$，即 $f'(x+1)-f'(x)=1$，令 $a_n=f'(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，则有 $a_{n+1}-a_n=1$，又 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其首项为 $\dfrac{1}{2}$，公差为 1，所以 $a_n=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times1=n-\dfrac{1}{2}$，即 $f'(n)=n-\dfrac{1}{2}$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2024}f'(k)=\dfrac{\left(\frac{1}{2}+2024-\frac{1}{2}\right)\times2024}{2}=1012\times2024$，故 D 错误．故选 BC．

第 10 讲　二次函数与幂函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $\left[\dfrac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$　$\left(-\infty,\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right]$　$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$　$\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$　$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$　$b=0$

2. (2) $\{x|x\geqslant0\}$　$\{x|x\neq0\}$　$\{y|y\geqslant0\}$　$\{y|y\geqslant0\}$　$\{y|y\neq0\}$　奇　偶　奇　非奇非偶　奇　$(-\infty,0]$　$[0,+\infty)$　$[0,+\infty)$　$(-\infty,0)$　$(0,+\infty)$　$(1,1)$

【对点演练】

1. $x^{\frac{1}{2}}$　［解析］设 $f(x)=x^\alpha$，则 $\sqrt{2}=2^\alpha$，解得 $\alpha=\dfrac{1}{2}$，故函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$．

2. -1　［解析］由 $f(x)=x^\alpha$ 为奇函数，知 α 从 -1，1，3 中取，又 $f(x)=x^\alpha$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，∴$\alpha<0$，∴$\alpha=-1$．

3. 6　［解析］∵函数 $y=x^2+(a+2)x+3$，$x\in[a,b]$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，∴$-\dfrac{a+2}{2}=1$ 且 $\dfrac{a+b}{2}=1$，∴$a=-4$，$b=6$．

4. ③　［解析］由题意可知，函数图象的开口向下，对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}$，且 $-\dfrac{b}{2a}>0$，函数图象过原点，故填③．

5. $m\leqslant-\dfrac{1}{6}$　［解析］当 $m=0$ 时，函数 $y=x+2$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意；当 $m\neq0$ 时，函数 $y=mx^2+x+2$ 的图象的对称轴为直线 $x=-\dfrac{1}{2m}$，依题意知 $\begin{cases}m<0,\\-\dfrac{1}{2m}\leqslant3,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant-\dfrac{1}{6}$．

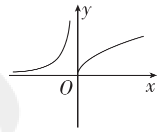
6. $(3,5)$　［解析］幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上单调递减，由 $f(a+1)<f(10-2a)$，得 $\begin{cases}a+1>0,\\10-2a>0,\\a+1>10-2a,\end{cases}$ 解得 $3<a<5$．

● 课堂考点探究

例 1 (1)B　(2)C　［解析］(1)作出直线 $x=2$，可知当 $x=2$ 时，$2^a<2^d<2^c<2^b$，则 $a<d<c<b$，故选 B．

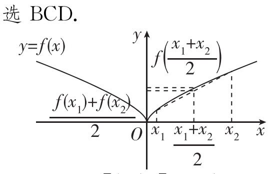
(2)因为 $f(x)=(m^2-6m+9)x^{m^2-3m-2}$ 是幂函数，所以 $m^2-6m+9=1$，解得 $m=2$ 或 $m=4$．当 $m=2$ 时，$f(x)=x^{-4}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不满足题意；当 $m=4$ 时，$f(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，满足题意．故选 C．

变式题 (1)C　(2)BCD



［解析］(1)由题意可得，当 $x<0$ 时，易知 $f(x)=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；当 $x\geqslant0$ 时，易知 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增．故函数 $f(x)=\begin{cases}x^{-2},x<0,\\x^{\frac{1}{2}},x\geqslant0\end{cases}$ 的图象如图所示，要得到 $y=-f(x)$ 的图象，只需将 $y=f(x)$ 在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方(点 $(0,0)$ 保持不变)即可．故选 C．

(2)设幂函数 $f(x)=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$，函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(8,4)$，则 $8^\alpha=4$，即 $2^{3\alpha}=2^2$，解得 $\alpha=\dfrac{2}{3}$，所以 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，即 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$，因为 $f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数，故 B 正确；当 $x>0$ 时，随着 x 的增大，x^2 增大，$\sqrt[3]{x^2}$ 也增大，所以 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增，又 $f(x)$ 为偶函数，所以当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递减，故 A 错误；当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递增，又 $f(1)=1$，所以当 $x>1$ 时，$f(x)>1$，故 C 正确；画出函数 $f(x)$ 的大致图象如图，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 为以点 $(x_1,f(x_1))$ 与点 $(x_2,f(x_2))$ 为端点的线段中点的纵坐标，$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 为当 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时的函数值，当 $0<x_1<x_2$ 时，观察图象可知 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，故 D 正确．故选 BCD．



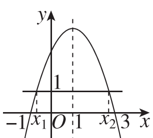
例 2 x^2-4x+3　［解析］因为 $f(2-x)=f(2+x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，又 $f(x)$ 的图象截 x 轴所得线段的长度为 2，所以 $f(x)=0$ 的两个根分别为 $2-1=1$ 和 $2+1=3$，所以二次函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的两个交点的坐标分别为 $(1,0)$ 和 $(3,0)$，因此设 $f(x)=a(x-1)(x-3)$．因为点 $(4,3)$ 在 $f(x)$ 的图象上，所以 $3a=3$，解得 $a=1$，故 $f(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$．

变式题 $f(x)=x^2-6x+6$　［解析］设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，∵$f(x)$ 的图象过点 $(0,6)$，∴$c=6$．又 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=3$，∴$-\dfrac{b}{2a}=3$，即 $b=$

$-6a$，∴$f(x)=ax^2-6ax+6(a\neq0)$. 设方程 $ax^2-6ax+6=0(a\neq0)$的两个实根为 x_1,x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{-6a}{a}=6$，$x_1x_2=\frac{6}{a}$，∴$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=36-\frac{12}{a}$，由题意知 $36-\frac{12}{a}=24$，解得 $a=1$，则 $b=-6$，∴$f(x)=x^2-6x+6$.

例 3 A [解析] 令 $f(x)=ax^2+bx+c$，由题意可得二次函数 $f(x)$的图象的开口向下，所以 $a<0$，因为 $f(1)>0$，所以 $a+b+c>0$，故①正确；因为 $f(-1)<0$，所以 $a-b+c<0$，故②正确；因为 $f(0)>0$，所以 $c>0$，又图象的对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2a}>0$，所以 $b>0$，所以 $abc<0$，故③错误；因为 $f(x)$的图象与 x 轴有 2 个不同交点，所以 $\Delta=b^2-4ac>0$，即 $b^2>4ac$，故④正确；因为 $1<-\frac{b}{2a}<2$，所以 $-4<\frac{b}{a}<-2$，故⑤错误. 故选 A.

变式题 CD [解析] 对于选项 A，∵图象的开口向下，∴$a<0$，∵图象的对称轴在 y 轴的右侧，∴$-\frac{b}{2a}>0$，则 $b>0$，又 $f(0)>0$，∴$c>0$，∴$abc<0$，A 错误. 对于选项 B，∵图象的顶点坐标为 $(1,-4a)$，∴$-\frac{b}{2a}=1$，$\frac{4ac-b^2}{4a}=-4a$，∴$b=-2a$，$c=-3a$，∴$4a+2b+c=4a-4a-3a=-3a>0$，B 错误. 对于选项 C，由以上分析知，$f(x)=ax^2-2ax-3a$，即 $f(x)=a(x+1)(x-3)$，可得 $f(x)$的图象与 x 轴的交点为 $(-1,0)$，$(3,0)$. 因为方程 $a(x+1)(x-3)=1$ 有两个根 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，所以 x_1,x_2 分别是 $f(x)$的图象与直线 $y=1$ 的左、右交点的横坐标，在函数 $f(x)$的图象上作出直线 $y=1$，如图所示，由图可知 $-1<x_1<x_2<3$，C 正确. 对于选项 D，方程 $|ax^2+bx+c|=m$ 有四个根，则方程 $ax^2+bx+c=m$ 与 $ax^2+bx+c=-m$ 各有两根. 设方程 $ax^2+bx+c=m$ 的两根为 x_1 和 x_2，则 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，可得 $x_1+x_2=2$，设方程 $ax^2+bx+c=-m$ 的两根为 x_3 和 x_4，则 $\frac{x_3+x_4}{2}=1$，可得 $x_3+x_4=2$，所以这四个根的和为 4，D 正确. 故选 CD.



例 4 解：(1)若 $a=2$，则 $f(x)=4x^2-8x+2=4(x-1)^2-2$，$f(x)$图象的对称轴方程为 $x=1$，所以函数 $f(x)$在区间$(-1,1)$上单调递减，在区间$(1,2)$上单调递增，所以 $f(x)$在区间$(-1,2)$上的最小值为 $f(1)=-2$，
又 $f(-1)=14$，$f(2)=2$，
所以 $f(x)$在区间$(-1,2)$上的取值范围为$[-2,14)$.

(2)$f(x)=4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-2a+2$，其图象的对称轴方程为 $x=\frac{a}{2}$.

①当 $\frac{a}{2}\leqslant0$，即 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$在$[0,2]$上单调递增，∴$f(x)$在$[0,2]$上的最小值为 $f(0)=a^2-2a+2$，由 $a^2-2a+2=3$，解得 $a=1\pm\sqrt2$，∵$a\leqslant0$，∴$a=1-\sqrt2$.

②当 $0<\frac{a}{2}<2$，即 $0<a<4$ 时，$f(x)$在$[0,2]$上的最小值为 $f\left(\frac{a}{2}\right)=-2a+2$，由 $-2a+2=3$，解得 $a=-\frac12\notin(0,4)$，舍去.

③当 $\frac{a}{2}\geqslant2$，即 $a\geqslant4$ 时，函数 $f(x)$在$[0,2]$上单调递减，∴$f(x)$在$[0,2]$上的最小值为 $f(2)=a^2-10a+18$，由 $a^2-10a+18=3$，解得 $a=5\pm\sqrt{10}$，∵$a\geqslant4$，∴$a=5+\sqrt{10}$. 综上所述，$a=1-\sqrt2$ 或 $a=5+\sqrt{10}$.

变式题 (1)D (2)$[1,\sqrt2]$ [解析] (1)观察图象可知，图象具有对称性，对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，故 A 中结论正确；令 $|x^2-2x-3|=0$ 可得 $x^2-2x-3=0$，即 $(x+1)(x-3)=0$，∴$x_1=-1$，$x_2=3$，∴$(-1,0)$和$(3,0)$是函数图象与 x 轴的交点坐标，又图象的对称轴是直线 $x=1$，∴当 $x\geqslant3$ 时，函数值 y 随 x 值的增大而增大，故 B 中结论正确；由图象可知点$(-1,0)$和$(3,0)$是函数图象的最低点，则当 $x=-1$ 或 $x=3$ 时，函数取得最小值 0，故 C 中结论正确；当 $x=4$ 时，$y=5>4$，故 D 中结论错误. 故选 D.

(2)函数 $f(x)=x^2-2tx$ 图象的对称轴为直线 $x=t$，因为函数 $f(x)=x^2-2tx$ 在$(-\infty,1]$上单调递减，所以 $t\geqslant1$，故要使对任意的 $x_1,x_2\in[0,t+1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant2$，只需 $f(0)-f(t)\leqslant2$，即 $0-(t^2-2t^2)\leqslant2$，解得 $-\sqrt2\leqslant t\leqslant\sqrt2$，又 $t\geqslant1$，所以 $1\leqslant t\leqslant\sqrt2$.

第 11 讲　指数与指数函数

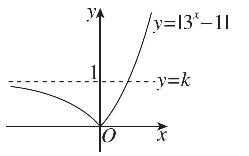
● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. (1)x　(2)根式　(3)a　a
2. $\sqrt[n]{a^m}$　$\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$　0
3. ①a^{r+s}　②a^{rs}　③a^rb^r
4. $(0,+\infty)$　$(0,1)$　$y>1$　$0<y<1$　$0<y<1$　$y>1$　增函数　减函数

【对点演练】

1. $-6a$ [解析] $4a^{\frac23}b^{-\frac13}\div\left(-\frac23a^{-\frac13}b^{-\frac13}\right)=4\times\left(-\frac32\right)a^{\frac23+\frac13}b^{-\frac13+\frac13}=-6a$.
2. 7　47 [解析] 由 $a^{\frac12}+a^{-\frac12}=3$，得 $\left(a^{\frac12}+a^{-\frac12}\right)^2=9$，即 $a+a^{-1}+2=9$，因此 $a+a^{-1}=7$，所以$(a+a^{-1})^2=49$，即 $a^2+a^{-2}+2=49$，于是 $a^2+a^{-2}=47$.
3. $(1,3)$ [解析] 令 $x-1=0$，得 $x=1$，此时 $y=a^0+2=3$，所以函数 $y=a^{x-1}+2$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象恒过定点$(1,3)$.
4. $2\sqrt2$ [解析] $\sqrt[3]{(1+\sqrt2)^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt2)^4}=1+\sqrt2+|1-\sqrt2|=2\sqrt2$.
5. 2 [解析] 由指数函数的定义可得 $\begin{cases}a^2-3=1,\\a>0,\\a\neq1,\end{cases}$ 解得$a=2$.
6. 2 或$\frac12$ [解析] 若 $a>1$，则 $f(x)$在$[-1,1]$上单调递增，所以 $f(1)=a=2$；若 $0<a<1$，则 $f(x)$在$[-1,1]$上单调递减，所以 $f(-1)=a^{-1}=2$，解得 $a=\frac12$. 故 a 的值为 2 或$\frac12$.
7. $(0,1)$ [解析] 函数 $y=|3^x-1|$ 的图象是由函数 $y=3^x$ 的图象向下平移一个单位长度后，再把位于 x 轴下方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴上方得到的，如图所示. 易知当 $0<k<1$ 时，直线 $y=k$ 与函数 $y=|3^x-1|$ 的图象有两个不同的交点，即关于 x 的方程有两个解.



● **课堂考点探究**

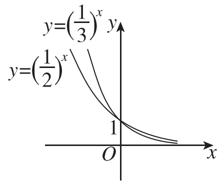
探究点一

1. 1 [解析] $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac14}+\frac{8^{\frac23}}{\sqrt{(-3)^2}}-2\times(\sqrt6-2)^{-1}+\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^0+36^{\frac14}=\left[\left(\frac32\right)^4\right]^{-\frac14}+\frac{(2^3)^{\frac23}}{3}-2\times\frac{\sqrt6+2}{2}+1+(6^2)^{\frac14}=\frac23+\frac43-(\sqrt6+2)+1+\sqrt6=1$.
2. $\frac13$ [解析] 由 $x^{\frac12}+x^{-\frac12}=3$，两边平方，得 $x+x^{-1}=7$，两边再平方得 $x^2+x^{-2}=47$，∴$x^2+x^{-2}-2=45$. 又 $x^{\frac32}+x^{-\frac32}=(x^{\frac12})^3+(x^{-\frac12})^3=(x^{\frac12}+x^{-\frac12})(x-1+x^{-1})=3\times(7-1)=18$，∴$\frac{x^{\frac32}+x^{-\frac32}-3}{x^2+x^{-2}-2}=\frac13$.
3. ABD [解析] 对于 A 选项，由 $\pi-3>0$，得 $\sqrt[4]{(\pi-3)^4}=\pi-3$，A 选项正确；对于 B 选项，$\sqrt{\frac{a^3}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a^6}}}=\left[a^3b^{-1}(b^2a^{-6})^{\frac12}\right]^{\frac12}=a^0b^0=1$，B 选项正确；对于 C 选项，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$，C 选项错误；对于 D 选项，$(a^{\frac23}b^{\frac12})(-3a^{\frac12}b^{\frac13})\div\left(\frac13a^{\frac16}b^{\frac56}\right)=-9a^{\frac23+\frac12-\frac16}b^{\frac12+\frac13-\frac56}=-9a$. D 选项正确. 故选 ABD.

例 1 (1)C (2)ABD [解析] (1)$f(x)=\frac{xa^x}{|x|}=\begin{cases}a^x,x>0,\\-a^x,x<0,\end{cases}$又 $a>1$，所以根据指数函数的性质知，当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=a^x$ 单调递增，排除 B,D；当 $x<0$ 时，函数 $f(x)=-a^x$ 单调递减，排除 A. 故选 C.

(2)由图象可知，函数 $y=a^x-b(a>0$ 且 $a\neq1)$在 **R** 上单调递增，所以 $a>1$，且当 $x=0$ 时，$y=1-b\in(0,1)$，可得 $0<b<1$. 对于 A 选项，$a^b>a^0=1$，故 A 正确；对于 B 选项，$a+b>a>1$，故 B 正确；对于 C 选项，$b^a<b^0=1$，故 C 错误；对于 D 选项，因为 $0<b<1<a$，所以 $b-a<0$，所以 $2^{b-a}<2^0=1$，故 D 正确. 故选 ABD.

变式题 (1)CD (2)1 [解析] (1)在同一坐标系中作出函数 $y=\left(\frac12\right)^x$ 和 $y=\left(\frac13\right)^x$ 的大致图象，如图所示. 设$\left(\frac12\right)^a=\left(\frac13\right)^b=m$，$m>0$. 当 $m>1$ 时，由图可知 $a<b<0$；当 $m=1$ 时，由图可知 $a=b=0$；当 $0<m<1$ 时，由图可知 $a>b>0$. 故选 CD.



(2)依题意得$\begin{cases}-2+m=0,\\1+n=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=1,\end{cases}$于是 $m-n=1$.

例 2 (1)D (2)D [解析] (1)由 $a=3^{\frac23}=9^{\frac13}$，$b=2^{\frac34}=8^{\frac14}$，$c=4^{\frac13}$，可得 $b=8^{\frac14}<8^{\frac13}<9^{\frac13}=a$，$c<a$. 又 $b=2^{\frac34}$，$c=4^{\frac13}=$

$2^{\frac{2}{3}}$，而 $2^{\frac{3}{4}}>2^{\frac{2}{3}}$，所以 $c<b$，所以 $c<b<a$. 故选 D.
(2)∵ $e^a+\pi^b\geq e^{-b}+\pi^{-a}$，∴ $e^a-\pi^{-a}\geq e^{-b}-\pi^{b}$(*). 令 $f(x)=e^x-\pi^{-x}$，易知 $f(x)$ 是 **R** 上的增函数，则(*)式可化为 $f(a)\geq f(-b)$，∴ $a\geq -b$，即 $a+b\geq 0$. 故选 D.

例 3 (1)$(-3,2)$ (2)$(0,3-2\sqrt{2})\cup(3+2\sqrt{2},+\infty)$ [解析](1)由 $2^{x^2-2x-3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$，得 $2^{x^2-2x-3}<2^{-3(x-1)}$，因为函数 $y=2^x$ 在 **R** 上单调递增，所以 $x^2-2x-3<-3(x-1)$，即 $x^2+x-6<0$，解得 $-3<x<2$，所以原不等式的解集为 $(-3,2)$.
(2)令 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t(t>0)$，则方程化为 $2t^2-(a+1)t+a=0$，依题意知方程 $2t^2-(a+1)t+a=0$ 有两个不相等的正实数根，因此 $\begin{cases}\Delta=(a+1)^2-8a>0,\\ \frac{a+1}{2}>0,\\ \frac{a}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $a>3+2\sqrt{2}$ 或 $0<a<3-2\sqrt{2}$，故实数 a 的取值范围是 $(0,3-2\sqrt{2})\cup(3+2\sqrt{2},+\infty)$.

例 4 解：(1)∵ $f(x)$ 为偶函数，∴ $f(x)=f(-x)$，即 $\frac{9^x+a}{3^x}=\frac{9^{-x}+a}{3^{-x}}=\frac{1+a\cdot 9^x}{3^x}$，∴ $9^x+a=1+a\cdot 9^x$，即 $(a-1)\cdot 9^x=a-1$，∴ $a=1$，∴ $f(x)=3^x+\frac{1}{3^x}\geq 2\sqrt{3^x\cdot\frac{1}{3^x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，故函数 $f(x)$ 的值域为 $[2,+\infty)$.
(2)若命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，$g(x)\geq 0$"为假命题，则命题"$\forall x\in\mathbf{R}$，$g(x)<0$"为真命题. $g(x)=mf(2x)+2f(x)+m=m(3^{2x}+3^{-2x})+2(3^x+3^{-x})+m$，令 $t=3^x+3^{-x}=3^x+\frac{1}{3^x}\geq 2\sqrt{3^x\cdot\frac{1}{3^x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，则 $3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$，∴ $g(t)=m(t^2-2)+2t+m<0$ 对任意 $t\geq 2$ 恒成立，即 $m(t^2-1)+2t<0$ 对任意 $t\geq 2$ 恒成立，∵ $t^2-1>0$，∴ $m<-\frac{2t}{t^2-1}$ 对任意 $t\geq 2$ 恒成立. 令 $h(t)=-\frac{2t}{t^2-1}(t\geq 2)$，则 $h'(t)=\frac{2+2t^2}{(t^2-1)^2}>0$，∴ $h(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(t)_{\min}=h(2)=-\frac{4}{3}$，∴ $m<-\frac{4}{3}$，故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$.

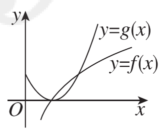
【应用演练】
1. D [解析]因为指数函数 $y=0.2^x$ 是定义在 **R** 上的减函数，且 $0.3<0.4$，所以 $0.2^{0.3}>0.2^{0.4}$，即 $b>c$. 因为幂函数 $y=x^{0.1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $0.09>0.008$，所以 $0.09^{0.1}>0.008^{0.1}$，即 $0.3^{2\times 0.1}>0.2^{3\times 0.1}$，所以 $a>b$. 综上，$a>b>c$. 故选 D.
2. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$ [解析] 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax}<2^{3x+a^2}$ 恒成立，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-(3x+a^2)}$ 恒成立，∴ $x^2-2ax>-(3x+a^2)$ 恒成立，即 $x^2-(2a-3)x+a^2>0$ 恒成立，∴ $\Delta=(2a-3)^2-4a^2<0$，即 $(2a-3+2a)(2a-3-2a)<0$，解得 $a>\frac{3}{4}$，∴实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.
3. $[-5,31]$ [解析]令 $t=2^x$，∵ $x\in[0,3]$，∴ $1\leq t\leq 8$. 令 $g(t)=t^2-4t-1=(t-2)^2-5$，$t\in[1,8]$，易知 $g(t)$ 在 $[1,2)$ 上单调递减，在 $(2,8]$ 上单调递增，又 $|8-2|>|2-1|$，∴当 $t=2$ 时，函数 $g(t)$ 取得最小值，即 $g(t)_{\min}=-5$，当 $t=8$ 时，函数 $g(t)$ 取得最大值，即 $g(t)_{\max}=31$，∴ $f(x)$ 的值域为 $[-5,31]$.

第 12 讲 对数与对数函数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】
1. $\log_a N$ 底数 真数 $\lg N$ $\ln N$
2. (1)0 (3)N
3. (1)$\log_a M+\log_a N$ $\log_a M-\log_a N$ $\alpha\log_a M$ (2)$\frac{n}{m}\log_a b$
4. 对数 $(0,+\infty)$ **R** $(1,0)$ 增 减
5. x y

【对点演练】
1. 1 [解析]利用对数的换底公式可得结果为 1.
2. $b>c>a$ [解析] $a=\log_2 0.3<\log_2 1=0$，$b=\ln 3>\ln e=1$，$0=\log_3 1<\log_3 2<\log_3 3=1$，即 $0<c<1$，∴ $b>c>a$.
3. $(2,1)$ [解析]令 $2x-3=1$，解得 $x=2$，此时 $f(2)=1+\log_a 1=1$，所以 $f(x)$ 的图象恒过定点 $(2,1)$.
4. 4 [解析]因为 $\lg x+\lg y=2\lg(x-2y)$，所以 $xy=(x-2y)^2$，即 $x^2-5xy+4y^2=0$，解得 $x=y$ 或 $x=4y$. 由已知得 $x>0$，$y>0$，$x-2y>0$，所以 $x=4y$，所以 $\frac{x}{y}=4$.
5. 2 或 $\frac{1}{2}$ [解析]当 $a>1$ 时，有 $\log_a 4-\log_a 2=1$，解得 $a=2$；当 $0<a<1$ 时，有 $\log_a 2-\log_a 4=1$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 综上，$a=2$ 或 $\frac{1}{2}$.
6. 4 [解析]由 $\log_2 x^2-2(|x|-1)^2=0$ 可得 $\log_2|x|=(|x|-1)^2$(*). 令 $f(x)=\log_2|x|$，$g(x)=(|x|-1)^2$，易知这两个函数均为偶函数，故只需求出 $x>0$ 时方程(*)的根的个数即可. 当 $x>0$ 时，作出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象，如图所示，由图可知，两函数图象的交点个数为 2，即当 $x>0$ 时，方程(*)有 2 个根；同理，当 $x<0$ 时，方程(*)也有 2 个根. 综上，满足条件的根的个数为 4.



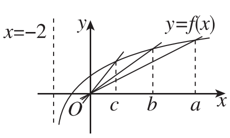
● 课堂考点探究

例 1 (1)BCD (2)9 [解析](1)∵ $3^b=6$，∴ $b=\log_3 6$. 对于 A，∵ $a=\log_2 6=\frac{\ln 6}{\ln 2}$，$b=\log_3 6=\frac{\ln 6}{\ln 3}$，$\ln 6>\ln 3>\ln 2>0$，∴ $a>b$，A 错误；对于 B，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_2 6}+\frac{1}{\log_3 6}=\log_6 2+\log_6 3=\log_6 6=1$，B 正确；对于 C，∵ $a-1=\log_2 6-1=\log_2 3$，$b-1=\log_3 6-1=\log_3 2$，∴ $(a-1)(b-1)=\log_2 3\times\log_3 2=1$，C 正确；对于 D，$\log_{18}6=\frac{\log_3 6}{\log_3 18}=\frac{\log_3 6}{\log_3 3+\log_3 6}=\frac{b}{1+b}$，D 正确. 故选 BCD.
(2)原式 $=\lg 2\times(2\lg 5+2)+8\times\frac{1}{4}\times(\lg 5)^2+2^{\log_2 3}+\frac{2\lg 3}{\lg 2}\times\frac{2\lg 2}{\lg 3}=2\lg 2\times\lg 5+2\lg 2+2\times(\lg 5)^2+3+4=2\lg 5\times(\lg 2+\lg 5)+2\lg 2+7=2\times(\lg 5+\lg 2)+7=2+7=9$.

变式题 (1)C (2)D (3)D
[解析](1)由 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=2$ 知 $a\neq 0$，$b\neq 0$，由 $2^a=3^b=t$，知 $t>0$ 且 $t\neq 1$，且 $a=\log_2 t$，$b=\log_3 t$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{\log_2 t}+\frac{2}{\log_3 t}=\log_t 2+2\log_t 3=\log_t 18=2$，所以 $t^2=18$，可得 $t=3\sqrt{2}$. 故选 C.
(2)由题意得 $\frac{S-1}{\ln N_1}=2.1$，$\frac{S-1}{\ln N_2}=3.15$，则 $2.1\ln N_1=3.15\ln N_2$，即 $2\ln N_1=3\ln N_2$，所以 $N_2^3=N_1^2$. 故选 D.
(3)由题知 $m=a^2$，则 $m>0$ 且 $m\neq 1$. 由换底公式得，$\log_m a=\frac{1}{\log_a m}=\frac{1}{2}$，$\log_m b=\frac{1}{\log_b m}=\frac{1}{3}$，所以 $\log_{(ab)}m=\frac{1}{\log_m(ab)}=\frac{1}{\log_m a+\log_m b}=\frac{6}{5}$. 故选 D.

例 2 (1)AB (2)B [解析](1)因为 $a^x=b^{-x}$，即 $a^x=\left(\frac{1}{b}\right)^x$，所以 $a=\frac{1}{b}$. 当 $a>1$ 时，$0<b<1$，则指数函数 $y=b^x$ 在 **R** 上单调递减，且图象过点 $(0,1)$，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且图象过点 $(1,0)$，将 $y=\log_a x$ 的图象关于 y 轴对称得到 $y=\log_a(-x)$ 的图象，则 $y=\log_a(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减且图象过点 $(-1,0)$，故 A 符合题意；当 $0<a<1$ 时，$b>1$，同理可得，指数函数 $y=b^x$ 在 **R** 上单调递增，且图象过点 $(0,1)$，$y=\log_a(-x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增且图象过点 $(-1,0)$，故 B 符合题意. 故选 AB.
(2)对于选项 A,B，由题意不妨设 $x_1<x_2$，因为函数 $y=2^x$ 是增函数，所以 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$，即 $0<y_1<y_2$，易得 $\frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2}>\sqrt{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}=2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即 $\frac{y_1+y_2}{2}>2^{\frac{x_1+x_2}{2}}>0$，因为函数 $y=\log_2 x$ 是增函数，所以 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_1+x_2}{2}$，故 A 错误，B 正确；对于选项 C，取 $x_1=-2$，$x_2=-1$，则 $y_1=\frac{1}{4}$，$y_2=\frac{1}{2}$，可得 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{8}=\log_2 3-3\in(-2,-1)$，此时 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>-3=x_1+x_2$，故 C 错误；对于选项 D，取 $x_1=0$，$x_2=1$，则 $y_1=1$，$y_2=2$，可得 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}=\log_2\frac{3}{2}\in(0,1)$，此时 $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<1=x_1+x_2$，故 D 错误. 故选 B.

变式题 (1)D (2)A [解析](1)由题图可得，函数在定义域上单调递增，所以 $a>1$，排除 A,C；因为函数的图象过点 $(0.5,0)$，所以 $b+0.5=1$，解得 $b=0.5$，排除 B. 故选 D.
(2)$\frac{f(a)}{a}$，$\frac{f(b)}{b}$，$\frac{f(c)}{c}$ 可分别看作 $f(x)$ 图象上的点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(c,f(c))$ 与坐标原点 $O(0,0)$ 连线的斜率，作出 $f(x)$ 的图象，如图所示，并取点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(c,f(c))$，其中 $a>b>c>0$，再将三个点分别与点 $(0,0)$ 相连，得到三条直



线.由图可知,当 $a>b>c>0$ 时,$\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}<\frac{f(c)}{c}$.故选 A.

例 3 (1)C (2)A [解析](1)由 $a=2^{\sqrt{\pi}}>2$,$1<b=\log_2\pi<\log_2 4=2$,$1<c=\sqrt{\pi}<\sqrt{4}=2$,知 $a>b$,$a>c$.又 $\pi^3<2^5$,所以 $\pi<2^{\frac{5}{3}}$,故 $b=\log_2\pi<\log_2 2^{\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$,又 $\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}<\pi$,故 $\frac{5}{3}<\sqrt{\pi}=c$,所以 $b<c$,因此可得 $a>c>b$.故选 C.

(2)因为 $a=\log_{16}9=\log_{4^2}3^2=\log_4 3>0$,$b=\log_{25}16=\log_{5^2}4^2=\log_5 4>0$,$\frac{a}{b}=\frac{\log_4 3}{\log_5 4}=\log_4 3\times\log_4 5<\left(\frac{\log_4 3+\log_4 5}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_4 15}{2}\right)^2<\left(\frac{\log_4 16}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_4 4^2}{2}\right)^2=1$,所以 $a<b$.又 $a=\log_4 3>\log_4 2=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}>e^{-2}=c$,所以 $b>a>c$.故选 A.

例 4 (1)10 (2)(0,1) [解析](1)因为 $1+\lg x-\lg y=\lg y^2$,所以 $\lg 10+\lg x=\lg y^2+\lg y$,所以 $\lg(10x)=\lg y^3(x>0,y>0)$,则 $10x=y^3$,所以 $\frac{y^3}{x}=10$.

(2)易知 $-1<x<1$,且 $x\neq0$,原不等式可化为 $\left|\frac{\lg(1-x)}{\lg a}\right|>\left|\frac{\lg(1+x)}{\lg a}\right|$,即 $|\lg(1-x)|>|\lg(1+x)|$,两边同时平方得 $[\lg(1-x)]^2>[\lg(1+x)]^2$,即 $[\lg(1-x)+\lg(1+x)]\cdot[\lg(1-x)-\lg(1+x)]>0$,所以 $\lg(1-x^2)\cdot\lg\frac{1-x}{1+x}>0$.又 $-1<x<1$,且 $x\neq0$,所以 $0<1-x^2<1$,所以 $\lg(1-x^2)<0$,从而 $\lg\frac{1-x}{1+x}<0$,解得 $0<x<1$.

例 5 解:(1)$f(x)$为奇函数,证明如下:

由解析式易知 $\frac{1-x}{1+x}>0$,即 $(x-1)(x+1)<0$,解得 $-1<x<1$,故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,

又 $f(-x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}=-\log_2\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2)因为 $m=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$ 在 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 上单调递减,$y=\log_2 m$ 在定义域上为增函数,所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 上单调递减,故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$.要使对任意 $x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$,$t\in[-2,2]$,不等式 $f(x)\geq t^2+at-6$ 恒成立,只需 $t^2+at-6\leq-1$ 对任意 $t\in[-2,2]$ 恒成立,即 $t^2+at-5\leq0$ 对任意 $t\in[-2,2]$ 恒成立,因为 $y=t^2+at-5$ 的图象开口向上,所以 $\begin{cases}4-2a-5\leq0,\\4+2a-5\leq0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$,所以 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

【应用演练】

1. C [解析] $a=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}=\log_8 2\sqrt{2}<\log_8 3=b$,即 $a<c<b$.
2. C [解析] 因为函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-ax+8)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递减,所以 $y=3x^2-ax+8$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增且 $y=3x^2-ax+8>0$ 对任意 $x\in[-1,+\infty)$ 恒成立,所以 $\begin{cases}\frac{a}{6}\leq-1,\\3+a+8>0,\end{cases}$ 解得 $-11<a\leq-6$.故选 C.
3. $(2,+\infty)$ [解析] 因为 $\frac{2}{a}<\frac{3}{a}$,$\log_a\frac{2}{a}<\log_a\frac{3}{a}$,所以 $a>1$,则对数函数 $y=\log_a x(a>1)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $\log_a(2x-3)>0$,所以 $2x-3>1$,解得 $x>2$,所以不等式的解集为 $(2,+\infty)$.

第 13 讲 函数的图象

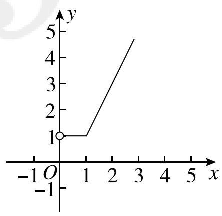
● 课前基础巩固

【知识聚焦】

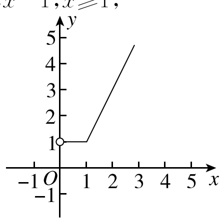
1. 列表 描点 连线
2. (1)$y=f(x)+k$ $y=f(x+a)$ $y=f(x-a)$ $y=f(x)-k$ (2)$-f(x)$ $f(-x)$ $-f(-x)$ $\log_a x$ (4)$|f(x)|$ $f(|x|)$

【对点演练】

1. $y=0$ [解析] $y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$,故两个函数的图象关于 x 轴,即直线 $y=0$ 对称.
2. $x=0$ [解析] $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$,故两个函数的图象关于 y 轴,即直线 $x=0$ 对称.
3. ④①② [解析](1)根据描述,离家的距离先增加,再减少到零,再增加,只有图象④符合.
(2)根据描述,离家的距离应该先沿直线上升,然后与 x 轴平行,最后继续沿直线上升,符合的图象为①.
(3)根据描述,符合的图象为②.
4. $y=(2x-1)^2+2$ [解析] 将 $f(x)$ 的图象向右平移一个单位长度后得到 $y=[2(x-1)+1]^2=(2x-1)^2$ 的图象,再把所得图象向上平移两个单位长度后得到 $y=(2x-1)^2+2$ 的图象.
5. $y=\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$ [解析] 根据图象的伸缩变换可得,所求函数解析式为 $y=\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$.
6.



[解析] $y=e^{\ln x}+|x-1|=x+|x-1|=\begin{cases}1,0<x<1,\\2x-1,x\geq1,\end{cases}$ 其图象如图所示.

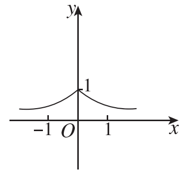


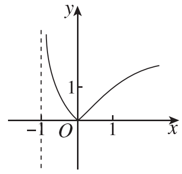
● 课堂考点探究

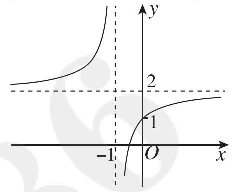
例 1 解:(1)先作出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象,保留 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 图象中 $x\geq0$ 的部分,再把 y 轴右侧部分翻折到左侧,即得 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 的图象,如图①所示.

(2)将函数 $y=\log_2 x$ 的图象向左平移一个单位长度,再将所得图象的 x 轴下方部分翻折到上方,原 x 轴下方部分去掉,上方不变,即可得到函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象,如图②.

(3)$y=\frac{2x+1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}$ 的图象可由 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象先向左平移 1 个单位长度,再将所得图象向上平移 2 个单位长度得到,如图③.

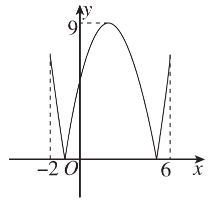

①

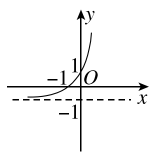

②


③

变式题 解:(1)先作出二次函数 $y=x^2-4x-5$ 的图象,再把所得图象在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴上方,原 x 轴下方部分去掉,上方不变,并截取在区间 $[-2,6]$ 内的部分,即得函数 $y=|x^2-4x-5|(x\in[-2,6])$ 的图象,如图①所示.

(2)将 $y=2^x$ 的图象向左平移 1 个单位长度,得到 $y=2^{x+1}$ 的图象,再将所得图象向下平移 1 个单位长度,得到 $y=2^{x+1}-1$ 的图象,如图②所示.


①


②

例 2 (1)B (2)D [解析](1)显然 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $f(-x)=-(-x)^2+(e^{-x}-e^x)\sin(-x)=-x^2-(e^x-e^{-x})(-\sin x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,排除 A,C.因为 $f(1)=-1+\left(e-\frac{1}{e}\right)\sin 1$,易知 $e-\frac{1}{e}>2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,$\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $f(1)>\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{3\sqrt{2}-4}{4}>0$,排除 D.故选 B.

(2)方法一:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,由 $1-x>0$ 得 $x<1$,即函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$,排除 A,C.$f(1-x)=(1-x)\ln(1-x)$,设 $g(x)=(1-x)\ln(1-x)$,则 $g(-1)=2\ln 2>0$,排除 B.故选 D.

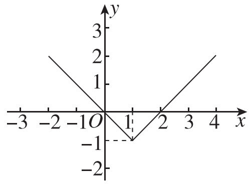
方法二:将函数 $f(x)$ 的图象进行以 y 轴为对称轴的翻折变换,得到函数 $y=f(-x)$ 的图象,再将所得图象向右平移一个单位长度,即可得到函数 $y=f[-(x-1)]=f(1-x)$ 的图象.故选 D.

变式题 (1)C (2)A [解析](1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,又 $f(-x)=-x\ln[(-x)^2+1]=-x\ln(x^2+1)=-f(x)$,故函数 $f(x)$ 为奇函数,排除 A,B.又 $f(1)=\ln 2>0$,故排除 D.故选 C.

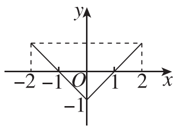
(2)将 $f(x)$ 的图象保持不变,作与函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称的图象,得到偶函数 $y=f(|x|)$ 的图象,再将所得图

象向左平移一个单位长度得到 $y=f(|x+1|)$ 的图象.故选A.

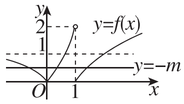
例3 C [解析] 由题意得,$f(x)=|x-1|-1=\begin{cases}x-2,x\geqslant1,\\-x,x<1,\end{cases}$ 作出 $f(x)$ 的图象,如图所示.由图可得,$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,选项A中说法正确;$f(x)$ 的最小值为 -1,选项B中说法正确;$f(x)$ 的图象不关于点 $(1,-1)$ 对称,选项C中说法错误;$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减,选项D中说法正确.故选C.



例4 B [解析] 因为函数 $f(x)$ 是定义在 **R** 上周期为4的奇函数,且当 $x\in[0,2]$ 时,$f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x<1,\\-x+2,1\leqslant x\leqslant2,\end{cases}$ 所以当 $x\in(-1,0]$ 时,$f(x)=x$,当 $x\in[-2,-1]$ 时,$-x\in[1,2]$,所以 $f(x)=-f(-x)=-(x+2)=-x-2$,当 $x\in[-3,-2]$ 时,$x+4\in[1,2]$,所以 $f(x)=f(x+4)=-(x+4)+2=-x-2$.函数 $y=f(x-1)$ 的图象可由函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移1个单位长度得到,作出函数 $y=f(x-1)$ 在 $[-2,2]$ 上的图象,如图所示.由图可知不等式 $xf(x-1)<0$ 在 $(-2,2)$ 上的解集为 $(-2,-1)\cup(0,1)$.故选B.

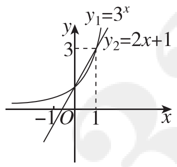


例5 $(-1,0)$ [解析] 令 $g(x)=f(x)+m=0$,得 $f(x)=-m$,画出 $f(x)=\begin{cases}|3^x-1|,x<1,\\\log_2x,x\geqslant1\end{cases}$ 与 $y=-m$ 的图象,如图.函数 $g(x)=f(x)+m$ 有3个零点,则 $f(x)$ 与 $y=-m$ 的图象有3个不同的交点,所以 $-m\in(0,1)$,可得 m 的取值范围是 $(-1,0)$.



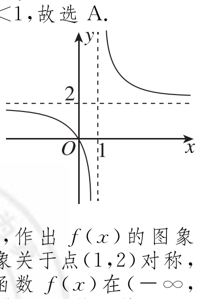
【应用演练】

1. A [解析] 方法一:画出函数 $y_1=3^x$ 与 $y_2=2x+1$ 的图象,如图所示,故不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,1)$.

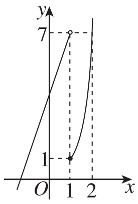


方法二:因为 $f'(x)=3^x\ln3-2$ 单调递增,且 $f'(0)=\ln3-2<0$,$f'(1)=3\ln3-2>0$,所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$,使得 $f'(x_0)=0$,当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,又 $f(0)=f(1)=0$,所以由 $f(x)<0$ 可得 $0<x<1$,故选A.

2. A [解析] ∵$f(x)=\frac{2x}{x-1}=\frac{2}{x-1}+2$,∴函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象先向右平移1个单位长度,再向上平移2个单位长度得到的,作出 $f(x)$ 的图象如图所示,可知其图象关于点 $(1,2)$ 对称,故A正确,D错误;函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,故B错误;显然函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=k$ 的图象最多只有一个交点,故C错误.故选A.



3. $\left[-\frac{4}{3},7\right)$ [解析] 方法一:作出 $f(x)$ 的图象,如图.由 $f(m)=f(n)$,且 $m<n$,可知 $3m+4=3^n-2$,$n\in[1,2)$,可得 $m=\frac{3^n-6}{3}$ $(n\in[1,2))$,则 $mf(n)=\frac{3^n-6}{3}\times(3^n-2)$.令 $t=3^n$,因为 $n\in[1,2)$,所以 $t\in[3,9)$,则 $mf(n)=\frac{(t-6)(t-2)}{3}=\frac{1}{3}[(t-4)^2-4]$,$t\in[3,9)$,因此 $mf(n)\in\left[-\frac{4}{3},7\right)$.



方法二:作出 $f(x)$ 的图象,如图.设 $f(m)=f(n)=t$,因为 $m<n$,所以结合图象可得 $3m+4=3^n-2=t$,且 $t\in[1,7)$,于是 $m=\frac{t-4}{3}$,$n=\log_3(t+2)$,因此 $mf(n)=mt=\frac{t-4}{3}\cdot t=\frac{1}{3}t^2-\frac{4}{3}t=\frac{1}{3}(t-2)^2-\frac{4}{3}$.因为 $t\in[1,7)$,所以 $\frac{1}{3}(t-2)^2-\frac{4}{3}\in\left[-\frac{4}{3},7\right)$,即 $mf(n)\in\left[-\frac{4}{3},7\right)$.

第14讲 函数与方程

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$f(\alpha)=0$ (2)零点 x 轴
(3)连续不断 $f(a)f(b)<0$
至少有一个 $\exists x_0\in(a,b)$,$f(x_0)=0$

2. $x_1=\frac{a+b}{2}$ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$

【对点演练】

1. 1 [解析] 由题知,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(2)<0$,$f(3)>0$,故函数 $f(x)$ 存在唯一的零点.

2. $(0,3)$ [解析] 令 $f(x)=0$,则 $x\cdot2^x-kx-2=0$,由 $x\in(1,2)$,可得 $k=2^x-\frac{2}{x}$,令 $\varphi(x)=2^x-\frac{2}{x}$,$x\in(1,2)$,则由题知直线 $y=k$ 与 $\varphi(x)=2^x-\frac{2}{x}$,$x\in(1,2)$ 的图象有交点.∵$\varphi(x)=2^x-\frac{2}{x}$ 在 $(1,2)$ 上单调递增,且 $\varphi(1)=0$,$\varphi(2)=3$,∴$0<k<3$.

3. $\left(\frac{5}{2},3\right)$ [解析] 令 $f(x)=2^x-x-4$,则 $f(2)=4-2-4=-2<0$,$f(3)=8-3-4=1>0$,$f\left(\frac{5}{2}\right)=2^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}-4<0$,由 $f(3)f\left(\frac{5}{2}\right)<0$ 知该解所在的区间为 $\left(\frac{5}{2},3\right)$.

4. 2 [解析] 由题知 $f(x)$ 的定义域为 $(1,+\infty)$,由 $f(x)=0$,得 $(9^x-3)\ln(x-1)=0$,即 $9^x-3=0$ 或 $\ln(x-1)=0$,解得 $x=\frac{1}{2}$(舍)或 $x=2$,所以函数 $f(x)=(9^x-3)\ln(x-1)$ 的零点为2.

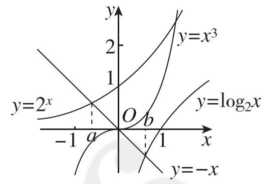
5. ①②③ [解析] 由题知 $f(-1)\cdot f(0)<0$,$f(2)\cdot f(3)<0$,$f(5)\cdot f(6)<0$,因为 $f(x)$ 的图象是连续不断的,所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$,$(2,3)$,$(5,6)$ 三个区间上均有零点,但不能判断有几个零点,故①②③正确,④不正确.故填①②③.

6. 2 [解析] 当 $x\leqslant0$ 时,由 $x^2-2=0$ 可得 $x=-\sqrt{2}$;当 $x>0$ 时,由 $\ln x=0$,解得 $x=1$,所以函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2,x\leqslant0,\\\ln x,x>0\end{cases}$ 的零点个数是2.

● 课堂考点探究

例1 (1)C (2)B [解析] (1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,易知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $f(1)=-1<0$,$f(\sqrt{2})=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln2>0$,所以函数 $f(x)$ 的零点在 $(1,\sqrt{2})$ 内.故选C.

(2)由 $f(x)=2^x+x=0$ 得 $2^x=-x$,由 $g(x)=\log_2x+x=0$ 得 $\log_2x=-x$,由 $h(x)=x^3+x=0$ 得 $x^3=-x$,分别作出函数 $y=2^x$,$y=\log_2x$,$y=x^3$ 和 $y=-x$ 的图象,如图所示.由图可知,$a\in(-1,0)$,$c=0$,$b\in(0,1)$,所以 $a<c<b$.故选B.

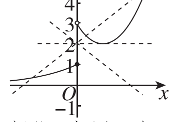


变式题 (1)B (2)3 [解析] (1)由已知得函数 $f(x)$ 的图象是连续的,且 $f(x)$ 单调递增,因为 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{2}+\frac{1}{4}-2=\sqrt{2}-\frac{7}{4}<0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}-2=\frac{1}{2}>0$,所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$,由函数零点存在定理可知存在 $x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 使得 $f(x_0)=0$,故选B.

(2)令函数 $f(x)=e^{x-3}-(-x+5)=e^{x-3}+x-5$,显然函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增,所以 $f(x)$ 至多有一个零点.由函数 $y=e^{x-3}$ 与 $y=-x+5$ 的图象的交点为 (x_0,y_0),得函数 $f(x)$ 的零点为 x_0,而 $f(3)=-1<0$,$f(4)=e-1>0$,即 $f(3)f(4)<0$,因此存在唯一的 $x_0\in(3,4)$,使得 $f(x_0)=0$,所以 $n=3$.

例2 (1)C (2)C

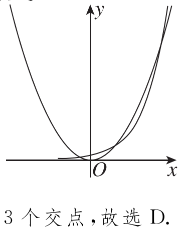
[解析] (1)作出函数 $y=f(x)$ 的图象,如图所示.将原问题转化为直线 $y=ax+2$(过定点 $(0,2)$)与函数 $y=f(x)$ 的图象交点的个数问题.由图可知,当 $a=0$ 时,直线 $y=2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象只有1个交点;当 $a<0$ 时,直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象没有交点;当 $a>0$ 时,直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有3个交点.所以直线 $y=ax+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象不可能有2个交点.故选C.



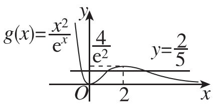
(2)由 $f(x)$ 是定义域为 **R** 的奇函数可得 $f(0)=0$,再由 $f(x+1)=f(x)$ 可得函数 $f(x)$ 的周期为1,则 $f(-1)=f(0)=f(1)=0$.$f(x+1)=f(x)$ 中取 $x=-\frac{1}{2}$ 得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=0$,$f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上的零点个数至少为7.故选C.

变式题 (1)D (2)8

[解析] (1)方法一:在同一平面直角坐标系中画出函数 $y_1=2e^x$,$y_2=5x^2$ 的大致图象如图,由函数 $y_1=2e^x$ 的增长速度比 $y_2=5x^2$ 的增长速度快,得两函数图象有3个交点,故选D.

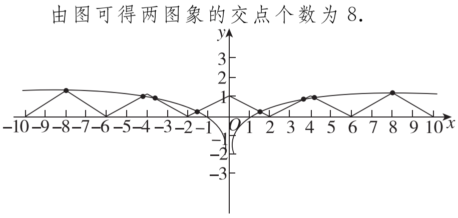


方法二：由 $2e^x-5x^2=0$ 得 $\frac{x^2}{e^x}=\frac{2}{5}$，构造函数 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$，

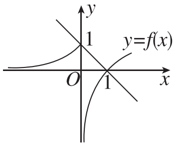


求导得 $g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$，当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，又 $g(0)=0$，$g(2)=\frac{4}{e^2}>\frac{2}{5}$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$ 且 $g(x)>0$，所以作出 $g(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{2}{5}$ 如图，由图可知 $g(x)=\frac{2}{5}$ 有 3 个解. 故选 D.

(2)∵$f(x+4)=f(x)$，∴偶函数 $y=f(x)$ 是周期为 4 的函数. 由当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=1-\frac{1}{2}x$，可作出函数 $f(x)$ 在 $[-10,10]$ 内的图象，同时作出函数 $g(x)=\log_8|x|$ 在 $[-10,10]$ 内的图象，如图所示. 两图象的交点个数即为所求，由图可得两图象的交点个数为 8.

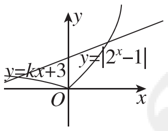


例 3 C [解析] 函数 $g(x)=f(x)+x+a$ 有两个零点，即方程 $f(x)=-x-a$ 有两个不同的解，即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有两个不同的交点. 分别作出函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$，如图所示，由图可知，当 $-a\le 1$，即 $a\ge -1$ 时，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-x-a$ 有两个不同的交点，即函数 $g(x)$ 有两个零点. 故选 C.

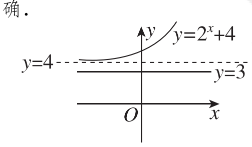


变式题 ①②④

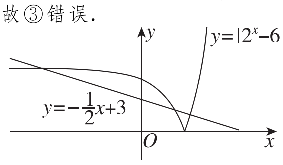
[解析] 当 $a=1$ 时，$f(x)=|2^x-1|-kx-3$，令 $f(x)=0$，得 $|2^x-1|=kx+3$，在同一坐标系中作出 $y=|2^x-1|$，$y=kx+3$ 的图象，如图所示，由图及直线 $y=kx+3$ 过定点 $(0,3)$ 知函数 $f(x)$ 至少有一个零点，故①正确.



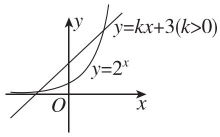
当 $a=-4,k=0$ 时，在同一坐标系中作出 $y=|2^x+4|=2^x+4$，$y=3$ 的图象，如图所示，由图可知，函数 $f(x)$ 无零点，故②正确.



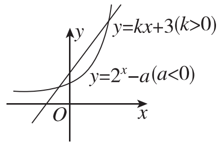
当 $a=6,k=-\frac{1}{2}$ 时，在同一坐标系中作出 $y=|2^x-6|$，$y=-\frac{1}{2}x+3$ 的图象，如图所示，由图可知，函数 $f(x)$ 有三个零点，故③错误.



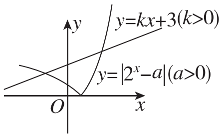
当 $a=0$ 时，在同一坐标系中作出 $y=|2^x|=2^x$，$y=kx+3(k>0)$ 的图象，如图所示，



当 $a<0$ 时，在同一坐标系中作出 $y=|2^x-a|=2^x-a$，$y=kx+3(k>0)$ 的图象，如图所示，

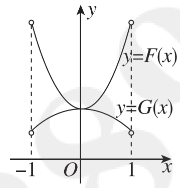


当 $a>0$ 时，在同一坐标系中作出 $y=|2^x-a|$，$y=kx+3(k>0)$ 的图象，如图所示，由图可知，对任意实数 a，总存在实数 $k>0$ 使得函数 $f(x)$ 有两个零点，故④正确. 故填①②④.



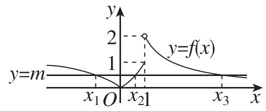
例 4 (1)D (2)AC [解析] (1)方法一：令 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^2+a-1-\cos x$，则 $h(x)$ 为偶函数，因为当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，所以 $h(0)=a-2=0$，得 $a=2$.

方法二：令 $f(x)=g(x)$，得 $ax^2+2ax+a-1=\cos x+2ax$，即 $ax^2+a-1=\cos x$. 设 $F(x)=ax^2+a-1(x\in(-1,1))$，$G(x)=\cos x\ (x\in(-1,1))$，易知 $F(x)$，$G(x)$ 都为偶函数. 当 $a\le 0$ 时，$F(x)<0$，$G(x)>0$，故曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 无交点；当 $a>0$ 时，作出 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的大致图象，如图所示，因为曲线 $y=F(x)$ 与 $y=G(x)$ 恰有一个交点，且 $G(0)=1$，所以 $F(0)=a-1=1$，则 $a=2$.



方法三：令 $f(x)=g(x)$，得 $ax^2-\cos x+a-1=0$，得 $a=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$. 当 $x\in(-1,0]$ 时，$y=\cos x+1$ 单调递增，$y=x^2+1$ 单调递减，且 $\cos x+1>0$，$x^2+1>0$，故 $y=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$ 单调递增，其取值范围是 $\left(\frac{1+\cos 1}{2},2\right]$；当 $x\in[0,1)$ 时，$y=\cos x+1$ 单调递减，$y=x^2+1$ 单调递增，且 $\cos x+1>0$，$x^2+1>0$，故 $y=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$ 单调递减，其取值范围是 $\left(\frac{1+\cos 1}{2},2\right]$. 根据题意得直线 $y=a$ 与 $y=\frac{\cos x+1}{x^2+1}$ 在 $(-1,1)$ 上的图象恰有一个交点，故 $a=2$，故选 D.

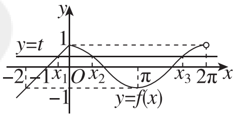
(2)函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，等价于 $y=m$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个交点，作出函数 $y=m$ 与 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|,x\le 1,\\ \frac{2}{x},x>1\end{cases}$ 的图象，如图所示. 由图可得 $0<m<1$，A 正确；当 $\frac{2}{x}=1$ 时，$x=2$，故 $x_3>2$，B 错误；因为 $|2^{x_1}-1|=|2^{x_2}-1|$，且 $x_1<0<x_2<1$，所以 $-(2^{x_1}-1)=2^{x_2}-1$，可得 $2^{x_1}+2^{x_2}=2$，C 正确；因为 $x_1\ne x_2$，所以 $2=2^{x_1}+2^{x_2}>2\sqrt{2^{x_1+x_2}}$，可得 $2^{x_1+x_2}<1$，D 错误. 故选 AC.



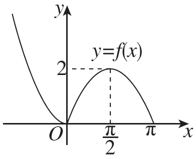
变式题 (1)C (2)$\sqrt{3}-2+\frac{25\pi}{6}$

[解析] (1)由 $h(x)=f(x)-g(x)=0$，得 $a(x-1)^2-1=\cos\frac{\pi x}{2}-2ax$，依题意得 $ax^2+a-1=\cos\frac{\pi x}{2}$ 对 $x\in(-1,1)$ 有解. 记 $F(x)=ax^2+a-1$，$G(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$，则函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的图象有公共点. 当 $x\in(-1,1)$ 时，$0<G(x)\le 1$，当 $a\le 0$ 时，$F(x)=ax^2+a-1\le -1$，显然函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的图象无公共点；当 $a>0$ 时，函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象都关于 y 轴对称，则 $\begin{cases}F(0)\le G(0),\\F(1)>G(1),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a-1\le 1,\\2a-1>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<a\le 2$. 综上，实数 a 的取值范围是 $\frac{1}{2}<a\le 2$. 故选 C.

(2)设 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=t$，作出 $y=f(x)$ 与 $y=t$ 的图象如图所示，则 $y=f(x)$ 的图象与 $y=t$ 的图象有 3 个交点，其横坐标依次为 x_1,x_2,x_3，且 $-2<x_1<0<x_2<\pi<x_3<2\pi$. 由余弦函数图象的性质可知，$x_2+x_3=2\pi$，所以 $2x_1+3x_2+2x_3=2x_1+x_2+2(x_2+x_3)=2x_1+x_2+4\pi$，又因为 $x_1+1=\cos x_2$，所以 $2x_1+x_2=2\cos x_2+x_2-2(0<x_2<\pi)$，令 $g(x)=2\cos x+x-2(0<x<\pi)$，则 $g'(x)=1-2\sin x$，令 $g'(x)=1-2\sin x=0$，解得 $x=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递减，当 $x\in\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$ 上单调递增，又因为 $g(\pi)=\pi-4<0$，$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}>0$，所以 $g(x)_{max}=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}$，所以 $2x_1+3x_2+2x_3=2x_1+x_2+4\pi\le\sqrt{3}-2+\frac{\pi}{6}+4\pi=\sqrt{3}-2+\frac{25\pi}{6}$.



例 5 C [解析] 作出函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin x,0\le x\le\pi,\\x^2,x<0\end{cases}$ 的图象，如图所示. 令 $t=f(x)$，则由 $f(t)-1=0$，即 $f(t)=1$，得 $2\sin t=1(0\le t\le\pi)$，$t^2=1(t<0)$，所以 $t=\frac{\pi}{6}$，$t=\frac{5\pi}{6}$，$t=-1$. 当 $t=\frac{\pi}{6}$ 时，则 $f(x)=\frac{\pi}{6}$，结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=\frac{\pi}{6}$ 的根有 3 个；当 $t=\frac{5\pi}{6}$ 时，则 $f(x)=\frac{5\pi}{6}$，结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=\frac{5\pi}{6}$ 的根有 1 个；



当 $t=-1$ 时，则 $f(x)=-1$，结合函数 $y=f(x)$ 的图象可得 $f(x)=-1$ 的根有0个. 综上可得，函数 $y=f[f(x)]-1$ 的零点的个数是4. 故选C.

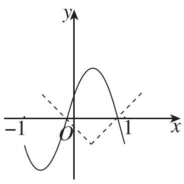
变式题 13 [解析] 令 $t=f(x)$，由 $f(t)=0$，得 $\begin{cases}t\leqslant 2,\\ t=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t>2,\\ \log_2(t-2)=0,\end{cases}$ 解得 $t=0$ 或 $t=3$. 当 $t=f(x)=0$ 时，解得 $x=0$ 或 $x=3$；当 $t=f(x)=3$ 时，则 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\ x=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2,\\ \log_2(x-2)=3,\end{cases}$ 解得 $x=10$. 综上，函数 $y=f[f(x)]$ 的所有零点之和为 $0+3+10=13$.

增分微课3 函数共零点问题

例1 $\frac{3}{2}$ [解析] 设 $h(x)=x^2-ax-1$，$g(x)=(a-1)x-1$，则 $h(0)=g(0)=-1$，又 $h(x)$ 的图象开口向上，∴$h(x)=x^2-ax-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点，若 $x>0$ 时恒有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$ 成立，则 $g(x)=(a-1)x-1$，$h(x)=x^2-ax-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有相同零点，且 $a-1>0$. $g(x)=(a-1)x-1$ 的零点为 $x=\frac{1}{a-1}$，∴$h\left(\frac{1}{a-1}\right)=0$，解得 $a=\frac{3}{2}$ 或 $a=0$，又 $a>1$，∴$a=\frac{3}{2}$.

变式题 B [解析] 当 $x\to+\infty$ 时，$x^2-b\to+\infty$，因为不等式 $(ax+3)(x^2-b)\leqslant 0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以当 $x\to+\infty$ 时，$ax+3\to-\infty$，所以 $a<0$，可知 $f(x)=ax+3$，$g(x)=x^2-b$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时具有相同的零点 $x=-\frac{3}{a}$，可得 $g\left(-\frac{3}{a}\right)=\frac{9}{a^2}-b=0$，即 $a^2b=9$. 故选B.

例2 B [解析] 如图，作出函数 $y=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上的图象，要使不等式 $(|x-a|-b)\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 0$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立，只需函数 $y=|x-a|-b$ 与函数 $y=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上有相同的零点. 当 $x\in[-1,1]$ 时，由 $y=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)=0$，得 $x_1=-\frac{1}{6}$，$x_2=\frac{5}{6}$，所以 $\begin{cases}\frac{5}{6}-a-b=0,\\ a-b=-\frac{1}{6},\end{cases}$ 所以 $a+b=\frac{5}{6}$.



变式题 A [解析] 由题知，当 $x\in\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ 时，$\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant 0$，所以 $|x-a|-b\geqslant 0$；当 $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$ 时，$\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 0$，所以 $|x-a|-b\leqslant 0$；当 $x\in\left[\frac{7}{3},3\right]$ 时，$\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)\geqslant 0$，所以 $|x-a|-b\geqslant 0$. 所以当 $x=\frac{7}{3}$ 或 $x=\frac{1}{3}$ 时，$|x-a|-b=0$，即 $\begin{cases}\left|\frac{7}{3}-a\right|-b=0,\\ \left|\frac{1}{3}-a\right|-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{4}{3},\\ b=1.\end{cases}$ 若 $a=\frac{4}{3}$，$b=1$，当 $x\in\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ 时，$\left|x-\frac{4}{3}\right|-1\geqslant 0$；当 $x\in\left[\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right]$ 时，$\left|x-\frac{4}{3}\right|-1\leqslant 0$；当 $x\in\left[\frac{7}{3},3\right]$ 时，$\left|x-\frac{4}{3}\right|-1\geqslant 0$. 符合题意，所以 $a-b=\frac{1}{3}$. 故选A.

例3 C [解析] ∵$f(x)=(x+a)\ln(x+b)\geqslant 0$，∴$g(x)=x+a$ 与 $h(x)=\ln(x+b)$ 在 $(-b,+\infty)$ 上具有相同零点，∴$-a+b=1$，即 $b=a+1$，∴$a^2+b^2=a^2+(a+1)^2=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{2}$，∴$a^2+b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，故选C.

变式题 C [解析] 因为 $y=e^x-e$ 与 $y=x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有相同的正负区间，所以原问题等价于 $(x^2+ax+b)(x-1)\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，由共零点性得 $1+a+b=0$，即 $b=-a-1$，所以 $(x^2+ax-a-1)(x-1)\geqslant 0$，即 $(x+a+1)(x-1)^2\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $a+1\geqslant 0$，即 $a\geqslant -1$，故选C.

第15讲 函数模型及其应用

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 递增 递增 递增

【对点演练】

1. [10,30] [解析] 设矩形花园另一边的长为 y m，由相似三角形的性质可得 $\frac{x}{40}=\frac{40-y}{40}$ $(0<x<40)$，即 $y=40-x$ $(0<x<40)$，∴矩形花园的面积 $S=x(40-x)\,\text{m}^2$. ∵矩形花园的面积不小于300 m^2，∴$x(40-x)\geqslant 300$，即 $(x-10)(x-30)\leqslant 0$，解得 $10\leqslant x\leqslant 30$，故 x 的取值范围是[10,30].
2. $S=\frac{800}{x}+\frac{x}{8}(x>0)$ [解析] 由题意知，每件产品的生产准备费用是 $\frac{800}{x}$ 元，仓储费用是 $\left(\frac{x}{8}\times 1\right)$ 元，所以平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和 $S=\frac{800}{x}+\frac{x}{8}(x>0)$.
3. 5500 m [解析] 设 A_1,A_2 两处的海拔高度分别为 h_1,h_2，则 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_0\cdot e^{-k\cdot h_1}}{p_0\cdot e^{-k\cdot h_2}}=\frac{e^{-k\cdot h_1}}{e^{-k\cdot h_2}}=e^{k\cdot h_2-k\cdot h_1}=\frac{1}{2}$，故 $h_1-h_2=\frac{\ln 2}{k}\approx\frac{0.693}{0.000\,126}=5500(\text{m})$.
4. [0,26] [解析] 令 $h=130t-5t^2\geqslant 0$，解得 $0\leqslant t\leqslant 26$，故所求定义域为[0,26].
5. 8 ℃ [解析] 由题意知，上午8时即 $t=-4$，因此所求温度 $T=(-4)^3-3\times(-4)+60=8(℃)$.
6. $s=\begin{cases}60t(0\leqslant t\leqslant 2.5),\\ 150(2.5<t\leqslant 3.5),\\ 325-50t(3.5<t\leqslant 6.5)\end{cases}$ [解析] 当 $0\leqslant t\leqslant 2.5$ 时，$s=60t$；当 $2.5<t\leqslant 3.5$ 时，$s=150$；当 $3.5<t\leqslant 6.5$ 时，$s=150-50(t-3.5)=325-50t$. 故 s 关于 t 的函数表达式为 $s=\begin{cases}60t(0\leqslant t\leqslant 2.5),\\ 150(2.5<t\leqslant 3.5),\\ 325-50t(3.5<t\leqslant 6.5).\end{cases}$

● 课堂考点探究

例1 B [解析] 根据函数图象可知函数图象具有对称性，故C错误；对于A，由等边三角形可知线段 AP 的长度先增大再减小，再增大，最后减小，故A错误；对于D，由圆可知线段 AP 的长度不会是线性变化，故D错误；对于B，由正方形可知线段 AP 的长度先增大再减小，且一开始线性增大，符合题意，故B正确. 故选B.

变式题 C [解析] 刚开始交易时，即时价格和平均价格应该相等，故A,D错误；开始交易后，平均价格应该跟随即时价格变动，即时价格与平均价格同增同减，故B错误. 故选C.

例2 (1)C (2)C [解析] (1)根据题意得 $\frac{1}{2}=1-0.6t^{0.27}$，整理得到 $\frac{5}{6}=t^{0.27}$，两边取以10为底的对数，得到 $\lg\frac{5}{6}=0.27\lg t$，即 $1-\lg 3-2\lg 2=0.27\lg t$，又 $\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$，所以 $\lg t\approx-\frac{8}{27}$，得到 $t\approx 10^{-\frac{8}{27}}\approx 0.5$，故选C.

(2)由题设，日本东北部海域发生里氏9.0级地震所释放出来的能量 $E_1=10^{4.8+1.5\times 9}$，中国台湾花莲县海域发生里氏7.3级地震所释放出来的能量 $E_2=10^{4.8+1.5\times 7.3}$，所以 $\frac{E_1}{E_2}=\frac{10^{4.8+1.5\times 9}}{10^{4.8+1.5\times 7.3}}=10^{2.55}$. 故选C.

变式题 B [解析] 设开始记录时，甲、乙两种物质的质量均为1，则512天后，甲的质量为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_1}}$，乙的质量为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_2}}$，由题意可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_2}}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{512}{T_1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2+\frac{512}{T_1}}$，所以 $2+\frac{512}{T_1}=\frac{512}{T_2}$. 故选B.

例3 解：(1)当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时，设 $y=kx+t$，依题意得 $\begin{cases}k+t=70,\\ 5k+t=78,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\ t=68,\end{cases}$ 所以 $y=2x+68$，当 $x=8$ 时，$y=16+68=84$. 当 $8<x\leqslant 40$ 时，设 $y=a(x-20)^2+100$ $(a<0)$，将(8,84)代入上式得 $84=a\times 12^2+100$，解得 $a=-\frac{1}{9}$，所以 $y=-\frac{1}{9}(x-20)^2+100$. 综上所述，$y=\begin{cases}2x+68,0\leqslant x\leqslant 8,\\ -\frac{1}{9}(x-20)^2+100,8<x\leqslant 40.\end{cases}$

(2)由 $\begin{cases}2x+68\geqslant 80,\\ 0\leqslant x\leqslant 8,\end{cases}$ 解得 $6\leqslant x\leqslant 8$，

由 $\begin{cases}-\frac{1}{9}(x-20)^2+100\geqslant 80,\\ 8<x\leqslant 40,\end{cases}$

即 $\begin{cases}(x-20)^2\leqslant 180,\\ 8<x\leqslant 40,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}20-6\sqrt{5}\leqslant x\leqslant 20+6\sqrt{5},\\ 8<x\leqslant 40,\end{cases}$

所以 $8<x\leqslant 20+6\sqrt{5}\approx 33$. 因为 $33-6=27$，所以一节40分钟的课中该学生处于“理想听课状态”所持续的时间是27分钟.

变式题 A [解析] 设经过 n 层 PP 棉滤芯过滤后水中的大颗粒杂质含量为 y mg/L，则 $y=80\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^n=80\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 令 $80\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant 2$，解得 $\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{40}$，两边取常用对数得 $n\lg\frac{2}{3}\leqslant\lg\frac{1}{40}$，即 $n\lg\frac{3}{2}\geqslant\lg 40$，即 $n(\lg 3-\lg 2)\geqslant 1+2\lg 2$，所以 $n\geqslant\frac{1+2\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx 8.9$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 n 的最小值为9. 故选A.

例4 解：(1)因为每件的销售价格 $P(x)=10+\frac{k}{x}$，第10天的日销售量为50件，且第10天的日销售收入为505元，

所以 $\left(10+\frac{k}{10}\right)\times 50=505$，解得 $k=1$.

(2)由表格中的数据知，当 x 增大时，$Q(x)$ 先增后减，而①③④函数模型都描述的是单调函数，不符合该数据模型，

所以选择模型②:$Q(x)=a|x-m|+b$.

由 $Q(15)=Q(25)$,可得 $|15-m|=|25-m|$,解得 $m=20$,

由 $\begin{cases}Q(15)=5a+b=55,\\Q(20)=b=60,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=60,\end{cases}$

所以 $Q(x)=-|x-20|+60$,定义域为 $\{x\in\mathbf{N}^*|1\leqslant x\leqslant 30\}$.

(3)由(1)知 $P(x)=10+\frac{1}{x}$,

又 $Q(x)=-|x-20|+60=\begin{cases}x+40,1\leqslant x\leqslant 20,x\in\mathbf{N}^*,\\-x+80,20<x\leqslant 30,x\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$

所以 $f(x)=P(x)\cdot Q(x)=\begin{cases}10x+\frac{40}{x}+401,1\leqslant x\leqslant 20,x\in\mathbf{N}^*,\\-10x+\frac{80}{x}+799,20<x\leqslant 30,x\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

当 $1\leqslant x\leqslant 20,x\in\mathbf{N}^*$ 时,$f(x)=10x+\frac{40}{x}+401\geqslant 2\sqrt{10x\cdot\frac{40}{x}}+401=441$,

当且仅当 $10x=\frac{40}{x}$,即 $x=2$ 时等号成立;当 $20<x\leqslant 30,x\in\mathbf{N}^*$ 时,$f(x)=-10x+\frac{80}{x}+799$ 为减函数,所以函数的最小值为 $f(30)=499+\frac{8}{3}>441$.

综上可得,当 $x=2$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值441.

变式题 解:(1)由题意得 $y=1000(-300t+9000)\cdot\frac{8-\frac{4}{3}|t-4|}{10\,000}(1\leqslant t\leqslant 8,t\in\mathbf{N}^*)$,

即 $y=\begin{cases}-40t^2+1120t+2400,1\leqslant t<4,t\in\mathbf{N}^*,\\40t^2-1600t+12\,000,4\leqslant t\leqslant 8,t\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$

当 $1\leqslant t<4,t\in\mathbf{N}^*$ 时,根据二次函数的性质可得,$t=3$ 时 y 取得最大值5400,当 $4\leqslant t\leqslant 8,t\in\mathbf{N}^*$ 时,

同理可得,$t=4$ 时 y 取得最大值6240,所以4月份的月交易额最大.

(2)(i)①函数 $f(x)=ka^x$ 是单调函数,不符合题意.

②二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象不具备先上升,后下降,再上升的特点,不符合题意.

③当 $A<0$ 时,函数 $f(x)=A\cos\frac{\pi}{4}x+B$ 的图象在[1,4]上是上升的,在[4,8]上是下降的,在[8,11]上是上升的,符合题意.应选③.

(ii)因为 $f(4)=8,f(8)=4$,

所以 $\begin{cases}A\cos\pi+B=8,\\A\cos 2\pi+B=4,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}A=-2,\\B=6,\end{cases}$

所以 $f(x)=-2\cos\frac{\pi}{4}x+6$.

因为 $x\in[1,11]$,所以 $\frac{\pi}{4}x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{11}{4}\pi\right]$,由 $-2\cos\frac{\pi}{4}x+6<5$,得 $\cos\frac{\pi}{4}x>\frac{1}{2}$,所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}x<\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}<\frac{\pi}{4}x<\frac{7\pi}{3}$,

解得 $1\leqslant x<\frac{4}{3}$ 或 $\frac{20}{3}<x<\frac{28}{3}$,

又 $x\in\mathbf{N}^*$,所以 $x=1,7,8,9$,

即1月、7月、8月、9月该种蔬菜的价格在5元/千克以下,所以该种蔬菜的价格在5元/千克以下的月份有4个.

第三单元 一元函数的导数及其应用

第16讲 导数的概念及其意义、导数的运算

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$f'(x_0)$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
2. 斜率 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$
3. 0 $\alpha x^{\alpha-1}$ $\cos x$ $-\sin x$ $a^x\ln a$ e^x $\frac{1}{x\ln a}$ $\frac{1}{x}$
4. $f'(x)\pm g'(x)$ $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $cf'(x)$
5. $y'_u\cdot u'_x$

【对点演练】

1. 24 [解析] $f(6)=108,f(2)=12$,所以平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{108-12}{4}=24$.
2. -4.8 m/s [解析] ∵ $s'=-4t$,∴该物体在1.2 s末的瞬时速度为 $(-4)\times 1.2=-4.8(\mathrm{m/s})$.
3. $y=-\frac{x}{\pi}+1$ [解析] 由题得 $y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,∴切线的斜率 $k=y'|_{x=\pi}=-\frac{1}{\pi}$,则切线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x-\pi)$,即 $y=-\frac{x}{\pi}+1$.
4. $2\cos 2x$ [解析] 方法一:$y'=(2\sin x\cos x)'=2(\sin x)'\cos x+2\sin x(\cos x)'=2\cos^2x-2\sin^2x=2\cos 2x$.
方法二:$y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$.
5. -8 [解析] $f'(x)=2x+3f'(2)$,令 $x=2$,可得 $f'(2)=-2$,所以 $f(x)=x^2-6x$,则 $f(2)=-8$.
6. $3(2x+3)^2$ $6(2x+3)^2$
[解析] $f'(x)=3x^2$,所以 $f'(2x+3)=3(2x+3)^2$.$[f(2x+3)]'=[(2x+3)^3]'=3(2x+3)^2(2x+3)'=6(2x+3)^2$.

● 课堂考点探究

例1 解:(1)$y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$.

(2)$y'=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)'=(\ln x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$.

(3)$y'=\left(\frac{\cos x}{e^x}\right)'=\frac{(\cos x)'e^x-\cos x(e^x)'}{(e^x)^2}=-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}$.

(4)∵ $y=x\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}x\sin(4x+\pi)=-\frac{1}{2}x\sin 4x$,

∴ $y'=-\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{1}{2}x\cdot 4\cos 4x=-\frac{1}{2}\sin 4x-2x\cos 4x$.

变式题 解:(1)$y'=\cos x-x\sin x-\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(2)$y'=(2x+2)e^{2-x}-(x^2+2x-1)e^{2-x}=(3-x^2)e^{2-x}$.

(3)$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{5x+4}}=\frac{5}{2\sqrt{5x+4}}$.

(4)因为 $f(x)=\sin\frac{x}{2}\left(1-2\cos^2\frac{x}{4}\right)=\sin\frac{x}{2}\cdot\left(-\cos\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sin x$,所以 $f'(x)=-\frac{1}{2}\cos x$.

例2 解:(1)由 $f(x)=x^3+x-16$,得 $f'(x)=3x^2+1$,所以 $f'(2)=3\times 2^2+1=13$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,-6)$ 处的切线方程为 $y+6=13(x-2)$,即 $13x-y-32=0$.

(2)设切点为 $(x_0,x_0^3+x_0-16)$,由(1)得 $f'(x_0)=3x_0^2+1$,所以切线方程为 $y-(x_0^3+x_0-16)=(3x_0^2+1)(x-x_0)$,因为切线经过原点,所以 $-(x_0^3+x_0-16)=-x_0(3x_0^2+1)$,所以 $2x_0^3=-16$,解得 $x_0=-2$,则 $f'(-2)=3\times(-2)^2+1=13$,所以所求的切线方程为 $y=13x$,切点为 $(-2,-26)$.

变式题 (1)B (2)$y=\frac{x}{e}$ $y=-\frac{x}{e}$

[解析](1)$f(1)=0$,则切点为 $(1,0)$.$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$,所以 $f'(1)=\frac{3}{2}$,所以切线方程为 $y=\frac{3}{2}(x-1)$,即 $3x-2y-3=0$.故选B.

(2)当 $x>0$ 时,$y=\ln|x|=\ln x$.设过坐标原点的直线与曲线 $y=\ln x$ 相切于点 $P(x_0,\ln x_0)$,由 $y=\ln x$,得 $y'=\frac{1}{x}$,所以 $\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$,解得 $x_0=e$,所以 $P(e,1)$,则该切线的方程为 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$,即 $y=\frac{x}{e}$,由曲线 $y=\ln|x|$ 的对称性,知另一条切线的方程为 $y=-\frac{x}{e}$.

例3 (1)C (2)$a<-4$ 或 $a>0$

[解析](1)因为 $y=ae^{x-2}+x$,所以 $y'=ae^{x-2}+1$,由题意可得 $\begin{cases}a+1=4,\\8+b=2+a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-3,\end{cases}$ 所以 $a+b=0$.故选C.

(2)设切点为 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$,则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$,由 $y'=(x+a+1)e^x$,知 $(x_0+a+1)e^{x_0}=\frac{(x_0+a)e^{x_0}}{x_0}$,所以关于 x 的方程 $(x+a+1)e^x=\frac{(x+a)e^x}{x}$ 有两个相异的非零实数根,即关于 x 的方程 $x+a+1=\frac{x+a}{x}$ 有两个相异的非零实数根,即关于 x 的方程 $x^2+ax-a=0$ 有两个相异的非零实数根,所以 $\Delta=a^2+4a>0$ 且 $a\neq 0$,解得 $a<-4$ 或 $a>0$.

变式题 (1)-1 或3 (2)C [解析](1)由 $y=e^x-ax$,得 $y'=e^x-a$,所以 $y'|_{x=0}=e^0-a=1-a$,所以切线方程为 $y=(1-a)x+1$.由 $\begin{cases}y=(1-a)x+1,\\y=-x^2\end{cases}$ 消去 y 整理得 $x^2+(1-a)x+1=0$,又直线 $y=(1-a)x+1$ 与曲线 $y=-x^2$ 只有一个交点,所以关于 x 的方程 $x^2+(1-a)x+1=0$ 有两个相等的实数根,即 $\Delta=(1-a)^2-4=0$,解得 $a=-1$ 或 $a=3$.

(2)由 $y=\ln(x+2a)$,得 $y'=\frac{1}{x+2a}$,令 $\frac{1}{x+2a}=e$,则 $x=\frac{1}{e}-2a$,又 $\ln\left(\frac{1}{e}-2a+2a\right)=-1$,所以 $e\left(\frac{1}{e}-2a\right)-2b=-1$,可得 $ae+b=1$.因为 a,b 为正实数,所以 $\frac{1}{ea}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{ea}+\frac{1}{b}\right)(ae+b)=1+1+\frac{b}{ea}+\frac{ea}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{ea}\cdot\frac{ea}{b}}=4$,当且仅当 $\frac{b}{ea}=\frac{ea}{b}$,即 $b=ea=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 $\frac{1}{ea}+\frac{1}{b}$ 的取值范围是 $[4,+\infty)$.故选C.

例4 (1)A (2)$(-\ln 2-1,+\infty)$

[解析] (1)由 $y=x^2$，得 $y'=2x$，由 $y=4e^{x-2}$ 得 $y'=4e^{x-2}$，设曲线 C_1,C_2 的公切线与曲线 C_1 的切点为 (x_1,x_1^2)，则切线的斜率为 $2x_1$，与曲线 C_2 的切点为 $(x_2,4e^{x_2-2})$，则切线的斜率为 $4e^{x_2-2}$，所以 $2x_1=4e^{x_2-2}$. 当公切线与曲线 C_1,C_2 的切点相同时，$x_1=x_2$，$x_1^2=4e^{x_2-2}$，可得 $x_1=x_2=2$，所以切点为 $(2,4)$，此时公切线的方程为 $4x-y-4=0$；当公切线与曲线 C_1,C_2 的切点不同时，$x_1\neq x_2$，$2x_1=\frac{x_1^2-4e^{x_2-2}}{x_1-x_2}$，得 $x_1=2x_2-2$，所以 $4x_2-4=4e^{x_2-2}$，即 $x_2-1=e^{x_2-2}$，解得 $x_2=2$，此时 $x_1=2$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾，故不存在切点不同的情况. 综上可得，切点的坐标为 $(2,4)$，公切线的方程为 $4x-y-4=0$. 故选A.

(2)设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x^2+2x+a$ $(x<0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=2x+2$ $(x<0)$. 设公切线与曲线 $y=x^2+2x+a$ $(x<0)$ 的切点为 (s,t)，$s<0$，与曲线 $y=\ln x$ 的切点为 (m,n)，$m>0$，则 $2s+2=\frac{1}{m}=\frac{n-t}{m-s}$，又 $t=s^2+2s+a$，$n=\ln m$，$\therefore a=s^2-1-\ln(2s+2)$. 设 $h(s)=s^2-1-\ln(2s+2)(-1<s<0)$，则 $h'(s)=\frac{2s^2+2s-1}{s+1}<0$，$\therefore h(s)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，$\therefore h(s)>-\ln 2-1$，$\therefore a>-\ln 2-1$，即 a 的取值范围为 $(-\ln 2-1,+\infty)$.

变式题 (1)0 (2)$\ln\sqrt{2e}$ [解析] (1)设切点坐标为 (x_0,y_0)，$x_0>0$，则 $x_0^2-m=\ln x_0+x_0$ ①，由 $f(x)=x^2-m$ 可得 $f'(x)=2x$，由 $g(x)=\ln x+x$ 可得 $g'(x)=\frac{1}{x}+1$，故 $2x_0=\frac{1}{x_0}+1$②，由①②可得 $x_0=1$，$m=0$.

(2)设公切线与 $f(x)=x^2$，$g(x)=a+\ln x$ 的图象的切点分别为 (x_1,x_1^2)，$(x_2,a+\ln x_2)$，因为 $f'(x)=2x$，$g'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $2x_1=\frac{1}{x_2}$，公切线的方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，即 $y=2x_1x-x_1^2$，也可写成 $y-(a+\ln x_2)=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\frac{1}{x_2}x-1+a+\ln x_2$，

由 $\begin{cases}2x_1=\frac{1}{x_2},\\ x_1^2+a+\ln x_2-1=0,\end{cases}$ 消去 x_1 得 $\frac{1}{4x_2^2}+a+\ln x_2-1=0$，即 $1-a=\frac{1}{4x_2^2}+\ln x_2$. 令 $h(x)=\frac{1}{4x^2}+\ln x$，则 $h'(x)=\frac{2x^2-1}{2x^3}$，当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)\geqslant h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $1-a\geqslant\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a\leqslant\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2e}$，故 a 的最大值为 $\ln\sqrt{2e}$.

第 17 讲 导数与函数的单调性

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

递增 递减 $\geqslant 0$ $\leqslant 0$ 充分

【对点演练】

1. $(0,+\infty)$ [解析] 由 $f'(x)=e^x-1>0$，解得 $x>0$，故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$.

2. $>$ $>$ [解析] 设 $f(x)=e^x-1-x$，$x\neq 0$，则 $f'(x)=e^x-1$，由 $f'(x)>0$，得 $x>0$，由 $f'(x)<0$，得 $x<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)>e^0-1-0=0$，故 $e^x>1+x$，$x\neq 0$. 设 $g(x)=x-\ln x$，$x\in(1,+\infty)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>1-\ln 1=1$，所以 $x>\ln x$，$x\in(1,+\infty)$.

3. $(-\infty,2]$ [解析] 因为当 $x\leqslant 2$ 时，$e^{f'(x)}\leqslant 1$，所以当 $x\leqslant 2$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,2]$.

4. $a>0,a=0,a<0$ [解析] 因为 $y'=3ax^2-1$，所以对 a 应分 $a>0,a=0,a<0$ 三种情况讨论.

5. $(-\infty,1)$ [解析] 由 $2-x>0$，得 $x<2$，则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)$. 易知 $f'(x)=1-\frac{1}{2-x}$，令 $f'(x)>0$，可得 $\frac{1}{2-x}<1$，结合 $2-x>0$，得 $2-x>1$，解得 $x<1$，所以函数 $f(x)=x+\ln(2-x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$.

6. $(0,2]$ [解析] 方法一：由 $y'=1-\frac{a^2}{x^2}\geqslant 0$，得 $x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a$，$\therefore$ 函数 $y=x+\frac{a^2}{x}$ $(a>0)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-a]$，$[a,+\infty)$. $\because$ 函数在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore [2,+\infty)\subseteq[a,+\infty)$，$\therefore a\leqslant 2$，又 $a>0$，$\therefore 0<a\leqslant 2$.

方法二：$y'=1-\frac{a^2}{x^2}$，依题意知 $1-\frac{a^2}{x^2}\geqslant 0$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，即 $a^2\leqslant x^2$ 对任意 $x\in[2,+\infty)$ 恒成立，$\because x\in[2,+\infty)$，$\therefore x^2\geqslant 4$，$\therefore a^2\leqslant 4$，又 $a>0$，$\therefore 0<a\leqslant 2$.

● 课堂考点探究

例1 解：(1)由题可知，$f(x)=2x+\frac{1}{x}-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x^2}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2}$，令 $f'(x)<0$，得 $x\in(0,1)$，故函数 $f(x)=2x+\frac{1}{x}-\ln x$ 的单调递减区间为 $(0,1)$.

(2)由题知 $f'(x)=(x-1)\sin x$，因为当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$\sin x<0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x>0$，所以当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 和 $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

(3)由题意，函数 $f(x)=\ln(x+1)+e^{-x}$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{e^x-(x+1)}{(x+1)e^x}$. 易知 $(x+1)e^x>0$，令 $m(x)=e^x-(x+1)(x>-1)$，则 $m'(x)=e^x-1$，由 $m'(x)=0$，得 $x=0$，可得当 $x\in(-1,0)$ 时，$m'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m(x)\geqslant m(0)=e^0-1=0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,+\infty)$.

变式题 (1)$\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ (2)D

[解析] (1)函数 $f(x)=\ln(2x-1)-x^2+x$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，且 $f'(x)=\frac{2}{2x-1}-2x+1=\frac{2-(2x-1)^2}{2x-1}=\frac{[\sqrt{2}-(2x-1)][\sqrt{2}+(2x-1)]}{2x-1}$，令 $f'(x)>0$，解得 $\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2)易知 $f'(x)$ 的图象过点 $(0,0)$ 与点 $\left(\frac{4}{3},0\right)$，当 $x<0$ 或 $1<x<4$ 时，$f'(x)>f(x)$，即 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(1,4)$.

(3)解：$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g'(x)=e^x(\cos x-\sin x+2x-2)+e^x(-\sin x-\cos x+2)=2e^x(x-\sin x)$.

令 $p(x)=x-\sin x$，则 $p'(x)=1-\cos x$，因为 $\cos x\in[-1,1]$，所以 $p'(x)=1-\cos x\geqslant 0$ 恒成立，所以函数 $p(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $p(0)=0$，所以当 $x<0$ 时，$p(x)<0$，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，$p(x)>0$，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增.

综上，函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

例2 解：$f(x)=2a\ln x+\frac{3}{4}x^2-(a+3)x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2a}{x}+\frac{3}{2}x-a-3=\frac{(3x-2a)(x-2)}{2x}$.

若 $a\leqslant 0$，则当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；若 $0<a<3$，则当 $x\in\left(0,\frac{2a}{3}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\frac{2a}{3},2\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；若 $a=3$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$f(x)$ 单调递增；若 $a>3$，则当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(2,\frac{2a}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\frac{2a}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. 综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,2)$；当 $0<a<3$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{2a}{3}\right)$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减区间为 $\left(\frac{2a}{3},2\right)$；当 $a=3$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a>3$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2)$ 和 $\left(\frac{2a}{3},+\infty\right)$，单调递减区间为 $\left(2,\frac{2a}{3}\right)$.

变式题 解：(1)$f'(x)=2e^{2x}+(2-2a)e^x-2a=2(e^x+1)(e^x-a)$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $e^x>0$，所以 $f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a$，由 $f'(x)>0$，得 $x\in(\ln a,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，由 $f'(x)<0$，得 $x\in(-\infty,\ln a)$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递

减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增.

(2)因为$f(x)=ax^2-\ln x-x$，$x\in(0,+\infty)$，所以$f'(x)=2ax-\frac{1}{x}-1=\frac{2ax^2-x-1}{x}$. 当$a\leqslant 0$时，$2ax^2-x-1\leqslant -x-1<-1<0$，

故$2ax^2-x-1<0$恒成立，所以$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

当$a>0$时，令$2ax^2-x-1=0$，解得$x=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}$(舍去负根)，令$f'(x)>0$，得$x>\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}$，此时$f(x)$单调递增，令$f'(x)<0$，得$0<x<\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}$，此时$f(x)$单调递减.

综上所述，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

当$a>0$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4a},+\infty\right)$上单调递增.

例3 解：(1)$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2a\ln x-2x$，则$f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2(x>0)$，函数$f(x)$在区间(1,2)上单调递增等价于对任意$x\in(1,2)$，$f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2\geqslant 0$恒成立，可得$x^2-2x\geqslant -2a$对任意$x\in(1,2)$恒成立. 设$g(x)=x^2-2x$，可知$g(x)$的图象开口向上，对称轴方程为$x=1$，$g(x)$在(1,2)上单调递增，

∵$g(1)=-1$，∴$-1\geqslant -2a$，解得$a\geqslant\frac{1}{2}$，故a的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)由(1)可得$f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2(x>0)$，函数$f(x)$在区间(1,2)上存在单调递减区间等价于存在$x\in(1,2)$，使得$f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2<0$成立，可得存在$x\in(1,2)$，使得$x^2-2x<-2a$成立.

由(1)知$g(x)=x^2-2x$的图象开口向上，对称轴方程为$x=1$，$g(x)$在(1,2)上单调递增，∵$g(1)=-1$，∴$-1<-2a$，解得$a<\frac{1}{2}$，则a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

(3)由(1)可得$f'(x)=x+\frac{2a}{x}-2(x>0)$，函数$f(x)$在区间(1,2)上不单调等价于$f'(x)$在(1,2)上存在变号零点，∴$f'(1)\cdot f'(2)<0$，即$a(2a-1)<0$，解得$0<a<\frac{1}{2}$，则$a$的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

变式题 (1)C (2)D [解析] (1)由题可知$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}\geqslant 0$在区间(1,2)上恒成立，即$a\geqslant\frac{1}{xe^x}$对任意$x\in(1,2)$恒成立. 令$h(x)=xe^x(x\in(1,2))$，可得$h'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x>0$，所以$h(x)=xe^x$在区间(1,2)上单调递增，所以$h(x)>h(1)=e$，故$\frac{1}{xe^x}<\frac{1}{e}$，所以$a\geqslant\frac{1}{e}$，所以$a$的最小值为$e^{-1}$. 故选C.

(2)由$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x-8\ln x$，可得$f'(x)=-x+6-\frac{8}{x}=-\frac{(x-2)(x-4)}{x}$，可得函数$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x-8\ln x$的极值点为$x=2$，$x=4$. 由$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x-8\ln x$在$[m,m+1]$上不单调，可得$m<2<m+1$或$m<4<m+1$，解得$m\in(1,2)\cup(3,4)$.

例4 (1)$(-4,1)$ (2)A [解析] (1)由$f(x)=2x-\sin 2x$得$f'(x)=2-2\cos 2x=2(1-\cos 2x)\geqslant 0$，所以函数$f(x)=2x-\sin 2x$是$\mathbf{R}$上的增函数，又由$f(-x)=-2x-\sin(-2x)=-(2x-\sin 2x)=-f(x)$得函数$f(x)$是奇函数，所以由$f(x^2)+f(3x-4)<0$得$f(x^2)<-f(3x-4)=f(4-3x)$，所以$x^2<4-3x$，即$x^2+3x-4<0$，即$(x-1)(x+4)<0$，解得$-4<x<1$.

(2)由题意得$a=\frac{1}{2\sqrt{e}}=\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$，$b=\frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}=\frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，$c=\frac{\ln 4}{4}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{2}$. 设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$0<x<e$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$单调递增，又$0<\sqrt{2}<\sqrt{e}<2<e$，所以$f(\sqrt{2})<f(\sqrt{e})<f(2)$，即$\frac{\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}<\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}<\frac{\ln 2}{2}$，所以$b<a<c$.

变式题 (1)B (2)CD [解析] (1)因为$f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当$e^x=e^{-x}$，即$x=0$时，等号成立，所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，而且$f(0)=2$. 由$f(2x+4)\geqslant 2$，得$f(2x+4)\geqslant f(0)$，则$2x+4\geqslant 0$，解得$x\geqslant -2$. 故选B.

(2)由$\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}>\sin\beta-\cos\alpha$，得$\beta-\sin\beta>\frac{\pi}{2}-\alpha-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，令$f(x)=x-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$f'(x)=1-\cos x>0$，∴$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增. ∵$\alpha,\beta$均为锐角，$f(\beta)>f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，∴$\beta>\frac{\pi}{2}-\alpha$，∴$\cos\beta<\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，$\sin\beta>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$，即$\cos\beta<\sin\alpha$，$\sin\beta>\cos\alpha$. 故选CD.

第18讲 导数与函数的极值、最值

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. (1)①极大值点 极大值 ②极小值点 极小值 (2)$f'(x_0)=0$
2. (2)①极值
②端点处的函数值$f(a)$，$f(b)$

【对点演练】

1. -3 [解析] $f'(x)=3x^2-6x$，令$f'(x)=3x^2-6x=0$，得$x=0$或$x=2$. 当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(0,2)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 故$f(x)$在$x=2$处取得极小值$f(2)=8-12+1=-3$.
2. $e-1$ [解析] $f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)=e^x-1=0$，得$x=0$. 当$x<0$时，$f'(x)<0$；当$x>0$时，$f'(x)>0$. 故函数$f(x)$在$[-1,0)$上单调递减，在$(0,1]$上单调递增，所以$f(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值是$\max\{f(-1),f(1)\}=\max\left\{\frac{1}{e}+1,e-1\right\}=e-1$.
3. $\frac{100\pi}{\pi+4}$ [解析] 设弯成圆的铁丝的长为x cm，则弯成正方形的铁丝的长为$(100-x)$cm，记正方形与圆的面积之和为S cm^2，则$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{100-x}{4}\right)^2$ $(0<x<100)$，∴$S'=\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{8}(100-x)$. 令$S'=0$，得$x=\frac{100\pi}{\pi+4}$，当$0<x<\frac{100\pi}{\pi+4}$时，$S'<0$，$S$单调递减，当$\frac{100\pi}{\pi+4}<x<100$时，$S'>0$，$S$单调递增，故当$x=\frac{100\pi}{\pi+4}$时$S$取得最小值，即当弯成圆的铁丝的长为$\frac{100\pi}{\pi+4}$ cm时，正方形与圆的面积之和最小.
4. $x=1$ 不存在 [解析] 因为$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，所以当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以$x=1$是函数$f(x)$的极小值点. 因为$g'(x)=3(x-1)^2\geqslant 0$，即$g'(x)$无变号零点，所以函数$g(x)=(x-1)^3$不存在极值点.
5. 1,4 不存在 [解析] 易知$g(x)$在[1,2]上单调递增，故$g(x)$在[1,2]上的最小值为$g(1)=1$，最大值为$g(2)=4$. 根据最值的定义，可得$g(x)$在(1,2)上的最小值和最大值均不存在.
6. $[1,+\infty)$ $[-1,+\infty)$ [解析] 对任意实数x，不等式$\sin x\leqslant a$恒成立，则$(\sin x)_{\max}\leqslant a$，即$a\geqslant 1$. 存在实数$x$，使不等式$\sin x\leqslant a$成立，则$(\sin x)_{\min}\leqslant a$，即$a\geqslant -1$.

● **课堂考点探究**

例1 AD [解析] 由图可知，当$x\in(-\infty,-2)$时，$1-x>0$，且$(1-x)f'(x)>0$，则$f'(x)>0$，$f(x)$在区间$(-\infty,-2)$上单调递增；当$x\in(-2,1)$时，$1-x>0$，且$(1-x)f'(x)<0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$(-2,1)$上单调递减；当$x\in(1,2)$时，$1-x<0$，且$(1-x)f'(x)>0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$在区间(1,2)上单调递减；当$x\in(2,+\infty)$时，$1-x<0$，且$(1-x)f'(x)<0$，则$f'(x)>0$，$f(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增. 所以函数$f(x)$的极大值为$f(-2)$，极小值为$f(2)$. 故选AD.

例2 解：(1)因为$f(x)=\ln x+x^2-3x+2$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-3=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{2}$或1. 当$0<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$，当$\frac{1}{2}<x<1$时，$f'(x)<0$，当$x>1$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)_{极大值}=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2+\frac{3}{4}$，$f(x)_{极小值}=f(1)=0$. 故$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{2},1\right)$；$f(x)$的极大值为$-\ln 2+\frac{3}{4}$，极小值为0.

(2)$f'(x)=\frac{x^2-2x+a}{x}$，$x>0$，令$g(x)=x^2-2x+a$，易知关于x的方程$x^2-2x+a=0$的判别式$\Delta=4-4a$.

①当$\Delta\leqslant 0$，即$a\geqslant 1$时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(x)$无极值点.

②当$\Delta>0$，即$a<1$时，函数$g(x)$有两个零点$x_1=1-\sqrt{1-a}$，$x_2=1+\sqrt{1-a}$.

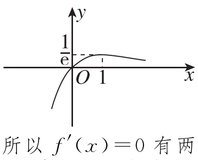
(i)当$a\leqslant 0$时，$x_1\leqslant 0$，$x_2>1$，当$x\in(0,x_2)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

$f(x)$有一个极值点；
(ii)当 $0<a<1$ 时，$0<x_1<1$，$x_2>1$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)$有两个极值点.
综上，当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$无极值点；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$有两个极值点；当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$有一个极值点.

例3 (1)$-\frac{3}{2}$ (2)$\left(-\frac{1}{2e},0\right)$

[解析] (1)∵$f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$，∴$f'(x)=3x^2+2ax+b$，又$f(x)=x^3+ax^2+bx-a^2-7a$ 在 $x=1$ 处取得极大值10，∴$f'(1)=3+2a+b=0$，$f(1)=1+a+b-a^2-7a=10$，∴$a^2+8a+12=0$，∴$a=-2$，$b=1$ 或 $a=-6$，$b=9$. 当 $a=-2$，$b=1$ 时，$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$，当 $\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，与题意不符；当 $a=-6$，$b=9$ 时，$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，∴$f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值，符合题意. 故 $\frac{b}{a}=\frac{9}{-6}=-\frac{3}{2}$.

(2)由 $f(x)=2ax-\frac{x+1}{e^x}$，得 $f'(x)=2a+\frac{x}{e^x}$，因为函数



$f(x)$有两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 有两个不同的实数根，即关于 x 的方程 $-2a=\frac{x}{e^x}$ 有两个不同的实数根. 令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，则函数 $y=g(x)$ 与 $y=-2a$ 的图象有两个不同的交点. 因为 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，所以当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，所以当 $x=1$ 时，$g(x)$取得最大值 $g(1)=\frac{1}{e}$. 作出函数 $g(x)$ 的图象如图所示，由图可知，$0<-2a<\frac{1}{e}$，解得 $-\frac{1}{2e}<a<0$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2e},0\right)$.

【应用演练】

1. BCD [解析] 函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$，由函数 $f(x)$既有极大值也有极小值，得方程 $f'(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上有两个不等实根. 令 $h(x)=ax^2-bx-2c$，则 $h(x)=0$ 在$(0,+\infty)$上有两个不等实根，故 $\begin{cases}\Delta=(-b)^2-4a(-2c)=b^2+8ac>0,\\ \frac{b}{a}>0,\\ -\frac{2c}{a}>0,\end{cases}$ 所以 $ab>0$，$ac<0$，$bc<0$，故选 BCD.

2. AD [解析] $f'(x)=6x(x-a)$. 对于A，当 $a>1$ 时，$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(a,+\infty)$上单调递增，在$(0,a)$上单调递减，故 $f(x)$的极大值为 $f(0)=1>0$，极小值为 $f(a)=1-a^3<0$，又当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，所以 $f(x)$有三个零点，A正确. 对于B，当 $a<0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,a)$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$(a,0)$上单调递减，故 $x=0$ 是 $f(x)$的极小值点，B错误. 对于C，函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$ 的图象为中心对称图形，不是轴对称图形，C错误. 对于D，方法一：令 $g(x)=f'(x)=6x^2-6ax$，则 $g'(x)=12x-6a$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{a}{2}$，则曲线 $y=f(x)$的对称中心为 $\left(\frac{a}{2},f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ $\left(验证：f\left(x+\frac{a}{2}\right)+f\left(\frac{a}{2}-x\right)=2\left(x+\frac{a}{2}\right)^3-3a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1+2\left(\frac{a}{2}-x\right)^3-3a\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+1=2-a^3=2f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$，当 $a=2$ 时，点$(1,f(1))$为曲线 $y=f(x)$的对称中心，D正确.
方法二：$f(1)=3-3a$，假设存在 a，使得点$(1,3-3a)$为曲线 $y=f(x)$的对称中心，则 $f(x)+f(2-x)=6-6a$，事实上，$f(x)+f(2-x)=2x^3-3ax^2+1+2(2-x)^3-3a(2-x)^2+1=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$，于是 $6-6a=(12-6a)x^2+(12a-24)x+18-12a$，由 $\begin{cases}12-6a=0,\\ 12a-24=0,\\ 18-12a=6-6a,\end{cases}$ 解得 $a=2$，即存在 $a=2$，使得点$(1,f(1))$为曲线 $y=f(x)$的对称中心，D正确. 故选 AD.

3. $a>2$ [解析] $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+\ln x$ 的定义域为$\{x|x>0\}$，$f'(x)=x-a+\frac{1}{x}$. 若函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-ax+\ln x$ 在$(0,2)$上有极值，则 $f'(x)=x-a+\frac{1}{x}$ 在$(0,2)$上有变号零点，即 $a=x+\frac{1}{x}$ 对 $x\in(0,2)$有解. 令 $g(x)=x+\frac{1}{x}$，$x\in(0,2)$，则 $g(x)=x+\frac{1}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，所以 $a\geqslant2$. 当 $a=2$ 时，$f'(x)=x-a+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}-2\geqslant0$，函数 $f(x)$单调递增，则函数 $f(x)$在$(0,2)$上没有极值，故 $a>2$.

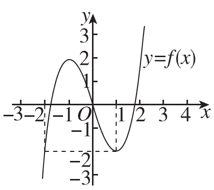
4. $-e$ [解析] 由 $f(x)=(x^2+ax-1)e^x$，得 $f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax-1)e^x$，因为 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^x$ 的极值点，所以 $f'(-2)=(-4+a)e^{-2}+(4-2a-1)e^{-2}=0$，即 $-4+a+(3-2a)=0$，解得 $a=-1$. $f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x-1)e^x=(x^2+x-2)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-2$ 或 $x=1$. 当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增；当 $-2<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$单调递增. 所以当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$取得极小值 $f(1)=(1^2-1-1)e^1=-e$.

例4 解：(1)$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，$x>0$. 若 $a\leqslant1$，则 $f'(x)\geqslant0$ 在$[1,e]$上恒成立，所以 $f(x)$在$[1,e]$上单调递增，所以 $f(x)$在$[1,e]$上的最小值为 $f(1)=a=\frac{3}{2}$，不满足题意；若 $1<a<e$，则当 $x\in[1,e]$时，令 $f'(x)<0$，解得 $1\leqslant x<a$，令 $f'(x)>0$，解得 $a<x\leqslant e$，所以函数 $f(x)$在$[1,a)$上单调递减，在$(a,e]$上单调递增，所以 $f(x)$在$[1,e]$上的最小值为 $f(a)=\ln a+1=\frac{3}{2}$，解得 $a=\sqrt{e}$，满足题意；若 $a\geqslant e$，则 $f'(x)\leqslant0$ 在$[1,e]$上恒成立，所以 $f(x)$在$[1,e]$上单调递减，所以 $f(x)$在$[1,e]$上的最小值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}=\frac{3}{2}$，解得 $a=\frac{e}{2}$，不满足题意.
综上所述，$a=\sqrt{e}$.
(2)由(1)可知若 $a\leqslant1$，则 $f(x)$在$[1,e]$上单调递增，所以 $f(x)$在$[1,e]$上的最大值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}$；若 $1<a<e$，则 $f(x)$在$[1,a)$上单调递减，在$(a,e]$上单调递增，当 $1+\frac{a}{e}\geqslant a$，即 $1<a\leqslant\frac{e}{e-1}$ 时，$f(x)$在$[1,e]$上的最大值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}$，当 $1+\frac{a}{e}<a$，即 $\frac{e}{e-1}<a<e$ 时，$f(x)$在$[1,e]$上的最大值为 $f(1)=a$；若 $a\geqslant e$，则 $f(x)$在$[1,e]$上单调递减，所以 $f(x)$在$[1,e]$上的最大值为 $f(1)=a$.
综上，当 $a\leqslant\frac{e}{e-1}$ 时，$f(x)$在$[1,e]$上的最大值为 $f(e)=1+\frac{a}{e}$；当 $a>\frac{e}{e-1}$ 时，$f(x)$在$[1,e]$上的最大值为 $f(1)=a$.

变式题 (1)0 $\frac{1}{4}-\ln 2$ (2)$[-2,1)$

(3)1 [解析] (1)∵函数 $f(x)=x^2+\ln(x+1)$，∴$f'(x)=2x+\frac{1}{x+1}=\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{x+1}$ $(x>-1)$，当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$在区间$\left[-\frac{1}{2},0\right]$上单调递增，∴$f(x)$在区间$\left[-\frac{1}{2},0\right]$上的最小值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2$，最大值为 $f(0)=0$.

(2)∵$f(x)=x^3-3x$，∴$f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=3x^2-3=0$ 得 $x=\pm1$. 当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，当 $-1<x<1$ 时，



$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，又 $f(-1)=2$，$f(1)=-2$，令 $f(x)=x^3-3x=-2$，解得 $x=-2$ 或 $x=1$，∴$f(x)$的图象如图所示. 由图可知，若当 $x\in(a,a+4)$时 $f(x)$存在最小值，则 $-2\leqslant a<1<a+4$，解得 $-2\leqslant a<1$，即实数 a 的取值范围为$[-2,1)$.

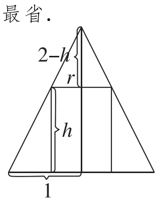
(3)由 $f(x)=e^x-ax$，得 $f'(x)=e^x-a$. 当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在 **R** 上单调递增，因此函数 $f(x)$在 **R** 上没有最小值；当 $a>0$ 时，若 $x>\ln a$，则 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，若 $x<\ln a$，则 $f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，因此当 $a>0$ 时，$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$. 由 $g(x)=ax-\ln x$，得 $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$，$x>0$. 当 $a\leqslant0$ 时，$g'(x)<0$，所以函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，因此函数 $g(x)$在$(0,+\infty)$上没有最小值；当 $a>0$ 时，若 $x>\frac{1}{a}$，则 $g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，若 $0<x<\frac{1}{a}$，则 $g'(x)<0$，所以函数 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递减，因此当 $a>0$ 时，$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$. 由题意可知 $a-a\ln a=1+\ln a(a>0)$，即 $\frac{a-1}{a+1}=\ln a$，即 $\frac{a-1}{a+1}-\ln a=0$. 设

$h(a)=\frac{a-1}{a+1}-\ln a\ (a>0)$，则 $h'(a)=\frac{a+1-(a-1)}{(a+1)^2}-\frac{1}{a}=\frac{-a^2-1}{a(a+1)^2}<0$，所以函数 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $h(1)=0$，所以方程 $\frac{a-1}{a+1}-\ln a=0$ 的解为 1，则 $a=1$.

例 5 (1)A (2)3 [解析] (1)设利润为 $g(x)$ 万元，则 $g(x)=f(x)-1-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{16}ax^2+\frac{1}{2}x-1-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{16}ax^2-1$，$0<x\leqslant 8$，由题意得 $g(2)=-\frac{1}{8}\times 2^3+\frac{9}{16}a\times 2^2-1=2.5$，解得 $a=2$，∴ $g(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{9}{8}x^2-1$，∴ $g'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{4}x=-\frac{3}{8}x(x-6)$. 易知函数 $g(x)$ 在 $(0,6)$ 上单调递增，在 $(6,8]$ 上单调递减，∴当 $x=6$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值，也是最大值，故选 A.

(2)设圆柱的高为 h，底面半径为 r，则由圆柱的体积公式可得 $\pi r^2h=27\pi$，解得 $h=\frac{27}{r^2}$，则无盖圆柱的表面积 $f(r)=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{27}{r^2}$. 易知 $f'(r)=2\pi r-\frac{54\pi}{r^2}=\frac{2\pi(r^3-27)}{r^2}$，令 $f'(r)>0$，可得 $r>3$，令 $f'(r)<0$，可得 $0<r<3$，∴ $f(r)$ 在 $(0,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，则当 $r=3$ 时，$f(r)$ 取得最小值，即用料最省.

变式题 (1)C (2)A



[解析] (1)如图，作出轴截面，设圆柱的底面半径为 $r(0<r<1)$，高为 h，则由 $\frac{2-h}{r}=\frac{2}{1}$，得 $h=2-2r$，所以圆柱的体积为 $V(r)=\pi r^2h=2\pi r^2(1-r)$，则 $V'(r)=-2\pi(3r^2-2r)$. 令 $V'(r)=0$，得 $r=\frac{2}{3}$，易知当 $0<r<\frac{2}{3}$ 时，$V(r)$ 单调递增，当 $\frac{2}{3}<r<1$ 时，$V(r)$ 单调递减，所以 $V(r)_{\max}=V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}\pi$.

(2)设行驶速度为 x km/h，甲、乙两城的距离为 a km，比例系数为 k，总费用为 $f(x)$ 元，则 $f(x)=(kx^3+200)\frac{a}{x}=a\left(kx^2+\frac{200}{x}\right)(0<x\leqslant 100)$. 由已知条件，得 $40=k\cdot 20^3$，∴ $k=\frac{1}{200}$，∴ $f(x)=a\left(\frac{1}{200}x^2+\frac{200}{x}\right)$. 令 $f'(x)=\frac{a(x^3-20\,000)}{100x^2}=0$，解得 $x=10\sqrt[3]{20}$，当 $0<x<10\sqrt[3]{20}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $10\sqrt[3]{20}<x\leqslant 100$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，∴当 $x=10\sqrt[3]{20}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，∴要使总费用最少，行驶速度应为 $10\sqrt[3]{20}$ km/h.

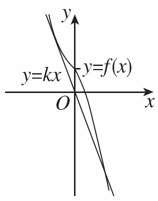
增分微课 4 利用切线解决最值范围问题

例 1 (1)D (2)C [解析] (1)由题得 $g'(x)=2x-\frac{2}{x}$，当函数 $g(x)=x^2-2\ln x$ 的图象在点 Q 处的切线与 $f(x)=3x-4$ 的图象平行时，令 $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=3$，解得 $x=2$ 或 $x=-\frac{1}{2}$（舍），所以切点为 $Q(2,4-2\ln 2)$，由点到直线的距离公式得，$|PQ|$ 的最小值为 $\frac{|6-4+2\ln 2-4|}{\sqrt{10}}=\frac{|2\ln 2-2|}{\sqrt{10}}$，所以 $|PQ|^2$ 的最小值为 $\frac{(2\ln 2-2)^2}{10}=\frac{2}{5}(1-\ln 2)^2$.

(2)由 $(a+1)^2+(b-2)^2=1$ 可得点 (a,b) 在以 $(-1,2)$ 为圆心，1 为半径的圆上，$(x-a)^2+(\ln x-b)^2$ 表示点 (a,b) 与点 $(x,\ln x)$ 的距离的平方，即表示圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ 上的动点到函数 $y=\ln x$ 的图象上动点距离的平方. 设 $(m,\ln m)$ 为 $y=\ln x$ 的图象上一点，且 $y=\ln x$ 的图象在点 $(m,\ln m)$ 处的切线与点 $(m,\ln m)$ 和点 $(-1,2)$ 的连线垂直，由 $y=\ln x$ 得 $y'=\frac{1}{x}$，则 $\frac{\ln m-2}{m+1}\cdot\frac{1}{m}=-1$，可得 $\ln m+m^2+m=2$. 由 $f(x)=\ln x+x^2+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=2$，可得 $m=1$，所以切点为 $(1,0)$，圆心与切点的距离 $d=\sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$，由此可得 $(x-a)^2+(\ln x-b)^2$ 的最小值为 $(2\sqrt{2}-1)^2=9-4\sqrt{2}$.

变式题 $\sqrt{2}$ [解析] 因为曲线 $y=\ln(x-1)$ 是由曲线 $y=\ln x$ 向右平移 1 个单位长度得到的，曲线 $y=e^{x-1}$ 是由曲线 $y=e^x$ 向右平移 1 个单位长度得到的，所以 $|PQ|$ 的最小值可以看成曲线 $y=\ln x$ 上的点与曲线 $y=e^x$ 上的点间的距离的最小值. 因为 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数，其图象关于直线 $y=x$ 对称，所以所求的最小值为曲线 $y=e^x$ 上的点 A 到直线 $y=x$ 的最小距离的 2 倍，设与直线 $y=x$ 平行的直线与曲线 $y=e^x$ 相切于点 $M(x_0,e^{x_0})$，因为 $y'=e^x$，所以由 $e^{x_0}=1$，得 $x_0=0$，所以切点为 $M(0,1)$，所以点 A 到直线 $y=x$ 的最小距离 $d=\frac{|0-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

例 2 (1)A (2)D



[解析] (1)依题意可知，$y=f(x)$ 的图象与 $y=kx$ 的图象有两个公共点，画出 $f(x)$ 的图象与 $y=kx$ 的图象如图所示. 由图可知，$y=kx$ 的图象与 $y=e^{-x}(x\leqslant 0)$ 的图象相切，设切点为 (t,e^{-t})，因为 $(e^{-x})'=-e^{-x}$，所以切线的斜率为 $-e^{-t}$，所以 $-e^{-t}=\frac{e^{-t}}{t}$，解得 $t=-1$，则 $k=-e^{-(-1)}=-e$.

(2) $f(x)=e\ln x-|x-a|$，$x\in[1,e^2]$ 的图象与 x 轴有且仅有两个交点，等价于函数 $y=e\ln x$ 与 $y=|x-a|$ 的图象在 $[1,e^2]$ 上有且仅有两个交点. 由 $y=e\ln x$，得 $y'=\frac{e}{x}$. 当直线 $y=x-a$ 与 $y=e\ln x$ 的图象相切时，有 $\frac{e}{x}=1$，得 $x=e$，即切点为 (e,e)，此时 $a=0$；当直线 $y=x-a$ 过点 $(e^2,2e)$ 时，得 $a=e^2-2e$. 要使函数 $y=e\ln x$ 与 $y=|x-a|$ 的图象在 $[1,e^2]$ 上有且仅有两个交点，只需 $a\in(0,e^2-2e]$.

变式题 (1)A (2)C [解析] (1)由题知 $f'(x)=e^x$，当函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象相切时，设切点为 $(x_0,e^{x_0})(x_0<1)$，则切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$，将点 $(-2,0)$ 的坐标代入，可得 $x_0=-1$，则 $k=e^{-1}=\frac{1}{e}$. 当函数 $g(x)$ 的图象过点 $(1,e)$ 时，可得 $k=\frac{e}{3}$. 要使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象恰有两个不同的交点，只需 $\frac{1}{e}<k<\frac{e}{3}$.

(2)由题意，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 2 个不相等的实数解，即 $y=f(x)$ 与 $y=kx-1$ 的图象有 2 个交点. 当 $k=0$ 时，直线 $y=-1$ 与 $y=\frac{2}{x}$ 的图象交于点 $(-2,-1)$，又当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x-1\geqslant 0$，所以直线 $y=-1$ 与 $y=e^x-1(x\geqslant 0)$ 的图象无公共点，故当 $k=0$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=kx-1$ 的图象只有 1 个交点，不符合题意；当 $k>0$ 时，若直线 $y=kx-1$ 与 $y=e^x-1(x\geqslant 0)$ 的图象相切，则 $y=f(x)$ 与 $y=kx-1$ 的图象有 2 个交点，设切点为 $(x_0,e^{x_0}-1)$，则 $k=e^{x_0}$，又直线 $y=kx-1$ 过点 $(0,-1)$，所以 $\frac{e^{x_0}-1-(-1)}{x_0-0}=e^{x_0}$，解得 $x_0=1$，所以 $k=e$；当 $k<0$ 时，若直线 $y=kx-1$ 与 $y=\frac{2}{x}(x<0)$ 的图象相切，则由 $\frac{2}{x}=kx-1$，得 $kx^2-x-2=0$，所以 $\Delta=1+8k=0$，可得 $k=-\frac{1}{8}$，所以当 $-\frac{1}{8}<k<0$ 时，直线 $y=kx-1$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点. 综上所述，实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{8},0\right)\cup\{e\}$.

增分微课 5 构造法在解决函数、导数问题中的应用

例 1 (1)B (2)C [解析] (1)构造函数 $y=\sin x-x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $y'=\cos x-1<0$，所以函数 $y=\sin x-x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，又当 $x=0$ 时，$y=0$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x-x<0$，即 $\sin x<x$，所以 $a=\sin 0.5<0.5$. 因为 $2\log_{0.3}0.5=\log_{0.3}0.25>\log_{0.3}0.3=1$，且 $\log_{0.3}0.5<\log_{0.3}0.3=1$，所以 $0.5<c=\log_{0.3}0.5<1$，又 $b=3^{0.5}>3^0=1$，所以 $a<c<b$. 故选 B.

(2)构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<e$，令 $f'(x)<0$，解得 $x>e$，∴ $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $[e,+\infty)$ 上单调递减. ∵ $c=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，$b=\frac{1}{e}=\frac{\ln e}{e}$，且 $e<3<4$，∴ $f(e)>f(3)>f(4)$，即 $\frac{\ln 4}{4}<\frac{\ln 3}{3}<\frac{\ln e}{e}$，∴ $c<a<b$.

变式题 A [解析] 因为 $\frac{c}{b}=4\tan\frac{1}{4}$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x<x<\tan x$，所以 $\tan\frac{1}{4}>\frac{1}{4}$，即 $\frac{c}{b}>1$，所以 $c>b$；设 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=-\sin x+x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f(0)=0$，即 $\cos\frac{1}{4}-\frac{31}{32}>0$，所以 $b>a$. 所以 $c>b>a$，故选 A.

例 2 (1)B (2)D (3)ABC

[解析] (1)构造函数 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g'(x)=f'(x)-2x>0$，所以 $g(x)$ 在 **R** 上单调递增，且 $g(1)=f(1)-1=1$. 由 $f(2x)-4x^2-1>0$ 可得 $f(2x)-(2x)^2>1$，即 $g(2x)>g(1)$，所以 $2x>1$，解得 $x>\frac{1}{2}$，故选 B.

(2)由 $xf'(x)=(1-x)f(x)$ 变形得 $\frac{f(x)-xf'(x)}{f(x)}=x$，从而有 $\frac{f(x)-xf'(x)}{[f(x)]^2}=\frac{x}{f(x)}$，即 $\left[\frac{x}{f(x)}\right]'=\frac{x}{f(x)}$，所以 $\frac{x}{f(x)}=k\cdot e^x$，因为 $f(1)>0$，所以 $k=\frac{1}{f(1)e^1}>0$，则 $f(x)=\frac{x}{k\cdot e^x}$，则 $f'(x)=\frac{ke^x-kx\cdot e^x}{k^2e^{2x}}=\frac{k(1-x)}{k^2e^x}$，故当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)$，$f(2)<f(1)$，又 $f\left(\frac{1}{2}\right)-f(2)=\frac{1}{2k\sqrt{e}}-\frac{2}{ke^2}=\frac{e^{\frac{3}{2}}-4}{2ke^2}$，而 $e^3>2.7^3\approx19.7>16$，所以 $e^{\frac{3}{2}}>4$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)>f(2)$. 综上，$f(2)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(1)$. 故选 D.

(3)因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos x>0$，所以由 $f'(x)-\tan x\cdot f(x)<0$，得 $\cos x\cdot f'(x)-\sin x\cdot f(x)<0$，即 $[\cos x\cdot f(x)]'<0$，所以函数 $y=\cos x\cdot f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减. 因为 $0<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos 0\cdot f(0)>\cos\frac{\pi}{6}\cdot f\left(\frac{\pi}{6}\right)>\cos\frac{\pi}{4}\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\cos\frac{\pi}{3}\cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，即 $f(0)>\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)>\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，A 正确；$2f(0)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，B 正确；$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，C 正确；$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，D 错误. 故选 ABC.

变式题 (1)$(0,+\infty)$ (2)A

[解析] (1)构造函数 $F(x)=f(x)\cdot e^{2x}$，则 $F'(x)=f'(x)\cdot e^{2x}+f(x)\cdot 2e^{2x}=e^{2x}[f'(x)+2f(x)]>0$，所以 $F(x)$ 在 **R** 上单调递增，且 $F(0)=f(0)\cdot e^0=1$. 不等式 $f(x)>\frac{1}{e^{2x}}$ 可化为 $f(x)e^{2x}>1$，即 $F(x)>F(0)$，所以 $x>0$，所以原不等式的解集为 $(0,+\infty)$.

(2)由题意知，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$xf'(x)-2f(x)>0$. 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，$x\in(-\infty,0)$，则 $g'(x)=\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 不等式 $f(x+2024)-(x+2024)^2f(-1)<0$ 等价于 $\frac{f(x+2024)}{(x+2024)^2}<\frac{f(-1)}{(-1)^2}$，即 $g(x+2024)<g(-1)$，所以 $\begin{cases}x+2024>-1,\\x+2024<0,\end{cases}$ 解得 $-2025<x<-2024$.

例 3 (1)C (2)B [解析] (1)∵ $f(x)=ae^x+\ln\frac{a}{x+2}-2>0$，∴ $e^{x+\ln a}+\ln a>\ln(x+2)+2$，两边同时加上 x 得，$e^{x+\ln a}+(x+\ln a)>\ln(x+2)+(x+2)=\ln(x+2)+e^{\ln(x+2)}$. 构造函数 $g(x)=x+e^x$，则 $g'(x)=1+e^x>0$，∴ $g(x)$ 在 **R** 上单调递增，∴ $x+\ln a>\ln(x+2)$，即 $\ln a>\ln(x+2)-x$. 令 $k(x)=\ln(x+2)-x$，则 $k'(x)=\frac{1}{x+2}-1=-\frac{x+1}{x+2}$，∵ $k(x)$ 的定义域是 $(-2,+\infty)$，∴当 $x\in(-2,-1)$ 时，$k'(x)>0$，$k(x)$ 单调递增，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$k'(x)<0$，$k(x)$ 单调递减，∴当 $x=-1$ 时，$k(x)$ 取得极大值，也是最大值，$k(x)_{max}=k(-1)=1$，∴ $\ln a>k(x)_{max}=1$，∴ $a>e$.

(2)由题意 $\lambda>0$，$x>1$，则不等式即为 $2\lambda e^{2\lambda x}\geqslant\ln x$，进而可得 $2\lambda xe^{2\lambda x}\geqslant e^{\ln x}\ln x$. 令 $g(x)=xe^x$，则 $g'(x)=(x+1)e^x$，当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 不等式等价于 $g(2\lambda x)\geqslant g(\ln x)$，因为 $\lambda>0$，$x>1$，所以 $2\lambda x>0$，$\ln x>0$，所以 $2\lambda x\geqslant\ln x$ 对任意 $x>1$ 恒成立，即 $2\lambda\geqslant\frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x>1$ 恒成立. 设 $h(t)=\frac{\ln t}{t}(t>1)$，则 $h'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当 $1<t<e$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增，当 $t>e$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，所以当 $t=e$ 时，$h(t)$ 取得最大值 $h(e)=\frac{1}{e}$，于是 $2\lambda\geqslant\frac{1}{e}$，解得 $\lambda\geqslant\frac{1}{2e}$.

变式题 (1)B (2)A [解析] (1)因为 $x_1>0$，$x_2>0$，所以 $e^{x_2}>1$，由题意可得 $\frac{1}{x_1}-\ln x_1=e^{-x_2}-x_2$，整理可得 $\frac{1}{x_1}-\ln x_1=\frac{1}{e^{x_2}}-\ln e^{x_2}$，即 $f(x_1)=f(e^{x_2})$. 因为 $y=\frac{1}{x}$，$y=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，可得 $x_1=e^{x_2}$，则 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{e^{x_2}}{x_2}$. 构建函数 $h(x)=\frac{e^x}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x)\geqslant h(1)=e$，所以 $\frac{x_1}{x_2}$ 的最小值为 e.

(2)正实数 t,m 满足 $t\ln\frac{m}{t}-me^t+t(t+1)\geqslant0$，则 $\ln\frac{m}{t}-\frac{m}{t}e^t+t+1\geqslant0$，所以 $\ln\frac{m}{t}+t+1\geqslant\frac{m}{t}e^t$，即 $\ln\frac{m}{t}+t+1\geqslant e^{\ln\frac{m}{t}+t}$，令 $\ln\frac{m}{t}+t=x$，则 $x+1\geqslant e^x$. 设 $f(x)=e^x-(x+1)$，则 $f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$，易知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)\geqslant f(0)=0$，所以 $e^x\geqslant x+1$，即 $e^{\ln\frac{m}{t}+t}\geqslant\ln\frac{m}{t}+t+1$，又因为 $\ln\frac{m}{t}+t+1\geqslant e^{\ln\frac{m}{t}+t}$，所以 $\ln\frac{m}{t}+t+1=e^{\ln\frac{m}{t}+t}=1$，所以 $\ln\frac{m}{t}+t=0$，所以 $\ln\frac{m}{t}=-t$，则 $\frac{m}{t}=e^{-t}$，则 $m=\frac{t}{e^t}$. 令 $g(t)=\frac{t}{e^t}(t>0)$，则 $g'(t)=\frac{1-t}{e^t}$，令 $g'(t)=0$ 得 $t=1$，易知 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(t)\leqslant g(1)=\frac{1}{e}$，故 m 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

第 19 讲 导数与不等式

/第 1 课时 利用导数研究恒(能)成立问题/

● **课堂考点探究**

例 1-1 解：当 $x<1$ 时，不等式 $2xe^x-ax-e^x+a\geqslant0$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$，$x<1$ 恒成立. 令 $f(x)=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$，$x<1$，则 $f'(x)=\frac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2}=\frac{xe^x(2x-3)}{(x-1)^2}$，所以当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在区间 $(0,1)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=1$，所以实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

例 1-2 解：存在 $x\in(0,+\infty)$，使得 $f(x)\leqslant\frac{-x^2+mx-3}{2}$ 成立，即存在 $x\in(0,+\infty)$，使得 $m\geqslant\frac{2x\ln x+x^2+3}{x}=2\ln x+x+\frac{3}{x}$ 成立，问题转化为 $m\geqslant\left(2\ln x+x+\frac{3}{x}\right)_{min}(x>0)$. 令 $g(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}$，得 $g'(x)=\frac{2}{x}+1-\frac{3}{x^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，∴ $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
∴ $g(x)_{min}=g(1)=4$，则 $m\geqslant4$，
故实数 m 的最小值为 4.

变式题 1 解：(1)∵ $f(x)=ax+x\ln x$，
∴ $f'(x)=a+\ln x+1$，∵函数 $f(x)=ax+x\ln x$ 在 $x=e$ 处取得极值，
∴ $f'(e)=a+2=0$，解得 $a=-2$，经检验，符合题意，∴ $a=-2$.

(2)由(1)知 $f(x)=-2x+x\ln x$，由题意知 $k<\frac{f(x)}{x+1}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $k<\frac{-2x+x\ln x}{x+1}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. 令 $g(x)=\frac{-2x+x\ln x}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{(-2+\ln x+1)(x+1)-(-2x+x\ln x)}{(x+1)^2}=\frac{\ln x+x-1}{(x+1)^2}$. 设 $h(x)=\ln x+x-1(x>0)$，易得 $h(x)$ 是增函数，又 $h(1)=0$，
∴当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，
当 $0<x<1$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，
∴ $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，∴ $g(x)_{min}=g(1)=-1$，
∴ $k<-1$，即 k 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

变式题 2 解：由 $f(x)=a(x+1)e^x-ax+a-e^x<0$，得 $\frac{1}{a}>x+1-\frac{x-1}{e^x}$. 令 $h(x)=x+1-\frac{x-1}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{e^x+x-2}{e^x}$.
令 $\varphi(x)=e^x+x-2$，则 $\varphi(x)=e^x+x-2$ 在 **R** 上单调递增，又 $\varphi(0)<0$，$\varphi(1)>0$，∴存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $\varphi(x_0)=0$，当 $x<x_0$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x>x_0$ 时，$\varphi(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，
又 $h(0)=2$，$h(1)=2$，$h(-1)=2e$，$h(2)=3-\frac{1}{e^2}$，$h(3)=4-\frac{2}{e^3}$.
所以当 $f(x)<0$ 有且仅有三个整数解时，有 $3-\frac{1}{e^2}<\frac{1}{a}\leqslant4-\frac{2}{e^3}$，解得

$\frac{e^3}{4e^3-2}\leqslant a<\frac{e^2}{3e^2-1}$，即实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{e^3}{4e^3-2},\frac{e^2}{3e^2-1}\right)$.

例 2 解：(1)证明：因为 $f'(x)=\frac{a-1}{x}-x+1(x>0)$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线的斜率 $k=f'(1)=a-1$.
又因为切线与直线 $y=2x$ 平行，所以 $a-1=2$，解得 $a=3$，所以 $f(x)=2\ln x-\frac{1}{2}x^2+x$，$f'(x)=\frac{2}{x}-x+1=\frac{-x^2+x+2}{x}=\frac{-(x-2)(x+1)}{x}(x>0)$.
由 $f'(x)>0$ 得 $0<x<2$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,2)$；由 $f'(x)<0$ 得 $x>2$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(2,+\infty)$. 所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值，也为最大值，且 $f(2)=2\ln 2=\ln 4$，所以 $f(x)\leqslant\ln 4$.
(2)由 $f(x)+4>g(x)$ 得 $(a-1)\ln x-\frac{1}{2}x^2+x+4>\frac{2x-a}{x}-\frac{1}{2}x^2$，

整理得 $(a-1)\ln x+\frac{a}{x}+x+2>0$.

设 $h(x)=(a-1)\ln x+\frac{a}{x}+x+2(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{a-1}{x}-\frac{a}{x^2}+1=\frac{x^2+(a-1)x-a}{x^2}=\frac{(x-1)(x+a)}{x^2}$，
$h(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.
①当 $a\geqslant-1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x)>h(1)=a+3\geqslant2>0$，满足题意.
②当 $a<-1$ 时，由 $h'(x)<0$ 得 $1<x<-a$，则函数 $h(x)$ 在 $(1,-a)$ 上单调递减，由 $h'(x)>0$ 得 $x>-a$，则函数 $h(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)$ 在 $x=-a$ 处取得极小值，也为最小值，故 $h(x)_{\min}=h(-a)=(a-1)\ln(-a)+\frac{a}{-a}-a+2=(a-1)\ln(-a)-a+1$.
依题意得 $h(x)_{\min}=(a-1)\ln(-a)-a+1>0$，可得 $\ln(-a)<1$，可得 $-e<a<-1$. 综上可得，实数 a 的取值范围为 $(-e,+\infty)$.

变式题 解：(1)由 $f(x)=ax-\ln(1-x)$，得 $f'(x)=a+\frac{1}{1-x}(x<1)$，
因为 $f(0)=0$，$f'(0)=a+1$，
所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=(a+1)x$.
(2) $f'(x)=a+\frac{1}{1-x}=\frac{-ax+a+1}{1-x}(x<1)$.
①当 $a\geqslant0$ 时，$f(-1)=-a-\ln 2<0$，不符合题意.
②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1+\frac{1}{a}$，当 $x\in\left(-\infty,1+\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,1+\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，当 $x\in\left(1+\frac{1}{a},1\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(1+\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递增，所以当 $x=1+\frac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f\left(1+\frac{1}{a}\right)=a+1+\ln(-a)$. 若 $f(x)\geqslant0$ 恒成立，则 $a+1+\ln(-a)\geqslant0$.
设 $\varphi(x)=x+1+\ln(-x)(x<0)$，则 $\varphi'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，当 $x\in(-1,0)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi(-1)=0$，即 $a+1+\ln(-a)\geqslant0$ 的解为 $a=-1$.
所以 $a=-1$.

例 3 解：(1)因为函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 设 $u(x)=x\cos x-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $u'(x)=-x\sin x<0$，故 $u(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $u(x)<u(0)=0$，即 $f'(x)<0$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$.

(2)令 $h(x)=\sin x-x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $h'(x)=\cos x-1<0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，即函数 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，
所以 $h(x)<h(0)=0$，
所以 $\sin x<x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，即 $f(x)=\frac{\sin x}{x}<1$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立.

$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}-3(x^2-1)=(1-x)\left(\frac{1}{e^x}+3x+3\right)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$3x+3+\frac{1}{e^x}>0$，当 $x\in[0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $[0,1)$ 上单调递增；当 $x\in(1,2]$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(1,2]$ 上单调递减. 故函数 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(1)=\frac{1}{e}-1+3-a=\frac{1}{e}+2-a$. 结合题意，只需 $\frac{1}{e}+2-a\geqslant1$，解得 $a\leqslant\frac{1}{e}+1$，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{e}+1\right]$.

变式题 解：(1)存在 $x_1,x_2\in[0,2]$，使得 $g(x_1)-g(x_2)\geqslant M$ 成立，等价于当 $x_1,x_2\in[0,2]$ 时，$[g(x_1)-g(x_2)]_{\max}\geqslant M$.
由 $g(x)=x^3-x^2-3$，得 $g'(x)=3x^2-2x=3x\left(x-\frac{2}{3}\right)$，在 $[0,2]$ 上，$g'(x)$，$g(x)$ 随 x 的变化情况如下表：

x	0	$\left(0,\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},2\right)$	2
$g'(x)$	0	−	0	+	8
$g(x)$	−3	单调递减	极小值 $-\frac{85}{27}$	单调递增	1

由上表可知，当 $x\in[0,2]$ 时，$g(x)_{\min}=g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{85}{27}$，$g(x)_{\max}=g(2)=1$，故 $[g(x_1)-g(x_2)]_{\max}=g(x)_{\max}-g(x)_{\min}=\frac{112}{27}$，所以满足条件的最大整数 $M=4$.

(2)方法一：由(1)知，在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上，$g(x)$ 的最大值为 $g(2)=1$.

因为对任意的 $s,t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有 $f(s)\geqslant g(t)$ 成立，所以当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$f(x)=\frac{a}{x}+x\ln x\geqslant1$ 恒成立，等价于 $a\geqslant x-x^2\ln x$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上恒成立.

记 $h(x)=x-x^2\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，则 $h'(x)=1-2x\ln x-x$，且 $h'(1)=0$.
记 $m(x)=1-2x\ln x-x$，$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，则 $m'(x)=-3-2\ln x$，因为 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，所以 $m'(x)=-3-2\ln x<0$，所以 $m(x)=h'(x)=1-2x\ln x-x$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递减，又 $h'(1)=0$，所以当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,2]$ 时，$h'(x)<0$，故函数 $h(x)=x-x^2\ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，在区间 $(1,2]$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，所以 $a\geqslant1$，即实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.
方法二：由(1)知，在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上，$g(x)$ 的最大值为 $g(2)=1$.
因为对任意的 $s,t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有 $f(s)\geqslant g(t)$ 成立，所以 $f(1)=a\geqslant1$. 下面证明：当 $a\geqslant1$ 时，在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上，函数 $f(x)\geqslant1$ 恒成立. 当 $a\geqslant1$ 且 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$f(x)=\frac{a}{x}+x\ln x\geqslant\frac{1}{x}+x\ln x$.

记 $h(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$，$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，则 $h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+1$，且 $h'(1)=0$，$h'(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递增，当 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ 时，$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+1<0$，当 $x\in(1,2]$ 时，$h'(x)=-\frac{1}{x^2}+\ln x+1>0$，所以函数 $h(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在区间 $(1,2]$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1$，即 $h(x)\geqslant1$，所以当 $a\geqslant1$ 且 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ 时，$f(x)\geqslant1$ 恒成立，故对任意的 $s,t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有 $f(s)\geqslant g(t)$ 成立，所以实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

培优专题（一） 必要性探路法之端点效应、极点效应、特殊点效应

例 1 解：方法一（端点效应+分类讨论）：
由题知，$f'(x)=-a\ln(x+1)+\frac{1-ax}{x+1}-1$，令 $g(x)=-a\ln(x+1)+\frac{1-ax}{x+1}-1$，则 $g'(x)=\frac{-a}{x+1}+\frac{-a(x+1)-(1-ax)}{(x+1)^2}=\frac{-a(x+1)-a-1}{(x+1)^2}$，令 $g'(0)=0$，则 $a=-\frac{1}{2}$. 当 $a\leqslant-\frac{1}{2}$，$x\geqslant0$ 时，$-a(x+1)-a-1\geqslant-a-a-1=-2a-1\geqslant0$，
∴$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(0)=0$，从而 $f'(x)\geqslant0$ 在 $[0,+\infty)$ 上

恒成立,∴$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,而$f(0)=0$,∴当$x\geqslant 0$时,$f(x)\geqslant 0$,故当$a\leqslant -\frac{1}{2}$时,满足题意;当$a\geqslant 0$时,$g'(x)<0$恒成立,∴$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,∴当$x\geqslant 0$时,$g(x)\leqslant g(0)=0$,即$f'(x)\leqslant 0$在$[0,+\infty)$上恒成立,∴当$x\geqslant 0$时,$f(x)\leqslant f(0)=0$,不满足题意;当$-\frac{1}{2}<a<0$时,令$g'(x)=0$,得$x=-2-\frac{1}{a}>0$,则$g(x)$在$\left[0,-2-\frac{1}{a}\right)$上单调递减,在$\left(-2-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,又$f'(0)=0$,∴当$0<x<-2-\frac{1}{a}$时,$f'(x)<f'(0)=0$,$f(x)$单调递减,而$f(0)=0$,∴$f(x)\geqslant 0$不恒成立,不满足题意.综上可得$a$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

方法二(巧妙变形+分类讨论+数形结合):由题知当$x\geqslant 0$时,$f(x)=(1-ax)\ln(x+1)-x\geqslant 0$,显然,当$x=0$时不等式成立.以下考虑当$x>0$时的情况:将$(1-ax)\ln(x+1)-x\geqslant 0$变形为$1-ax\geqslant\frac{x}{\ln(x+1)}$,令$m(x)=\frac{x}{\ln(x+1)}(x>0)$,则$m'(x)=\frac{\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}$,

令$h(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}(x>0)$,则$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}>0$,∴$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,∴$h(x)>h(0)=0$,从而$m(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,当$x\to+\infty$时,$m(x)\to+\infty$.当$a\geqslant 0$时,数形结合可知,当$x\in(0,+\infty)$时,$1-ax\geqslant\frac{x}{\ln(x+1)}$不恒成立,不满足题意.当$a<0$时,将不等式变形为$\ln(x+1)\geqslant\frac{x}{1-ax}$(此时$1-ax>0$),令$n(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{ax-1}(x>0)$,则$n'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(ax-1)^2}=\frac{a^2x^2-(2a+1)x}{(x+1)(ax-1)^2}=\frac{x[a^2x-(2a+1)]}{(x+1)(ax-1)^2}$,当$\frac{2a+1}{a^2}\leqslant 0$,即$a\leqslant-\frac{1}{2}$时,$n'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,∴$n(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,此时$n(x)>n(0)=0$,满足题意;当$\frac{2a+1}{a^2}>0$,即$-\frac{1}{2}<a<0$时,$n(x)$在$\left(0,\frac{2a+1}{a^2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{2a+1}{a^2},+\infty\right)$上单调递增,而$n(0)=0$,∴$n(x)\geqslant 0$不恒成立,故不满足题意.综上,实数$a$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.

【自测题】

解:(1)当$a=-\frac{3}{2}$时,$f(x)=-\frac{3}{2}x-\ln x-\frac{1}{2x}$,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=-\frac{3}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}=\frac{-3x^2-2x+1}{2x^2}=\frac{(-3x+1)(x+1)}{2x^2}$,令$f'(x)>0$得$0<x<\frac{1}{3}$,令$f'(x)<0$得$x>\frac{1}{3}$,故$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{3}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$上单调递减,故$f(x)$在$x=\frac{1}{3}$处取得极大值,极大值为$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{3}-\frac{3}{2}=-2+\ln 3$,无极小值.

(2)当$x\geqslant 1$时,不等式$ax-\ln x-\frac{1}{2x}\geqslant 0$恒成立,令$g(x)=ax-\ln x-\frac{1}{2x}$,$x\geqslant 1$,则$g(1)\geqslant 0$,故$a-\frac{1}{2}\geqslant 0$,解得$a\geqslant\frac{1}{2}$.

当$a\geqslant\frac{1}{2}$时,$g(x)=ax-\ln x-\frac{1}{2x}\geqslant\frac{1}{2}x-\ln x-\frac{1}{2x}$.令$t(x)=\frac{1}{2}x-\ln x-\frac{1}{2x}$,$x\geqslant 1$,则$t'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}=\frac{x^2-2x+1}{2x^2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}\geqslant 0$,

故$t(x)=\frac{1}{2}x-\ln x-\frac{1}{2x}$在$[1,+\infty)$上单调递增,故$t(x)\geqslant t(1)=0$,故$ax-\ln x-\frac{1}{2x}\geqslant 0$,满足要求.当$a<\frac{1}{2}$时,$g(1)=a-\frac{1}{2}<0$,不合要求.

综上,a的取值范围是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

例2 解:由题意知$f'(x)=ae^{x-1}-1$.注意到$f(1)=a-1-(a-1)=0$,则当$x=1$时,函数$f(x)$取得最小值,同时取得极小值,所以$f'(1)=a-1=0$,所以$a=1$.当$a=1$时,$f(x)=e^{x-1}-x$,$f'(x)=e^{x-1}-1$,当$x<1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,此时$f(x)>f(1)=0$.当$x>1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,此时$f(x)>f(1)=0$.故$f(x)\geqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立,所以$a=1$.

【自测题】

解:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

设$g(x)=ax-a-\ln x$,则$f(x)=xg(x)$,$f(x)\geqslant 0$等价于$g(x)\geqslant 0$.

因为$g(x)\geqslant 0$,$g(1)=0$,所以当$x=1$时,函数$g(x)$取得最小值,

同时也是函数$g(x)$的极小值,

所以$g'(1)=0$.

又$g'(x)=a-\frac{1}{x}$,则$g'(1)=a-1=0$,

得$a=1$.若$a=1$,则$g'(x)=1-\frac{1}{x}$.当$0<x<1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;当$x>1$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.

所以$x=1$是$g(x)$的极小值点,故$g(x)\geqslant g(1)=0$.综上,$a=1$.

例3 解:令$f(x)=ae^x+\frac{a+1}{x}-2a-2$,由$f(1)=ae+a+1-2a-2\geqslant 0$成立,得到对任意的$x>0$,$f(x)\geqslant 0$恒成立的一个必要条件为$a\geqslant\frac{1}{e-1}$.当$a=\frac{1}{e-1}$时,

$f(x)=\frac{1}{e-1}e^x+\frac{\frac{1}{e-1}+1}{x}-2\times\frac{1}{e-1}-2=\frac{1}{e-1}\left(e^x+\frac{e}{x}-2e\right)$,易证$e^x\geqslant ex$恒成立,当且仅当$x=1$时取等号,故当$x>0$时,$e^x+\frac{e}{x}-2e\geqslant ex+\frac{e}{x}-2e\geqslant 2\sqrt{ex\cdot\frac{e}{x}}-2e=0$,当且仅当$x=1$时两个等号同时成立,故当$a=\frac{1}{e-1}$时,对任意的$x>0$,$f(x)\geqslant 0$恒成立,所以正数$a$的最小值为$\frac{1}{e-1}$.

【自测题】

解:$f(x)\geqslant 1-\sin x$,即$ae^x-2x+\sin x\geqslant 1$.令$x=0$,则$a\geqslant 1$,下面证明:当$a=1$时,$e^x-2x+\sin x\geqslant 1$恒成立.

设$g(x)=e^x-2x+\sin x$,则$g'(x)=e^x+\cos x-2$,当$x<0$时,$e^x<1$,$\cos x\leqslant 1$,故$g'(x)<0$,∴$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减.令$m(x)=e^x+\cos x-2$,则$m'(x)=e^x-\sin x$,当$x>0$时,$e^x>1$,$\sin x\leqslant 1$,∴$m'(x)>0$,∴$g'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,此时$g'(x)>g'(0)=0$,∴$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

综上,$g(x)\geqslant g(0)=1$,即$e^x-2x+\sin x\geqslant 1$恒成立.

当$a\geqslant 1$时,∵$ae^x-2x+\sin x\geqslant e^x-2x+\sin x$,

∴$ae^x-2x+\sin x\geqslant 1$恒成立,故实数$a$的取值范围是$[1,+\infty)$.

/第2课时　利用导数证明不等式/

● 课堂考点探究

例1 解:(1)$f(x)=\ln x+ax^2+(a+2)x+a$,其定义域为$(0,+\infty)$,则$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+a+2=\frac{2ax^2+(a+2)x+1}{x}=\frac{(2x+1)(ax+1)}{x}(x>0)$.

①当$a\geqslant 0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

②当$a<0$时,若$x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$,则$f'(x)>0$,$f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增;若$x\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$,则$f'(x)<0$,$f(x)$在$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

综上,当$a\geqslant 0$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当$a<0$时,$f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

(2)证明:当$a<0$时,要证$f(x)\leqslant-\frac{2}{a}-2+a$,只需证$f(x)_{\max}\leqslant-\frac{2}{a}-2+a$,由(1)得,$f(x)_{\max}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}-\frac{a+2}{a}+a=\ln\left(-\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}+a-1$,即证$\ln\left(-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}+1\leqslant 0$恒成立.令$t=-\frac{1}{a}>0$,$g(t)=\ln t-t+1$ $(t>0)$,则$g'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$,

当$t\in(0,1)$时,$g'(t)>0$,$g(t)$单调递增;当$t\in(1,+\infty)$时,$g'(t)<0$,$g(t)$单调递减,∴$g(t)$的最大值为$g(1)=0$,即$g(t)\leqslant 0$,∴$\ln\left(-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}+1\leqslant 0$恒成立,原命题得证.

变式题 解:(1)函数$f(x)=\cos x+x\sin x$,$x\in(-\pi,\pi)$,求导得$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$,

当$-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$-\frac{\pi}{2}<x<0$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$0<x<\frac{\pi}{2}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$,$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

单调递减区间为 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.
$f(x)$的极小值为 $f(0)=1$.
(2)证明:当 $x\in[0,\pi)$时,令 $F(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2(\cos x+x\sin x)$,求导得 $F'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x\cos x\geqslant \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$,
令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x,x\in[0,\pi)$,求导得 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^{-x}}-2=0$,当且仅当 $x=0$时等号成立,
所以函数 $\varphi(x)$在$[0,\pi)$上单调递增,则 $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$,故 $F'(x)\geqslant0$,故 $F(x)$在$[0,\pi)$上单调递增,所以 $F(x)\geqslant F(0)=0$,所以 $2f(x)\leqslant \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

例2 解:(1)由题可得,$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$.
当 $a\leqslant0$时,$f'(x)=\frac{ax-1}{x}<0$恒成立,故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;当$a>0$时,若$x\in\left(\frac1a,+\infty\right)$,则$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,若$x\in\left(0,\frac1a\right)$,则$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.
综上所述,当$a\leqslant0$时,$f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$,无单调递增区间;
当$a>0$时,$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac1a,+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(0,\frac1a\right)$.
(2)证明:当$a\leqslant2$,且$x>1$时,$\mathrm{e}^{x-1}-f(x)=\mathrm{e}^{x-1}-a(x-1)+\ln x-1\geqslant \mathrm{e}^{x-1}-2x+1+\ln x$,令$g(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2x+1+\ln x(x>1)$,要证$\mathrm{e}^{x-1}>f(x)$恒成立,只需证$g(x)>0$恒成立.易知$g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-2+\frac1x(x>1)$,令$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{x^2}(x>1)$.
显然$h'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,则$h'(x)>h'(1)=\mathrm{e}^0-1=0$,即$g'(x)=h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,故$g'(x)>g'(1)=\mathrm{e}^0-2+1=0$,即$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,故$g(x)>g(1)=\mathrm{e}^0-2+1+\ln1=0$,得证.

变式题 解:(1)$f'(x)=(ax^2+4ax+2a+1)\mathrm{e}^x$,当$a=0$时,$f'(x)=\mathrm{e}^x>0$恒成立.
当$a\neq0$时,方程$ax^2+4ax+2a+1=0$的判别式$\Delta=4a(2a-1)$,可得当$a>\frac12$时,$f(x)$的单调递增区间为$\left(-\infty,\frac{-2a-\sqrt{2a^2-a}}{a}\right),\left(\frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a},+\infty\right)$,单调递减区间为$\left(\frac{-2a-\sqrt{2a^2-a}}{a},\frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a}\right)$.
当$0\leqslant a\leqslant\frac12$时,$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$,无单调递减区间.
当$a<0$时,$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a},\frac{-2a-\sqrt{2a^2-a}}{a}\right)$,单调递减区间为$\left(-\infty,\frac{-2a+\sqrt{2a^2-a}}{a}\right)$,$\left(\frac{-2a-\sqrt{2a^2-a}}{a},+\infty\right)$.
(2)证明:$f(x)=(ax^2+2ax+1)\mathrm{e}^x-2=[(x^2+2x)\mathrm{e}^x]a+\mathrm{e}^x-2$.当$x\geqslant0$时,令$g(a)=[(x^2+2x)\mathrm{e}^x]a+\mathrm{e}^x-2,a\leqslant-\frac17$,则$g(a)$在$\left(-\infty,-\frac17\right]$上单调递增,故$g(a)\leqslant g\left(-\frac17\right)=-\frac17(x^2+2x)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-2$.当$x\geqslant0$时,要证$f(x)<0$,只需证$-\frac17(x^2+2x)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-2<0$,
即证$(x^2+2x-7)\mathrm{e}^x+14>0$.
设$h(x)=(x^2+2x-7)\mathrm{e}^x+14,x\geqslant0$,则$h'(x)=(x^2+4x-5)\mathrm{e}^x=(x-1)(x+5)\mathrm{e}^x$,当$x\in[0,1)$时,$h'(x)<0$,故$h(x)$在$[0,1)$上单调递减;当$x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)>0$,故$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.所以当$x\geqslant0$时,$h(x)\geqslant h(1)=14-4\mathrm{e}>0$,即当$x\geqslant0$时,$f(x)<0$.
故原不等式得证.

例3 解:(1)函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\frac{a}{x}\mathrm{e}^x-\frac{b}{x^2}\mathrm{e}^{x-1}+\frac{b}{x}\mathrm{e}^{x-1}$.由题意可得$f(1)=b=2$,$f'(1)=a\mathrm{e}-b+b=\mathrm{e}$,故$a=1,b=2$.
(2)证明:由(1)知,$f(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\frac2x \mathrm{e}^{x-1}$,又$x>0$,故$f(x)>1$等价于$x\ln x>x\mathrm{e}^{-x}-\frac2{\mathrm{e}}$.设函数$g(x)=x\ln x$,则$g'(x)=1+\ln x$.当$x\in\left(0,\frac1{\mathrm{e}}\right)$时,$g'(x)<0$,当$x\in\left(\frac1{\mathrm{e}},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$,故$g(x)$在$\left(0,\frac1{\mathrm{e}}\right)$上单调递减,在$\left(\frac1{\mathrm{e}},+\infty\right)$上单调递增,故$g(x)$的最小值为$g\left(\frac1{\mathrm{e}}\right)=-\frac1{\mathrm{e}}$.
设函数$h(x)=x\mathrm{e}^{-x}-\frac2{\mathrm{e}},x>0$,则$h'(x)=\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.当$x\in(0,1)$时,$h'(x)>0$,当$x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)<0$,故$h(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,故$h(x)$的最大值为$h(1)=-\frac1{\mathrm{e}}$.综上,当$x>0$时,$g(x)>h(x)$,即$f(x)>1$.

变式题 解:(1)函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,∵$f'(x)=\frac{\mathrm{e}}{x}-a=\frac{\mathrm{e}-ax}{x}(x>0)$,∴当$a\leqslant0$时,$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,故函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当$a>0$时,由$f'(x)>0$,得$0<x<\frac{\mathrm{e}}{a}$,由$f'(x)<0$,得$x>\frac{\mathrm{e}}{a}$,即函数$f(x)$在$\left(0,\frac{\mathrm{e}}{a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{\mathrm{e}}{a},+\infty\right)$上单调递减.
综上,当$a\leqslant0$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当$a>0$时,$f(x)$在$\left(0,\frac{\mathrm{e}}{a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{\mathrm{e}}{a},+\infty\right)$上单调递减.
(2)证明:要证$f(x)-\frac{\mathrm{e}^x}{x}+2\mathrm{e}\leqslant0$,只需证明$f(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}^x}{x}-2\mathrm{e}$.
由(1)知,当$a=\mathrm{e}$时,函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,
∴$f(x)_{\max}=f(1)=-\mathrm{e}$.
令$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-2\mathrm{e}(x>0)$,则$g'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$,∴当$x\in(0,1)$时,$g'(x)<0$,函数$g(x)$单调递减,
当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)>0$,函数$g(x)$单调递增,
∴$g(x)_{\min}=g(1)=-\mathrm{e}$,
∴当$a=\mathrm{e}$时,$f(x)-\frac{\mathrm{e}^x}{x}+2\mathrm{e}\leqslant0$.

/第3课时 放缩法证明不等式/

● 课堂考点探究

例1 证明:设$g(x)=f(x)-(x+1)=\mathrm{e}^x-x-1(x>-2)$,则$g'(x)=\mathrm{e}^x-1$,当$-2<x<0$时,$g'(x)<0$,当$x>0$时,$g'(x)>0$,故$g(x)$在$(-2,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$g(x)_{\min}=g(0)=0$,所以$f(x)\geqslant x+1$(当且仅当$x=0$时取等号).
设$h(x)=x+1-\ln(x+2)(x>-2)$,则$h'(x)=1-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}$,当$-2<x<-1$时,$h'(x)<0$,当$x>-1$时,$h'(x)>0$,故$h(x)$在$(-2,-1)$上单调递减,在$(-1,+\infty)$上单调递增,所以$h(x)_{\min}=h(-1)=0$,所以$x+1\geqslant\ln(x+2)$(当且仅当$x=-1$时取等号).
因为$f(x)\geqslant x+1$与$x+1\geqslant\ln(x+2)$的等号不能同时取到,所以当$x>-2$时,$f(x)>\ln(x+2)$.

变式题 证明:构造函数$g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$,则$g'(x)=\mathrm{e}^x-1$,令$g'(x)>0$,得$x>0$,令$g'(x)<0$,得$x<0$,故$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,0)$上单调递减,所以$g(x)\geqslant g(0)=0$,则$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$(当且仅当$x=0$时取等号).
构造函数$h(x)=\ln x-x+1,x>0$,则$h'(x)=\frac1x-1=\frac{1-x}{x},x>0$,令$h'(x)>0$,得$0<x<1$,令$h'(x)<0$,得$x>1$,故$h(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,所以$h(x)\leqslant h(1)=0$,则$\ln x\leqslant x-1$(当且仅当$x=1$时取等号).因为$a\geqslant\frac1{\mathrm{e}}$,所以$a\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\ln a}\geqslant x+\ln a+1\geqslant x+\ln\frac1{\mathrm{e}}+1=x$,又$\ln x+1\leqslant x-1+1=x$,所以$a\mathrm{e}^x\geqslant\ln x+1$,当且仅当$a=\frac1{\mathrm{e}},x=1$时等号成立,所以当$a\geqslant\frac1{\mathrm{e}}$时,$f(x)\geqslant0$.

例2 解:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-1=\frac{1-x^2-\ln x}{x^2}$.令$g(x)=1-x^2-\ln x,x>0$,则$g'(x)=-2x-\frac1x<0$,∴$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,∵$g(1)=0$,∴当$x\in(0,1)$时,$g(x)>0,f'(x)>0,f(x)$单调递增,当$x\in(1,+\infty)$时,$g(x)<0,f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,∴$f(x)_{\max}=f(1)=-1$.
(2)证明:由(1)知$f(x)=\frac{\ln x}{x}-x\leqslant-1$,即$\ln x\leqslant x(x-1)$,当且仅当$x=1$时等号成立,即$\ln(x+1)\leqslant x(x+1)$,当且仅当$x=0$时等号成立.
令$x=\frac1n$,∵$n\in \mathbf{N}^*$,∴$\ln\left(\frac1n+1\right)<\frac1n\left(\frac1n+1\right)=\frac{n+1}{n^2}$,即$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{n+1}{n^2}$,∴$\frac{2}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{n^2}>\ln2+\ln\frac32+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$,即$\ln(n+1)<\frac{2}{1^2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n+1}{n^2},n\in \mathbf{N}^*$.

变式题 解:(1)当$a=0$时,$f(x)=\mathrm{e}^x-x$,$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$,当$x<0$时,$f'(x)<0$;当$x>0$时,$f'(x)>0$.所以函数$f(x)$在$[-\mathrm{e},0]$上单调递减,在$[0,\mathrm{e}]$上单调递增,所以函数$f(x)$在$[-\mathrm{e},\mathrm{e}]$上的最小值为$f(0)=\mathrm{e}^0-0=1$.易知$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}>f(-\mathrm{e})=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}}+\mathrm{e}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}+\mathrm{e}$,则函数$f(x)$在$[-\mathrm{e},\mathrm{e}]$上的最大值为$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}$.
(2)若对任意$x\in \mathbf{R}$,不等式$f(x)\geqslant0$恒

成立，即 $e^x\geqslant(a+1)x$ 恒成立. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，可得 $a\leqslant\frac{e^x}{x}-1$ 恒成立.

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}-1,x>0$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$. 令 $g'(x)>0$，得 $x>1$，令 $g'(x)<0$，得 $0<x<1$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $g(1)=e-1$，所以 $a\in(-\infty,e-1]$. 当 $x\in(-\infty,0]$ 时，若 $a\geqslant-1$，则 $e^x\geqslant(a+1)x$ 恒成立；若 $a<-1$，取 $x=\frac{1}{a+1}<0$，则 $e^{\frac{1}{a+1}}<1$，不满足题意，所以 $a\geqslant-1$.

综上，a 的取值范围为 $[-1,e-1]$.

(3)证明：在(2)中，令 $a=e-1$，可知对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $e^x\geqslant ex$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，两边同时取对数得 $x\geqslant1+\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 $\ln x\leqslant x-1$，可得 $\ln(x+1)\leqslant x$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)<\frac{1}{n}$，

即 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$.

例3 证明：(1)由 $g(x)=\ln x+x+3$，得 $g'(x)=\frac{1}{x}+1$. 设切点坐标为 $(x_0,g(x_0))$，由 $\frac{1}{x_0}+1=2$，得 $x_0=1$，所以 $g(x_0)=4$，则切点坐标为 $(1,4)$，则切线方程为 $y-4=2(x-1)$，即 $y=2x+2$，所以直线 $y=2x+2$ 是曲线 $y=g(x)$ 的一条切线.

(2)令 $h(x)=g(x)-(2x+2)=\ln x-x+1\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)\leqslant h(x)_{max}=h(1)=0$，即 $g(x)\leqslant2x+2\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$. 要证 $f(x)+\pi>g(x)$，只需证 $f(x)+\pi>2x+2$，即证 $2x\sin x+\pi>2x+2$. 令 $m(x)=x-\sin x$，则 $m'(x)=1-\cos x>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，所以 $m(x)=x-\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$m(x)>m(0)=0$，即 $x>\sin x$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x\sin x>2\sin^2x$，故只需证明当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2\sin^2x+\pi\geqslant2x+2$.

令 $F(x)=2\sin^2x-2x+\pi-2\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $F'(x)=4\sin x\cos x-2=2\sin2x-2\leqslant0$，所以 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$F(x)\geqslant F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times1^2-2\times\frac{\pi}{2}+\pi-2=0$，即 $2\sin^2x+\pi\geqslant2x+2$. 综上，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)+\pi>g(x)$.

变式题 证明：(1)令 $g(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$，则 $g'(x)=-\sin x+x$，令 $k(x)=g'(x)$，则 $k'(x)=-\cos x+1\geqslant0$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，故 $g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\geqslant0$ 时，$g'(x)\geqslant g'(0)=0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\geqslant0$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=0$，即当 $x\geqslant0$ 时，$\cos x\geqslant1-\frac{1}{2}x^2$.

(2)当 $x\in[0,+\infty)$ 时，由(1)得 $x\geqslant\sin x$，且 $\cos x\geqslant1-\frac{1}{2}x^2$. 对于 $a\geqslant1$，$x\in[0,+\infty)$，要证 $xe^{ax}+x\cos x+1\geqslant(1+\sin x)^2$，只需证 $xe^x+x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)+1\geqslant(1+x)^2$，即证 $xe^x-\frac{1}{2}x^3-x^2-x\geqslant0$. 当 $x=0$ 时，显然成立；当 $x>0$ 时，即证 $e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\geqslant0$. 令 $h(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1,x>0$，则 $h'(x)=e^x-x-1$. 令 $\varphi(x)=h'(x),x>0$，则 $\varphi'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，故 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x>0$ 时，$h'(x)>h'(0)=0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)>h(0)=0$，即 $e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$.

综上，当 $a\geqslant1$ 时，不等式 $f(x)\geqslant(1+\sin x)^2$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立.

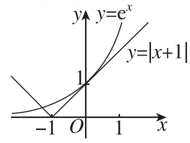
第20讲 利用导数研究函数的零点

● 课堂考点探究

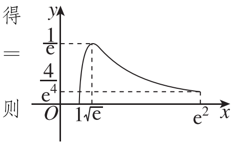
例1 解：由题可得，$f'(x)=\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$，因为 $y=\frac{1}{4}e^x$ 和 $y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，所以 $f'(x)=\frac{1}{4}e^x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}}-1<0$，$f'(1)=\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}>0$，所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，使得 $f'(x_0)=0$，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $f\left(\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{100}}-\frac{1}{10}>0$，$f(1)=\frac{e}{4}-1<0$，$f(4)=\frac{1}{4}e^4-2>0$，所以 $f(x)$ 有两个零点.

变式题 (1)C (2)2 [解析] (1)$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，又 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0$，$f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1>0$，$f(\pi)=-2<0$，故函数 $f(x)$ 的零点个数为2.



(2)令 $f(x)=e^x-|x+1|=0$，得 $e^x=|x+1|$，画出 $y=e^x$ 与 $y=|x+1|$ 的图象如图所示，当 $x>-1$ 时，$y=|x+1|=x+1$. 因为 $(e^x)'=e^x$，所以 $y=e^x$ 的图象在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y-1=e^0(x-0)$，即 $y=x+1$，所以由图可知 $y=e^x$ 与 $y=|x+1|$ 的图象有两个交点，即 $f(x)$ 有两个零点.



例2 解：由 $f(x)=0$，得 $a=\frac{2\ln x}{x^2}$，令 $g(x)=\frac{2\ln x}{x^2},x\in[1,e^2]$，则 $g'(x)=\frac{2-4\ln x}{x^3}$，由 $g'(x)>0$ 得 $1\leqslant x<\sqrt{e}$，由 $g'(x)<0$，得 $\sqrt{e}<x\leqslant e^2$，所以 $g(x)$ 在区间 $[1,\sqrt{e}]$ 上单调递增，在区间 $[\sqrt{e},e^2]$ 上单调递减，

又 $g(1)=0$，$g(\sqrt{e})=\frac{1}{e}$，$g(e^2)=\frac{4}{e^4}$，所以函数 $g(x)$ 的图象如图所示，由图可知，当 $0\leqslant a<\frac{4}{e^4}$ 或 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有1个零点；当 $\frac{4}{e^4}\leqslant a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上有2个零点；当 $a<0$ 或 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e^2]$ 上没有零点.

变式题 解：由题得 $f'(x)=ae^{ax}-1$.

当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，又 $f(0)=1>0$，$f(1)=e^a-1\leqslant0$，此时 $f(x)$ 存在一个零点.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$ 得 $x<-\frac{\ln a}{a}$，令 $f'(x)>0$ 得 $x>-\frac{\ln a}{a}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{\ln a}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=\frac{1+\ln a}{a}$. 当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的最小值为0，此时 $f(x)$ 有一个零点.

当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的最小值大于0，此时 $f(x)$ 没有零点. 当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 的最小值小于0，$f(-1)=e^{-a}+1>0$，$f\left(-\frac{\ln a}{a}\right)=\frac{1+\ln a}{a}<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，此时 $f(x)$ 有两个零点.

综上，当 $a\leqslant0$ 或 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有一个零点；当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 有两个零点；当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 没有零点.

例3 解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=-\frac{1}{x}-\ln x,x>0$，则 $f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 所以 $f(x)_{max}=f(1)=-1$.

(2)$f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x,x>0$，则 $f'(x)=a+\frac{1}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}$.

当 $a\leqslant0$ 时，$ax-1<0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

所以 $f(x)_{max}=f(1)=a-1<0$，此时函

数无零点，不合题意. 当 $0<a<1$ 时，$\frac{1}{a}>1$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

取 $0<a<\frac{1}{e}$，则 $f\left(\frac{e}{a^2}\right)=\frac{e}{a}-\frac{a^2}{e}-a-1+2(a+1)\ln a>e^2-\frac{1}{e^3}-\frac{3}{e}-3>0$，又 $f(1)=a-1<0$，所以 $f(x)$ 仅在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上有一个零点，符合题意.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 单调递增，又 $f(1)=a-1=0$，所以 $f(x)$ 恰有一个零点，符合题意.

当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，则当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. 此时 $f(1)=a-1>0$，

由(1)得当 $0<x<1$ 时，$\ln x>1-\frac{1}{x}$，则 $\ln\sqrt{x}>1-\frac{1}{\sqrt{x}}$，所以 $\ln x>2\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$，

此时 $f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x<ax-\frac{1}{x}-2(a+1)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<-\frac{1}{x}+\frac{2(a+1)}{\sqrt{x}}(0<x<1)$，存在 $n=\frac{1}{4(a+1)^2}<\frac{1}{a}$，使得 $f(n)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上有一个零点，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上无零点，

所以 $f(x)$ 恰有一个零点，符合题意.

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

例 4 解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2^x}$，则 $f'(x)=\frac{2x\cdot 2^x-x^2\cdot 2^x\ln 2}{(2^x)^2}=\frac{x(2-x\ln 2)}{2^x}$，

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{2}{\ln 2}$，当 $0<x<\frac{2}{\ln 2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\frac{2}{\ln 2}$ 时，$f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(0,\frac{2}{\ln 2}\right)$，单调递减区间是 $\left(\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$.

(2)方法一：由 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}=1$，得 $a^x=x^a$，可得 $x\ln a=a\ln x$，即 $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$，设函数 $m(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $m'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点等价于曲线 $y=m(x)$ 与直线 $y=\frac{\ln a}{a}$ 有两个交点，令 $m'(x)=0$，得 $x=e$，所以当 $x\in(0,e)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减. 所以 $m(x)_{max}=m(e)=\frac{1}{e}$，又 $m(1)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$m(x)\to 0$，所以结合 $m(x)$ 的图象可得 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$，解得 $1<a<e$ 或 $a>e$，

所以 a 的取值范围是 $(1,e)\cup(e,+\infty)$.

方法二：曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点等价于 $\frac{x^a}{a^x}=1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根. 因为 $x^a=a^x$，所以两边取对数得 $a\ln x=x\ln a$，即 $\ln x=\frac{x\ln a}{a}$，则问题等价于 $g(x)=\ln x$ 与 $y=\frac{x\ln a}{a}$ 的图象有且仅有两个交点.

①当 $0<a<1$ 时，$\frac{\ln a}{a}<0$，直线 $y=\frac{x\ln a}{a}$ 与 $g(x)$ 的图象只有一个交点，不符合题意.

②当 $a>1$ 时，取 $g(x)=\ln x$ 的图象上一点 $(x_0,\ln x_0)$，因为 $g'(x)=\frac{1}{x}$，所以 $g'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，曲线 $y=g(x)$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，即 $y=\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$. 当直线 $y=\frac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$ 与直线 $y=\frac{x\ln a}{a}$ 为同一直线时，$\begin{cases}\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{x_0},\\ \ln x_0-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{e},\\ x_0=e.\end{cases}$

直线 $y=\frac{x\ln a}{a}$ 的斜率满足当 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$ 时，$g(x)=\ln x$ 与 $y=\frac{x\ln a}{a}$ 的图象有且仅有两个交点.

记 $h(a)=\frac{\ln a}{a}(a>1)$，则 $h'(a)=\frac{1-\ln a}{a^2}$，令 $h'(a)=0$，得 $a=e$. 当 $a\in(1,e)$ 时，$h'(a)>0$，$h(a)$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增；当 $a\in(e,+\infty)$ 时，$h'(a)<0$，$h(a)$ 在区间 $(e,+\infty)$ 上单调递减. 当 $a=e$ 时，$h(a)$ 取得最大值 $h(e)=\frac{1}{e}$，所以当 $a>1$ 且 $a\neq e$ 时，有 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$. 综上所述，实数 a 的取值范围为 $(1,e)\cup(e,+\infty)$.

变式题 解：(1)当 $a\neq 0,b=0$ 时，$f(x)=axe^{ax}$，$f'(x)=ae^{ax}+a^2xe^{ax}=e^{ax}(a^2x+a)$，当 $x<-\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>-\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，∴ $f(x)_{极小值}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{e}$，$f(x)$ 无极大值.

(2)当 $a=0$ 时，$g(x)=be^{(b-1)x}-\ln x-x$，当 $x\in(1,e^2]$ 时，令 $g(x)=0$，得 $be^{(b-1)x}=\ln x+x$，即 $be^{bx}=e^x(\ln x+x)$，即 $bxe^{bx}=xe^x(\ln x+x)$，即 $bxe^{bx}=e^{x+\ln x}(\ln x+x)$.

∵ $x\in(1,e^2]$，∴ $\ln x+x>0$，∴ $b>0$.

令 $h(x)=xe^x$，则 $h(bx)=h(x+\ln x)$，

∵ $h'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $(1,e^2]$ 上恒成立，∴ $h(x)$ 在 $(1,e^2]$ 上单调递增，

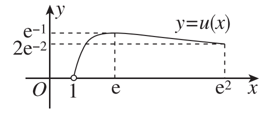
∴ $bx=x+\ln x$，∴ $b=1+\frac{\ln x}{x}$，∴ $b-1=\frac{\ln x}{x}$. 令 $u(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(1,e^2]$，则 $u'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. 当 $x\in(1,e)$ 时，$u'(x)>0$，$u(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,e^2]$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减.

又 $u(1)=0$，$u(e)=\frac{1}{e}$，$u(e^2)=\frac{2}{e^2}$，

∴ $y=u(x)$ 的大致图象如图所示.

由图可知，要使 $be^{(b-1)x}=\ln x+x$ 在 $(1,e^2]$ 上有两个不同的根，只需 $\frac{2}{e^2}\leqslant b-1<\frac{1}{e}$，即 $\frac{2}{e^2}+1\leqslant b<\frac{1}{e}+1$，

∴ b 的取值范围为 $\left[\frac{2}{e^2}+1,\frac{1}{e}+1\right)$.



培优专题（二） 隐零点问题

例 1 解：(1)由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x-(a-2)-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-(a-2)x-a}{x}$，即 $f'(x)=\frac{(x+1)(2x-a)}{x}$.

(i)若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上恒成立，此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(ii)若 $a>0$，则令 $f'(x)>0$，得 $2x-a>0$，解得 $x>\frac{a}{2}$，令 $f'(x)<0$，得 $2x-a<0$，可得 $0<x<\frac{a}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2+x-\ln x$，要证 $f(x)+e^x>x^2+x+2$，只需证 $e^x-\ln x-2>0$.

令 $g(x)=e^x-\ln x-2$，则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，易知 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

令 $g'(x)=e^x-\frac{1}{x}=0$，即 $e^x=\frac{1}{x}$，可得方程有唯一解，设为 x_0，且 $x_0\neq 1$，

所以 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$. 当 x 变化时，$g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下，

x	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $g(x)_{min}=g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$，因为 $x_0>0$ 且 $x_0\neq 1$，所以 $\frac{1}{x_0}+x_0-2>2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$，即 $g(x)_{min}>0$，所以 $e^x-\ln x-2>0$ 恒成立，得证.

【自测题】

解：(1)当 $a=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，$f(x)=xe^{x-1}-x-\ln x$，$x>0$，则 $f'(x)=(x+1)e^{x-1}-1-\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}(xe^{x-1}-1)$. 设 $g(x)=xe^{x-1}-1$，$x>0$，则 $g'(x)=(x+1)e^{x-1}>0$ 恒成立，又 $g(1)=e^0-1=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

(2) $f'(x)=a^2(x+1)e^x-1-\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}(a^2xe^x-1)$，设 $h(x)=a^2xe^x-1$，$x>0$，则 $h'(x)=a^2(x+1)e^x>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(0)=-1<0$，$h\left(\frac{1}{a^2}\right)=e^{\frac{1}{a^2}}-1>0$，所以存在 $x_0\in\Big(0,$

$\left.\frac{1}{a^2}\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $a^2x_0e^{x_0}-1=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得极小值，也是最小值，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)=a^2x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0=1-\ln(x_0e^{x_0})=1+2\ln a$，所以 $1+2\ln a\geqslant 2-a$，即 $a+2\ln a-1\geqslant 0$，设 $F(a)=a+2\ln a-1$，易知 $F(a)$ 单调递增，且 $F(1)=0$，由 $F(a)\geqslant F(1)$，解得 $a\geqslant 1$. 综上，$a\geqslant 1$.

例 2 解：$f(x)>3x$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $(x-k-1)e^x>3x$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $k<x-1-\frac{3x}{e^x}$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

令 $h(x)=x-1-\frac{3x}{e^x}$，则 $h'(x)=1-\frac{3-3x}{e^x}=\frac{e^x+3x-3}{e^x}$. 令 $m(x)=e^x+3x-3$，则 $m'(x)=e^x+3>0$，∴ $m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，∵ $m\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\frac{3}{2}>0$，$m\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{e}-\frac{9}{4}<0$，∴存在 $x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，使得 $m(x_0)=0$，即 $e^{x_0}+3x_0-3=0$，当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$.

∴ $h(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，∴ $h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0-1-\frac{3x_0}{e^{x_0}}=x_0-1-\frac{3x_0}{3-3x_0}=x_0-1+\frac{x_0}{x_0-1}=x_0-1+\frac{1}{x_0-1}+1$. ∵ $x_0\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，∴ $x_0-1\in\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$，

∴ $h(x_0)\in\left(-\frac{3}{2},-\frac{13}{12}\right)$.

∵ $k<h(x_0)$，∴整数 k 的最大值为 -2.

【自测题】

解：(1) ∵ $f(x)=(a-1)x+x\ln x$，∴ $f'(x)=\ln x+a$，∵函数 $f(x)=(a-1)x+x\ln x$ 的图象在点 $A(e^2,f(e^2))$ 处的切线斜率为 4，∴ $f'(e^2)=4$，即 $a+\ln e^2=4$，故 $a=2$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=x+x\ln x$.

∵ $m(x-1)<f(x)+1$ 对任意 $x>1$ 恒成立，∴ $m<\frac{f(x)+1}{x-1}=\frac{x+x\ln x+1}{x-1}$ 对任意 $x>1$ 恒成立. 令 $g(x)=\frac{x+x\ln x+1}{x-1}$，$x>1$，则 $g'(x)=\frac{(\ln x+2)(x-1)-(x+x\ln x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-3}{(x-1)^2}$. 令 $u(x)=x-\ln x-3$，$x>1$，则 $u'(x)=1-\frac{1}{x}$，∵ $x>1$，∴ $u'(x)>0$，∴ $u(x)=x-\ln x-3$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，∵ $u(4)=1-\ln 4<0$，$u(5)=2-\ln 5>0$，∴存在 $x_0\in(4,5)$，使得 $u(x_0)=x_0-\ln x_0-3=0$，当 $x\in(1,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增. ∴ $g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0+x_0\ln x_0+1}{x_0-1}=\frac{x_0+x_0(x_0-3)+1}{x_0-1}=x_0-1$，故 $m<x_0-1$.

∵ $x_0\in(4,5)$，∴ $x_0-1\in(3,4)$，又 $m\in\mathbf{Z}$，∴ m 的最大值为 3.

例 3 解：(1) 因为 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $\frac{1}{e}$，$f(x)$ 无极小值.

(2) 证明：令 $h(x)=xg(x)+2-e^xf(x)+\frac{2}{x}=x\ln x+2-x+\frac{2}{x}$ $(x>0)$，则 $h'(x)=\ln x-\frac{2}{x^2}$ $(x>0)$，

令 $r(x)=\ln x-\frac{2}{x^2}$ $(x>0)$，则 $r'(x)=\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $r(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $r(1)=\ln 1-\frac{2}{1^2}=-2<0$，$r(e)=\ln e-\frac{2}{e^2}=1-\frac{2}{e^2}>0$，所以存在 $x_0\in(1,e)$，使得 $r(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\frac{2}{x_0^2}$ $(x_0\in(1,e))$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$r(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$r(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

故 $h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0\ln x_0+2-x_0+\frac{2}{x_0}=x_0\cdot\frac{2}{x_0^2}+2-x_0+\frac{2}{x_0}=2-x_0+\frac{4}{x_0}$ $(x_0\in(1,e))$. 令 $m(x)=2-x+\frac{4}{x}$ $(x\in(1,e))$，则 $m'(x)=-1-\frac{4}{x^2}<0$ 在 $(1,e)$ 上恒成立，所以 $m(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减，所以 $m(x)>m(e)=2-e+\frac{4}{e}>0$，

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=2-x_0+\frac{4}{x_0}>0$，

所以 $xg(x)+2>e^xf(x)-\frac{2}{x}$.

【自测题】

解：(1) 当 $a=e$ 时，$f(x)=e^x-\ln x+1$，∴ $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，∴切线的斜率 $k=f'(1)=e-1$. ∵ $f(1)=e+1$，∴切点坐标为 $(1,e+1)$，∴曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-e-1=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x+2$，∴切线与坐标轴交点的坐标分别为 $(0,2)$，$\left(\frac{-2}{e-1},0\right)$，∴所求三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times\left|\frac{-2}{e-1}\right|=\frac{2}{e-1}$.

(2) ∵ $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，∴ $f'(x)=ae^{x-1}-\frac{1}{x}$ $(x>0)$. 设 $g(x)=f'(x)$，$x>0$，则 $g'(x)=ae^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，∴ $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 当 $a=1$ 时，$f'(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，∴ $f(x)_{\min}=f(1)=1$，∴ $f(x)\geqslant 1$ 恒成立. 当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<1$，∴ $e^{\frac{1}{a}-1}<1$，∴ $f'\left(\frac{1}{a}\right)f'(1)=a\left(e^{\frac{1}{a}-1}-1\right)(a-1)<0$，∴存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{1}{a},1\right)$，使得 $f'(x_0)=ae^{x_0-1}-\frac{1}{x_0}=0$，即 $ae^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，∴ $\ln a+x_0-1=-\ln x_0$，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，∴ $f(x)_{\min}=f(x_0)=ae^{x_0-1}-\ln x_0+\ln a=\frac{1}{x_0}+\ln a+x_0-1+\ln a>2\ln a-1+2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}=2\ln a+1>1$，

∴ $f(x)\geqslant 1$ 恒成立.

当 $0<a<1$ 时，$f(1)=a+\ln a<a<1$，∴ $f(x)\geqslant 1$ 不恒成立，不合题意. 综上所述，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

第 21 讲　双变量不等式的证明

● 课堂考点探究

例 1 证明：因为函数 $f(x)=m\ln(x+2)+\frac{x^2}{2}-2x$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,+\infty)$，$f'(x)=\frac{m}{x+2}+x-2=\frac{x^2+(m-4)}{x+2}$ $(x>-2)$. 因为 $f'(x)=0$ 的两根为 x_1,x_2 且 $-2<x_1<x_2$，所以 $-4<m-4<0$，即 $0<m<4$，其中 $x_1=-\sqrt{4-m}>-2$，$x_2=\sqrt{4-m}$，所以 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=m-4$ 且 $x_2\in(0,2)$，则 $x_2=-x_1$，$m=x_1x_2+4$，所以 $f(-x_1)=f(x_2)$，$m=x_1x_2+4=4-x_2^2$. 要证 $f(-x_1)-2x_1+f(x_2)>0$，只需证 $2f(x_2)-2x_1>0$，只需证 $f(x_2)+x_2>0$，即证 $m\ln(x_2+2)+\frac{x_2^2}{2}-x_2>0$，即证 $(4-x_2^2)\ln(x_2+2)+\frac{x_2^2}{2}-x_2>0$，即证 $(2+x_2)\ln(x_2+2)-\frac{x_2}{2}>0$. 令 $g(x)=(2+x)\ln(x+2)-\frac{x}{2}$ $(0<x<2)$，则 $g'(x)=\ln(x+2)+\frac{1}{2}>\ln 2+\frac{1}{2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，且 $g(0)=2\ln 2>0$，

故 $g(x)>g(0)>0$，所以 $f(-x_1)-2x_1+f(x_2)>0$.

变式题 解：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(1+x)+\frac{1}{2}x^2-x$，$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x+1}+x-1=\frac{x^2}{x+1}$. 因为 $x>-1$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

(2) 证明：由题意得 $f'(x)=\frac{a}{x+1}+x-1=\frac{x^2-1+a}{x+1}$. 当 $a\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，不合题意. 当 $a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x^2=1-a$. 当 $a\leqslant 0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{1-a}$，则 $f(x)$ 只有一个极值点，不合题意. 当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-\sqrt{1-a}$，$x_2=\sqrt{1-a}$，则 $x_1x_2=a-1$，$x_1+x_2=0$，故 $a=x_1x_2+1=1-x_2^2$. 要证 $f(x_2)>\frac{x_1}{2}$，即证 $a\ln(1+x_2)+\frac{1}{2}x_2^2-x_2>\frac{x_1}{2}$，即证 $2a\ln(1+x_2)+x_2^2-2x_2-x_1>0$，即证 $2(1-x_2^2)\ln(1+x_2)+x_2^2-x_2>0$，又 $x_2=\sqrt{1-a}\in(0,1)$，所以要证 $f(x_2)>\frac{x_1}{2}$，即证 $\ln(1+x_2)-\frac{x_2}{2(1+x_2)}>0$. 构造函数 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{2(1+x)}$，$x\in(0,1)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{4(x+1)^2}=\frac{2x+1}{2(1+x)^2}>0$，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，则 $g(x)>g(0)=0$，所以 $f(x_2)>\frac{x_1}{2}$.

例 2 证明：因为 $a>b$，所以 $\frac{e^a-e^b}{a-b}\leqslant$

$\frac{1}{6}(e^a+e^b+4e^{\frac{a+b}{2}})$ 等价于 $e^{\frac{a-b}{2}}-e^{\frac{b-a}{2}}\leqslant\frac{1}{6}(a-b)(e^{\frac{a-b}{2}}+e^{\frac{b-a}{2}}+4)$，令 $t=e^{\frac{a-b}{2}}>1$，则不等式等价于 $t-\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{t}+4\right)\ln t$，故只需证 $\ln t\geqslant\frac{3\left(t-\frac{1}{t}\right)}{t+\frac{1}{t}+4}=\frac{3(t^2-1)}{t^2+4t+1}$，设 $h(x)=\ln x-\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ $(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{6x(x^2+4x+1)-3(x^2-1)(2x+4)}{(x^2+4x+1)^2}=\frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}{x(x^2+4x+1)^2}=\frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(x)>h(1)=0$，故 $\frac{e^a-e^b}{a-b}\leqslant\frac{1}{6}(e^a+e^b+4e^{\frac{a+b}{2}})$.

变式题 证明：∵ $F(x)=\ln x-x+\frac{2}{x}$ $(x>0)$，∴ $F'(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^2}$，令 $F'(x_1)=F'(x_2)=m$，得 $\begin{cases}\frac{2}{x_1^2}-\frac{1}{x_1}+1+m=0,\\ \frac{2}{x_2^2}-\frac{1}{x_2}+1+m=0,\end{cases}$

∴ $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2}$ 为方程 $2t^2-t+1+m=0$ 的两根，∴ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$，即 $2(x_1+x_2)=x_1x_2$，∴ $x_1x_2=2(x_1+x_2)>4\sqrt{x_1x_2}$，∴ $x_1x_2>16$，∴ $F(x_1)+F(x_2)=\left(\ln x_1-x_1+\frac{2}{x_1}\right)+\left(\ln x_2-x_2+\frac{2}{x_2}\right)=(\ln x_1+\ln x_2)-(x_1+x_2)+\left(\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}\right)=\ln(x_1x_2)-\frac{x_1x_2}{2}+1$，令 $t=x_1x_2>16$，则 $\ln(x_1x_2)-\frac{x_1x_2}{2}+1=\ln t-\frac{t}{2}+1$，

令 $h(t)=\ln t-\frac{t}{2}+1$ $(t>16)$，则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}<0$，∴ $h(t)$ 在 $(16,+\infty)$ 上单调递减，

∴ $h(t)<h(16)=\ln 16-7=4\ln 2-7$，

即 $F(x_1)+F(x_2)<4\ln 2-7$.

例 3 证明：设函数 $g(x)=f(a)+f(x)-f(a+x)+(a+x)\ln 2(a>0)$，

则 $g'(x)=f'(x)-f'(a+x)+\ln 2=(1+\ln x)-[1+\ln(a+x)]+\ln 2=\ln\frac{2x}{a+x}$，令 $g'(x)>0$ 得 $x>a$，令 $g'(x)<0$，得 $0<x<a$，所以 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\geqslant g(a)=f(a)+f(a)-f(2a)+2a\ln 2=2a\ln a-2a\ln(2a)+2a\ln 2=0$，所以 $f(a)+f(b)-f(a+b)+(a+b)\ln 2\geqslant 0$，即 $f(a)+f(b)\geqslant f(a+b)-(a+b)\ln 2$.

变式题 证明：令 $h(x)=f(x)-bx+g(b)-f(0)-g(0)(x>0)$，则 $h'(x)=e^x-(b+1)$，所以当 $x>\ln(b+1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $0<x<\ln(b+1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

故 $h(x)\geqslant h[\ln(b+1)]=f[\ln(b+1)]+g(b)-f(0)-g(0)-b\ln(b+1)=(b+k)\ln(b+k)-(b+1)\ln(b+1)-k\ln k$. 令 $t(x)=(x+k)\ln(x+k)-(x+1)\ln(x+1)-k\ln k(x>0)$，

则 $t'(x)=\ln(x+k)-\ln(x+1)$，当 $k\geqslant 1$ 时，$t'(x)\geqslant 0$，$t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t(x)\geqslant t(0)=0$，即 $h(x)\geqslant 0$，即 $f(x)-bx+g(b)-f(0)-g(0)\geqslant 0$，

所以 $f(a)+g(b)\geqslant f(0)+g(0)+ab$.

第四单元　三角函数、解三角形

第 22 讲　任意角和弧度制、三角函数的概念

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)端点　(2)①正角　负角　②象限角
(3) $\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

2. (1)半径长　(2) $|\alpha|r$　$\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

3. (1) $\frac{y}{r}$　$\frac{x}{r}$　$\frac{y}{x}$

【对点演练】

1. ①④　[解析] 锐角一定是第一象限角，①正确；终边相同的角不一定相等，②错误；小于 90° 的角除锐角外还有零角、负角，③错误；钝角一定是第二象限角，④正确. 故填①④.

2. $\frac{2\pi}{3}$　[解析] 与角 $-\frac{4\pi}{3}$ 终边相同的角是 $2k\pi+\left(-\frac{4\pi}{3}\right)(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=1$，可得与角 $-\frac{4\pi}{3}$ 终边相同的角是 $\frac{2\pi}{3}$.

3. $\frac{3\sqrt{5}-10}{5}$　[解析] 由已知得 $r=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha+\tan\alpha=\frac{y}{r}-\frac{x}{r}+\frac{y}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{-1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{-1}=\frac{3}{\sqrt{5}}-2=\frac{3\sqrt{5}-10}{5}$.

4. -4π　[解析] 时钟的分针顺时针旋转，所得的角为负角，又考试时间为 120 分钟，所以从考试开始到结束，时钟的分针旋转了 -4π 弧度.

5. 1 或 4　[解析] 设扇形的半径为 r，圆心角为 $\alpha(\alpha>0)$，则扇形的弧长 $l=r\alpha$，由题得 $\begin{cases}2r+r\alpha=6,\\ \frac{1}{2}r^2\alpha=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=2,\\ \alpha=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=1,\\ \alpha=4,\end{cases}$ 所以扇形的圆心角的弧度数为 1 或 4.

6. $\cos\theta$　[解析] ∵ $\sin\theta<0$，$\tan\theta<0$，∴ θ 是第四象限角，∴ $\cos\theta>0$，∴ $|\sin\theta-\cos\theta|+\sin\theta=-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta=\cos\theta$.

● 课堂考点探究

例 1 (1)BCD　(2)B　[解析] (1)与 $-835°$ 终边相同的角可表示为 $\alpha=-835°+360°k$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=1$ 时，$\alpha=-475°$；当 $k=2$ 时，$\alpha=-115°$；当 $k=3$ 时，$\alpha=245°$；当 $k=4$ 时，$\alpha=605°$. 故选 BCD.

(2)终边落在阴影部分（包括边界）的角 α 满足 $\frac{5\pi}{6}+k\pi\leqslant\alpha\leqslant(k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即终边落在阴影部分（包括边界）的角 α 的集合是 $\left\{\alpha\,\middle|\,\frac{5\pi}{6}+k\pi\leqslant\alpha\leqslant(k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$. 故选 B.

变式题 (1)AB　(2)135°(或 $-225°$)

[解析] (1)因为 α 的终边与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称，而 α 是第二象限角，所以 $-\alpha$ 是第三象限角，所以 $\pi-\alpha$ 是第一象限角，故 A 正确；因为 α 是第二象限角，所以 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限角，故 B 正确；因为 α 是第二象限角，所以 $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ 是第一象限角，故 C 错误；因为 α 是第二象限角，所以 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\pi+4k\pi<2\alpha<2\pi+4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 2α 的终边可能在 y 轴负半轴上，故 D 错误. 故选 AB.

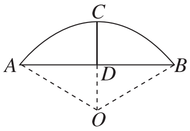
(2)∵ $-2025°=-6\times360°+135°$，∴在 $-360°\sim360°$ 范围内，角 $-2025°$ 的终边与角 135° 的终边相同. ∵ $-2025°=-5\times360°-225°$，∴在 $-360°\sim360°$ 范围内与角 $-2025°$ 终边相同的另一个角是 $-225°$.

例 2 解：设扇形的弧长为 l.

(1)由 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$R=10$，得 $l=\frac{\pi}{3}\times10=\frac{10\pi}{3}$，$S=\frac{1}{2}\times\frac{10\pi}{3}\times10-\frac{\sqrt{3}}{4}\times10^2=\frac{50\pi}{3}-25\sqrt{3}$.

(2)易知 $l+2R=20$，则 $l=20-2R(0<R<10)$，∴ $S_{扇形}=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}(20-2R)\cdot R=-R^2+10R=-(R-5)^2+25$，∴当 $R=5$ 时，$S_{扇形}$ 取得最大值 25，此时 $l=10$，$\alpha=\frac{l}{R}=2$. 因此当 $\alpha=2$ 时，这个扇形的面积最大.

变式题 (1)D　(2)C



[解析] (1)如图，由题意得 $AB=2\sqrt{3}CD$，弧田面积 $S=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}CD\cdot CD+CD^2)=4\sqrt{3}+2$，可得 $CD=2$. 设圆的半径为 r，则有 $AO^2=AD^2+OD^2$，即 $r^2=(2\sqrt{3})^2+(r-2)^2$，解得 $r=4$，∴ $OD=2$，则在 Rt△AOD 中，$\angle AOD=\frac{\pi}{3}$，∴ $\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，∴所求弧长为 $4\times\frac{2\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$. 故选 D.

(2)显然△AOB 为等腰三角形，$OA=OB=5$，$AB=8$，则 $\cos\angle OAB=\frac{\frac{1}{2}AB}{OA}=\frac{4}{5}$，$\sin\angle OAB=\frac{3}{5}$，即 $\angle OAB\approx37°$，于是 $\angle AOB\approx106°=\frac{53\pi}{90}$，所以璜身的面积近似为 $\frac{1}{2}\angle AOB\cdot(OA^2-OD^2)\approx\frac{1}{2}\times\frac{53\pi}{90}\times(5^2-3^2)\approx14.8(\text{cm}^2)$. 故选 C.

例 3 (1)ACD　(2) $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$　[解析] (1)因为角 θ 的终边经过点 $(2,-\sqrt{3})$，所以 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，故 A 正确；因为 θ 与 α 的终边关于原点对称，所以角 α 的终边经过点 $(-2,\sqrt{3})$，所以 α 为第二象限角，但不一定为钝角，故 B 错误；$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，故 C 正确；因为 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}>0$，所以点 $(\tan\theta,\sin\alpha)$ 在第二象限，故 D 正确. 故选 ACD.

(2)由角 β 的终边与单位圆交于点 $\Big(\frac{1}{2},$

$m\Big)$，得 $\cos\beta=\frac{1}{2}$，又 $\sin\alpha\cos\beta<0$，所以 $\sin\alpha<0$，因为角 α 的终边落在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，所以角 α 只能是第三象限角.记 P 为角 α 的终边与单位圆的交点，设 $P(x,y)(x<0,y<0)$，则 $x^2+y^2=1$，又 $y=\sqrt{3}x$，所以 $x=-\frac{1}{2}$，$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.因为点 $\left(\frac{1}{2},m\right)$ 在单位圆上，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+m^2=1$，解得 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\cos\alpha\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

变式题 $\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$ [解析]在角 θ 的终边所在的直线 $y=-2x$ 上任取一点 $P(a,-2a)(a\neq0)$，则 $|OP|=\sqrt{5}|a|$(O 为坐标原点)，由三角函数的定义知 $\sin\theta=\frac{-2a}{\sqrt{5}|a|}$，$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{5}|a|}$.当 $a>0$ 时，$2\sin\theta+\cos\theta=2\times\frac{-2a}{\sqrt{5}a}+\frac{a}{\sqrt{5}a}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$；当 $a<0$ 时，$2\sin\theta+\cos\theta=2\times\frac{-2a}{-\sqrt{5}a}+\frac{a}{-\sqrt{5}a}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

例4 (1)D (2)BD [解析](1)因为 α 是第二象限角，所以 $0<\sin\alpha<1$，$-1<\cos\alpha<0$，所以 $\cos(\sin\alpha)>0$，$\sin(\cos\alpha)<0$，所以点 $(\cos(\sin\alpha),\sin(\cos\alpha))$ 在第四象限.故选D.

(2)因为角 α 的终边经过点 $P(1,m)(m<0)$，所以 α 为第四象限角，则 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha>0$，$\tan\alpha<0$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的正负无法判断，$\cos\alpha-\sin\alpha>0$，$\sin\alpha\cos\alpha<0$，$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}>0$.故选BD.

变式题 (1)D (2)BC

[解析](1)$\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore -\pi+4k\pi<2\alpha<4k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $\sin2\alpha<0$.

(2)因为 $\sin\alpha>0$，$\tan\alpha<0$，所以 α 为第二象限角，$\cos\alpha<0$，$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故A错误；因为 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角，故B正确；$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$，故C正确；若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故D错误.故选BC.

第23讲 同角三角函数的基本关系式与诱导公式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(2)$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

2. $\tan\alpha$ $-\sin\alpha$ $-\sin\alpha$

【对点演练】

1. $-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{3}$ [解析]$\because\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 为第二象限角，$\therefore\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{3}{5}$，$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$.

2. $\frac{5}{4}$ [解析]原式$=\frac{3\tan\alpha-1}{\tan\alpha+2}=\frac{3\times2-1}{2+2}=\frac{5}{4}$.

3. $-\frac{3}{5}$ [解析]$\because\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\therefore\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\therefore\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

4. $-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ [解析]因为 $\tan\alpha=k$，α 为钝角，所以 $k<0$，$\sin\alpha>0$，且 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=k$①，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$②，所以由①②可得 $\sin\alpha=-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$.

5. $\sin\alpha$ [解析]原式$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$.

6. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ [解析]$\because\tan\alpha=\sqrt{3}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{2}\pi$，$\therefore\alpha=\frac{4\pi}{3}$，$\therefore\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

● 课堂考点探究

例1 (1)$-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2)1 [解析](1)方法一：因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\theta=\frac{1}{2}$，所以可设 θ 终边上一点 P 的坐标为 $(2,1)$，则 $|OP|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$($O$ 为坐标原点)，所以 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

方法二：因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\theta=\frac{1}{2}$，所以 $\begin{cases}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2},\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ 所以 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

方法三：$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=1-\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{5}$，因为 $\tan\theta=\frac{1}{2}<1$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin\theta<\cos\theta$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(2)$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin^2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=1$.

变式题 (1)A (2)0 [解析](1)由三角函数的定义，得 $\tan\alpha=\frac{3}{2\sin\alpha}$，所以 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{2\sin\alpha}$，则 $2(1-\cos^2\alpha)=3\cos\alpha$，所以 $(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+2)=0$，则 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

(2)$\because\cos\alpha=-\frac{5}{13}<0$ 且 $\cos\alpha\neq-1$，$\therefore\alpha$ 是第二或第三象限角.

①若 α 是第二象限角，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$，$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$，此时 $13\sin\alpha+5\tan\alpha=13\times\frac{12}{13}+5\times\left(-\frac{12}{5}\right)=0$.

②若 α 是第三象限角，则 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$，$\therefore\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}$，此时 $13\sin\alpha+5\tan\alpha=13\times\left(-\frac{12}{13}\right)+5\times\frac{12}{5}=0$.综上，$13\sin\alpha+5\tan\alpha=0$.

例2 (1)D (2)①$-\frac{3}{5}$ ②$\frac{15}{34}$

[解析](1)因为 $\tan\alpha=3$，所以 $\frac{\cos\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{10}$，故选D.

(2)①由 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，得 $\frac{\tan\alpha+1}{3\tan\alpha-1}=2$，解得 $\tan\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-\frac{3}{5}$.

②$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{15}{34}$.

变式题 (1)-4 (2)$-\frac{5}{3}$ $\frac{13}{5}$

[解析](1)因为 $\tan\alpha=2$，所以 $\frac{\sin^2\alpha}{1-3\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1-3\tan\alpha}=\frac{2^2}{2^2+1-3\times2}=-4$.

(2)由 $\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-1$ 得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-3}{\tan\alpha+1}=-\frac{5}{3}$，$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+2=\frac{\tan^2\alpha+\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+2=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}+2=\frac{13}{5}$.

例3 ABD [解析]$\because\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{25}$，解得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，故B正确；$\because\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}<0$，$\therefore\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\cos\alpha<0$，故A正确，C错误；由 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 可知，$\cos\alpha-\sin\alpha<0$，且 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\left(-\frac{12}{25}\right)=\frac{49}{25}$，可得 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{7}{5}$，故D正确.故选ABD.

变式题 (1)D (2)$\frac{17}{13}$ [解析](1)由题意可得 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，整理得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{25}>0$，又 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，即

$\sin\alpha>0,\cos\alpha>0$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha>0$，因为 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$，所以 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\frac{12}{25}}{\frac{7}{5}}=\frac{12}{35}$. 故选 D.

(2) $\because 0<\theta<\pi$，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{60}{169}<0$，$\therefore\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，$\sin\theta-\cos\theta>0$，$\therefore\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1-2\times\left(-\frac{60}{169}\right)}=\sqrt{\frac{289}{169}}=\frac{17}{13}$.

例 4 (1) -1 (2) $-\frac{4}{3}$ [解析] (1) 原式 $=\frac{-\tan\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)\cdot[-\sin(\pi+\alpha)]}=\frac{\tan\alpha\cdot\cos^2\alpha}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-1$.

(2) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}$，$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{3}$，所以原式 $=-\frac{4}{3}$.

变式题 (1)D (2) $\cos\alpha$ [解析] (1) 因为角 α 为第三象限角，所以 $\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$. 对于 A，$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha>0$；对于 B，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha>0$；对于 C，$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha>0$；对于 D，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha<0$. 故选 D.

(2) $\frac{\sin(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\tan(90^\circ-\alpha)}{\sin(270^\circ+\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\cos(90^\circ-\alpha)}}{-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{-\cos\alpha}=\cos\alpha$.

例 5 解：(1) $f(\alpha)=\frac{(-\cos\alpha)\sin\alpha\tan^2\alpha}{\sin\alpha(-\sin\alpha)}=\frac{(-\cos\alpha)\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

(2) 由 (1) 得 $\tan\alpha=2$，所以 $\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{4-6}{4+1}=-\frac{2}{5}$.

(3) 由 (1) 得 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=3$，令 $\alpha-\frac{\pi}{6}=\theta$，则 $\alpha=\theta+\frac{\pi}{6}$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}=3$，所以 $\tan\theta=-\frac{1}{3}$，又 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{3}$，所以 $\cos\theta=-3\sin\theta$，代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. 当 $\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$；当 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ 时，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

综上，$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 或 $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

变式题 (1)D (2)18 [解析] (1) 由诱导公式可得，$\sin\alpha=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=-2\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-2$，所以 $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{10}{5}=2$.

(2) 由 $\sin(3\pi+\theta)=\frac{1}{3}$，可得 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$，$\therefore\frac{\cos(\pi+\theta)}{\cos\theta[\cos(\pi-\theta)-1]}+\frac{\cos(\theta-2\pi)}{\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(\theta-\pi)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta(-\cos\theta-1)}+\frac{\cos\theta}{-\cos^2\theta+\cos\theta}=\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}=18$.

第 24 讲 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1) $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
(2) $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
(3) $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
(4) $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
(5) $\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ (6) $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
2. $\sin(\alpha+\varphi)$
3. (1) $2\sin\alpha\cos\alpha$ (2) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $1-2\sin^2\alpha$ (3) $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

【对点演练】

1. $\frac{1}{2}$ [解析] 方法一：$\cos 42^\circ\cos 18^\circ-\cos 48^\circ\sin 18^\circ=\cos 42^\circ\cos 18^\circ-\cos(90^\circ-42^\circ)\sin 18^\circ=\cos 42^\circ\cos 18^\circ-\sin 42^\circ\sin 18^\circ=\cos(42^\circ+18^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$.
方法二：原式 $=\sin 48^\circ\cos 18^\circ-\cos 48^\circ\sin 18^\circ=\sin(48^\circ-18^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$.
2. $\frac{7}{25}$ [解析] $\sin(\alpha-\pi)=-\sin\alpha=\frac{3}{5}$，故 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.
3. -3 $-\frac{4}{3}$ [解析] $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2+1}{1-2}=-3$，$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$.
4. $-\frac{5}{9}$ [解析] $\cos\left(2\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(-\pi+2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=-\left(1-2\times\frac{2}{9}\right)=-\frac{5}{9}$.
5. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [解析] $\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=\frac{\tan 45^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 15^\circ}=\tan(45^\circ-15^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
6. $-\frac{2\pi}{3}$ [解析] 由题意知 $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3}$，$\tan\alpha\tan\beta=4$，所以 $\tan\alpha<0$，$\tan\beta<0$，所以 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(-\pi,0)$. 因为 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3\sqrt{3}}{1-4}=\sqrt{3}$，且 $\alpha+\beta\in(-\pi,0)$，所以 $\alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3}$.

● 课堂考点探究

例 1 (1)A (2)B (3)A

[解析] (1) $\because\tan\alpha\tan\beta=2$，$\therefore\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$，又 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，$\therefore\cos\alpha\cos\beta=-m$，$\sin\alpha\sin\beta=-2m$，$\therefore\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-3m$. 故选 A.

(2) 由 $3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ 展开可得，$\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta$，整理得 $2\sin\theta=-\sqrt{3}\cos\theta$，即 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\cos 2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+1}=\frac{1}{7}$. 故选 B.

(3) 方法一：由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-\frac{1}{3}$，解得 $\tan\alpha=-2$. 因为 α 是第二象限角，所以由 $\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$ 可得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

方法二：由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-\frac{1}{3}$，解得 $\tan\alpha=-2$. 因为 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\times(-2)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故选 A.

变式题 (1)D (2)B (3) $\frac{24}{7}$

[解析] (1) 由倍角公式可知 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，则 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$. 因为 α 为锐角，所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则 $0<\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，故选 D.

(2) 因为 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$. 因为 $\tan(\pi-\beta)=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\beta=-\frac{1}{2}$，则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{2}{11}$. 故选 B.

(3) $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-3x-3=0$ 的两个实数根，则有 $\tan\alpha+\tan\beta=3$，

13322389486

$\tan\alpha\tan\beta=-3$，因此 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3}{4}$，所以 $\tan(2\alpha+2\beta)=\frac{2\tan(\alpha+\beta)}{1-\tan^2(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{24}{7}$.

例 2 (1)C (2)B (3)$\frac{24}{25}$ [解析](1)方法一：由 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，可知 $\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=0$，即 $\sin\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以 $\alpha-\beta+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\tan(\alpha-\beta)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=-1,k\in\mathbf{Z}$，故选 C.

方法二：取 $\beta=0$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=0$，取 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\tan(\alpha-\beta)=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$，排除 B，D；取 $\alpha=0$，则 $\sin\beta+\cos\beta=2\sin\beta$，即 $\sin\beta=\cos\beta$，取 $\beta=\frac{\pi}{4}$，则 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，排除 A. 故选 C.

(2) $\tan 8°+\tan 127°+\tan 8°\tan 233°=\tan 8°+\tan(180°-53°)+\tan 8°\tan(180°+53°)=\tan 8°-\tan 53°+\tan 8°\tan 53°=\tan(8°-53°)(1+\tan 8°\tan 53°)+\tan 8°\tan 53°=-1$. 故选 B.

(3)因为 $\sin\left(\beta+\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以由两角和的正弦公式得 $\sin\beta+\cos\beta=\frac{1}{5}$，两边平方得 $1+2\sin\beta\cos\beta=1+\sin 2\beta=\frac{1}{25}$，即 $\sin 2\beta=-\frac{24}{25}$，故 $\sin(\alpha-2\beta)\cos\alpha-\cos(2\beta-\alpha)\sin\alpha=\sin(\alpha-2\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-2\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha-2\beta-\alpha)=-\sin 2\beta=\frac{24}{25}$.

变式题 (1)C (2)$\frac{1}{5}$ [解析](1)由 $\frac{1}{\sin 10°}-\frac{\lambda}{\cos 10°}=4$ 可得 $\lambda=\left(\frac{1}{\sin 10°}-4\right)\cos 10°=\frac{\cos 10°-4\sin 10°\cos 10°}{\sin 10°}=\frac{\cos 10°-2\sin 20°}{\sin 10°}=\frac{\cos 10°-2\sin(30°-10°)}{\sin 10°}=\frac{\cos 10°-2\times\frac{1}{2}\cos 10°+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°}{\sin 10°}=\sqrt{3}$，故选 C.

(2)因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，因为 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{3}{5}$，因为 $2=\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$. 因为 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{2}{5}+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$.

例 3 (1)D (2)$\frac{7}{9}$ [解析](1)因为 $\tan\alpha=3$，$\tan(\alpha+\beta)=-5$，所以 $\tan(2\alpha+\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\alpha}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{-5+3}{1-(-5)\times 3}=-\frac{1}{8}$. 故选 D.

(2)方法一：由 $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{9}$.

方法二：将 $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，展开得 $\sin\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，整理得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{1}{3}$，即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{9}$.

变式题 (1)B (2)$\frac{16}{65}$ [解析](1)因为 $\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，$2\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，所以 $2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，即 $2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$，则 $2\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$，因为 $\tan\alpha=2$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}\tan\alpha=3$，又 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+\tan\beta}{1-2\tan\beta}=3$，故 $2+\tan\beta=3-6\tan\beta$，解得 $\tan\beta=\frac{1}{7}$. 故选 B.

(2)由题意可得 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta-\frac{5\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{5}$，$\sin\left(\beta-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{12}{13}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\left(\beta-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{12}{13}\right)=\frac{16}{65}$.

第 25 讲 简单的三角恒等变换

● **课堂考点探究**

例 1 (1)A (2)$\frac{1}{2}\cos 2x$ [解析](1)由 $\frac{1+\tan 190°}{1-\tan 370°}-\frac{2\cos 70°}{\sin 40°}=\frac{1+\tan 10°}{1-\tan 10°}-\frac{2\sin 20°}{\sin 40°}=\frac{1+\frac{\sin 10°}{\cos 10°}}{1-\frac{\sin 10°}{\cos 10°}}-\frac{2\sin 20°}{2\sin 20°\cos 20°}=\frac{(\cos 10°+\sin 10°)^2}{\cos^2 10°-\sin^2 10°}-\frac{1}{\cos 20°}=\frac{1+\sin 20°}{\cos 20°}-\frac{1}{\cos 20°}=\tan 20°$. 故选 A.

(2)原式 $=\frac{\frac{1}{2}(4\cos^4 x-4\cos^2 x+1)}{2\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{(2\cos^2 x-1)^2}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{\cos^2 2x}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{\cos^2 2x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}\cos 2x$.

变式题 (1)B (2)① $\frac{2}{\sin\alpha}$ ② $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

[解析](1) $2\sqrt{1+\sin 4}+\sqrt{2+2\cos 4}=2\sqrt{\sin^2 2+2\sin 2\cos 2+\cos^2 2}+\sqrt{2+2(2\cos^2 2-1)}=2\sqrt{(\sin 2+\cos 2)^2}+\sqrt{4\cos^2 2}=2|\sin 2+\cos 2|+2|\cos 2|$. ∵ $\frac{\pi}{2}<2<\frac{3\pi}{4}$，∴ $\cos 2<0$，∵ $\sin 2+\cos 2=\sqrt{2}\sin\left(2+\frac{\pi}{4}\right)$，$\frac{3\pi}{4}<2+\frac{\pi}{4}<\pi$，∴ $\sin 2+\cos 2>0$，∴ 原式 $=2(\sin 2+\cos 2)-2\cos 2=2\sin 2$，故选 B.

(2)① 原式 $=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sin\alpha}$.

② 原式 $=\frac{\sin(2\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=\frac{\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]-2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}=\frac{\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

例 2 (1)A (2)$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ [解析](1)因为 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，所以

$$\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{2},\\ \sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1,\end{cases}$$

解得 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{5}$，所以 $\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\pi\right]=-\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=-\left[1-2\times\frac{1}{5}\right]=-\frac{3}{5}$. 故选 A.

(2) 方法一：由题得 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{-\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$. ∵ $2k_1\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k_1\pi, k_1\in\mathbf{Z}$, $\pi+2k_2\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}+2k_2\pi, k_2\in\mathbf{Z}$, ∴ $\pi+2(k_1+k_2)\pi<\alpha+\beta<2\pi+2(k_1+k_2)\pi, k_1, k_2\in\mathbf{Z}$，即 $\pi+2k\pi<\alpha+\beta<2\pi+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，∴ $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

方法二：∵ α 为第一象限角，β 为第三象限角，∴ $\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$, $\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, $\cos\beta=\frac{\cos\beta}{\sqrt{\sin^2\beta+\cos^2\beta}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta(\tan\alpha+\tan\beta)=4\cos\alpha\cos\beta=\frac{-4}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\beta}}=\frac{-4}{\sqrt{(\tan\alpha+\tan\beta)^2+(\tan\alpha\tan\beta-1)^2}}=\frac{-4}{\sqrt{4^2+2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

变式题 (1)C (2)$-\frac{1}{9}$ [解析](1)由 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$ 得 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，又 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{12}$，所以 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$，故 $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1+\cos2\alpha}{2}-\frac{1-\cos2\beta}{2}=\frac{\cos2\alpha+\cos2\beta}{2}=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. 故选 C.

(2) $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\frac{3}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$，故 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-1=-\frac{1}{9}$.

例 3 (1)D (2)D [解析](1) $\frac{\tan80^\circ-\sqrt{3}}{\sin80^\circ}=\frac{\sin80^\circ-\sqrt{3}\cos80^\circ}{\sin80^\circ\cos80^\circ}=\frac{2\left(\sin80^\circ\times\frac{1}{2}-\cos80^\circ\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}\times2\sin80^\circ\cos80^\circ}=\frac{4\sin(80^\circ-60^\circ)}{\sin160^\circ}=\frac{4\sin20^\circ}{\sin(180^\circ-20^\circ)}=\frac{4\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=4$. 故选 D.

(2)因为 $\frac{1}{2\cos\frac{3\pi}{5}}+\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{4\pi}{5}}=-\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{5}}+\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{4\pi}{5}}=\frac{-\cos\frac{4\pi}{5}+2\cos^2\frac{2\pi}{5}}{2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}=\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}}=-\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}=-\frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{5}}=-\frac{2\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=-2$. 故选 D.

变式题 (1)D (2)$-\frac{1}{8}$ [解析](1)原式 $=\frac{\sin20^\circ(\sin50^\circ+\sqrt{3}\cos50^\circ)}{\cos50^\circ}=\frac{2\sin20^\circ\sin(50^\circ+60^\circ)}{\cos50^\circ}=\frac{2\sin20^\circ\sin(90^\circ+20^\circ)}{\cos(90^\circ-40^\circ)}=\frac{2\sin20^\circ\cos20^\circ}{\sin40^\circ}=\frac{\sin40^\circ}{\sin40^\circ}=1$. 故选 D.

(2) $\cos20^\circ\cos40^\circ\cos100^\circ=-\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ=-\frac{\sin20^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{\sin20^\circ}=-\frac{\frac{1}{2}\sin40^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}{\sin20^\circ}=-\frac{\frac{1}{4}\sin80^\circ\cos80^\circ}{\sin20^\circ}=-\frac{\frac{1}{8}\sin160^\circ}{\sin20^\circ}=-\frac{\frac{1}{8}\sin20^\circ}{\sin20^\circ}=-\frac{1}{8}$.

例 4 解：(1)因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{13}{14}$，所以 $\cos\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{2}+\frac{13}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

(2)由(1)可知 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{12}$，所以 $\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{11}-\frac{\sqrt{3}}{12}}{1+\frac{5\sqrt{3}}{11}\times\frac{\sqrt{3}}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$.

变式题 (1)A (2)$-\frac{\pi}{4}$ [解析](1)因为 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{6}$, $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{1}{4}$，所以 $\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{6},\\ \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{1}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{3},\\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{6},\end{cases}$ 所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$，又 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$. 故选 A.

(2)因为 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$, $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=-\frac{3}{5}$，又 $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$，又 $0<\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{10}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，故 $\sin(\alpha-\beta)=\sin[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\sin2\alpha\cos(\alpha+\beta)-\cos2\alpha\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{10}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{4}$.

例 5 解：(1)因为 $\boldsymbol{m}\parallel\boldsymbol{n}$，所以 $-\frac{1}{2}\times2\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\cos\alpha$，所以 $\sin\alpha=-\sqrt{3}\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，则原式 $=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+\tan\alpha-2}=\frac{-2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}-2}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=3+\sqrt{3}$.

(2)因为 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=|\boldsymbol{n}|$，且 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=\left(2\cos\alpha-\frac{1}{2},2\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\sqrt{\left(2\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\left(2\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{(2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha)^2}$，整理得 $2\sqrt{3}\sin\alpha-2\cos\alpha+1=0$，所以 $4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-1$，即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$. 因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，又 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)<0$，所以 $\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3\sqrt{5}-1}{8}$.

变式题 解：(1) $f(x)=2\sqrt{3}\cos^2\left(x-\frac{2025\pi}{2}\right)+2\sin(x-2024\pi)\cos x-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin^2x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}=2\sin x\cos x-\sqrt{3}(1-2\sin^2x)=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，所以曲线 $y=f(x)$ 的对称轴为直线 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

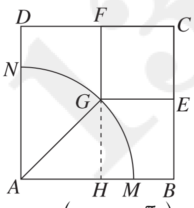
(2)由题意可得 $f\left(m-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{14}{25}$，即 $\sin\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{7}{25}$，又 $m\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $2m-\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，则 $\cos\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)<0$，所以 $\cos\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)}=-\frac{24}{25}$，

故 $\sin 2m=\sin\left[\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=\sin\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\left(2m-\frac{2\pi}{3}\right)\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{7}{25}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{24}{25}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{7+24\sqrt{3}}{50}$.

例 6 解：(1)在 Rt△PAQ 中，$\angle PAQ=\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$AP=60$，所以 $PQ=AP\sin\alpha=60\sin\alpha$（米）. 又 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle PAR=\frac{\pi}{3}-\alpha$，在 Rt△$PAR$ 中，可得 $PR=AP\sin\angle PAR=60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$（米）.

(2)由题可知 $\angle QPR=\frac{2\pi}{3}$，所以△$PQR$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot PR\cdot\sin\angle QPR=\frac{1}{2}\times 60\sin\alpha\times 60\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\times\sin\frac{2\pi}{3}=900\sqrt{3}\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=900\sqrt{3}\sin\alpha\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=450\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\right)=450\sqrt{3}\left[\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\right]$，又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $2\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，故当 $2\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，△PQR 的面积有最大值 $225\sqrt{3}$ 平方米，即三角形绿地的最大面积是 $225\sqrt{3}$ 平方米，此时 $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

变式题 解：(1)延长 FG 交 AB 于 H，如图，则 $GH=60\sin\theta$，$AH=60\cos\theta$，$GE=80-60\cos\theta$，$FG=80-60\sin\theta$，$\therefore S=(80-60\cos\theta)(80-60\sin\theta)=400[16-12(\sin\theta+\cos\theta)+9\sin\theta\cos\theta]\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.



(2)由(1)得 $S=400[16-12(\sin\theta+\cos\theta)+9\sin\theta\cos\theta]\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，$\because t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore t\in[1,\sqrt{2}]$，$\therefore S=400\left(16-12t+\frac{9t^2-9}{2}\right)=1800\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+1400$，$\because t\in[1,\sqrt{2}]$，$\therefore$ 当 $t=\frac{4}{3}$ 时，$S_{\min}=1400$，即当 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$ 时，矩形 $ECFG$ 的面积取得最小值，最小值为 1400 平方米.

第 26 讲　三角函数的图象与性质

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. (1)$\left(\frac{\pi}{2},1\right)$　$\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$

(2)$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$　$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$

2. $\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$　$[-1,1]$　$[-1,1]$

2π　π　奇函数　偶函数　奇函数

$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$

$[-\pi+2k\pi,2k\pi]$　$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$　$[2k\pi,\pi+2k\pi]$

$(k\pi,0)$　$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$　$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$

$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$　$x=k\pi$

【对点演练】

1. $[1,3]$　$-\pi+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$　4π

[解析] 由 $y=2-\sin\frac{x}{2}(x\in\mathbf{R})$ 知，$y_{\min}=2-1=1$，$y_{\max}=2+1=3$，所以函数的值域为 $[1,3]$. 当函数取最大值时，$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=-\pi+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$，其最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

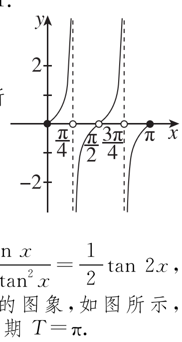
2. $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

[解析] 由 $2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

3. $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$　[解析] 要使函数有意义，则 $2x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，可得 $x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，所以函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. 1　[解析] 因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>x>\sin x$，所以 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 的图象在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上无交点. 因为 $y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 都是奇函数，所以当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$y=\sin x$ 与 $y=\tan x$ 的图象无交点. 又 $\sin 0=0=\tan 0$，所以所求交点个数是 1.

5. π　[解析] 当 $f(x)$ 有意义时，满足 $\begin{cases}\tan x\neq\pm1,\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 所以 $x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$x\neq\frac{3}{4}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. $f(x)=\frac{\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{1}{2}\tan 2x$，作出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象，如图所示，显然 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$.



6. 1　[解析] $\because y=-\sin^2x+3\sin x-1=-\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，$\sin x\in[-1,1]$，$\therefore$ 当 $\sin x=1$ 时，$y_{\max}=1$.

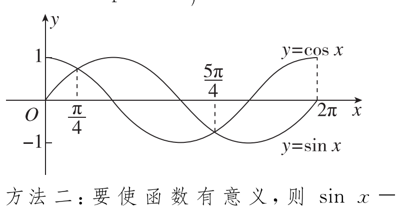
7. $\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right]$　[解析] 依题意，$y=2\sin\left(-x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 由于 $x\in[-\pi,0]$，所以所求的单调递增区间为 $\left[-\pi,-\frac{\pi}{6}\right]$.

● **课堂考点探究**

例 1　(1)D　(2)A　[解析] (1)由 $2\sin x+1>0$，得 $\sin x>-\frac{1}{2}$，$\therefore 2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$ 函数 $y=\lg(2\sin x+1)$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$. 故选 D.

(2)要使 $f(x)$ 有意义，则 $\begin{cases}x\neq k\pi,\\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\\ 2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，可得 $\begin{cases}x\neq\frac{k\pi}{2},\\ x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，$\therefore x\neq\frac{2k}{4}\pi$ 且 $x\neq\frac{2k+1}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}$，$\therefore x\neq\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，故选 A.

变式题　$\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$　[解析] 方法一：要使函数有意义，则 $\sin x-\cos x\geqslant0$，在同一坐标系中画出 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，如图所示. 由图可知，在 $[0,2\pi]$ 内，当 $\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$ 时，满足 $\sin x\geqslant\cos x$，再结合正弦、余弦函数的最小正周期是 2π，可知原函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.



方法二：要使函数有意义，则 $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant0$，所以 $2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$，所以原函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

例 2　(1)2　(2)$\left[1,\frac{3}{2}\right]$

[解析] (1)$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，故当 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{6}$ 时，$f(x)_{\max}=2$.

(2) $f(x)=\cos 2x+2|\sin x|=1-2\sin^2 x+2|\sin x|(x\in[0,2\pi])$，令 $|\sin x|=t$，则 $t\in[0,1]$，则 $f(x)$ 的值域转化为 $g(t)=1-2t^2+2t,t\in[0,1]$ 的值域，$g(t)=-2t^2+2t+1=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$，所以 $g(t)\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$.

变式题 (1)A (2)A (3)$3+\sqrt{2}$

[解析] (1) $f(x)=\sin 3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin(3\omega x+\pi)=-\sin 3\omega x$，由 $f(x)$ 的最小正周期为 π，得 $\frac{2\pi}{3\omega}=\pi$，解得 $\omega=\frac{2}{3}$，则 $f(x)=-\sin 2x$. 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，易知 $f(x)=-\sin 2x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

(2) 当 $x\in[0,a]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6}\right]$，由函数 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $[0,a]$ 上的值域为 $[-2,\sqrt{3}]$，知函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域为 $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，则有 $2a+\frac{\pi}{6}\in\left[\pi,\frac{11\pi}{6}\right]$，即 $a\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right]$. 故选 A.

(3) 设 $t=\sin x+\cos x$，则 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，可得 $g(t)=t+t^2-1+2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，当 $t=\sqrt{2}$ 时，$g(t)_{\max}=\sqrt{2}+2+1=3+\sqrt{2}$，即 $f(x)_{\max}=3+\sqrt{2}$.

例 3 (1)ABC (2)B [解析] (1) 对于 A，$y=\cos|2x|=\cos 2x$，所以它的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，满足题意；对于 B，$y=|\cos x|$ 的最小正周期为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{1}=\pi$，满足题意；对于 C，$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，满足题意；对于 D，$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，不满足题意. 故选 ABC.

(2) 由题意知，x_1 为 $f(x)$ 的最小值点，x_2 为 $f(x)$ 的最大值点，则 $|x_1-x_2|_{\min}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$（$T$ 为 $f(x)$ 的最小正周期），可得 $T=\pi$，又 $\omega>0$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. 故选 B.

例 4 (1)B (2)A [解析] (1) $f(x)=\cos x-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+1=\cos x-2\times\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}+1=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\cos x$，所以 $y=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 为偶函数，故 A 错误，B 正确；$y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1=-\sqrt{2}\sin x-1$，所以函数 $y=f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ 为非奇非偶函数，故 C，D 均错误. 故选 B.

(2) 因为 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，即 $\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，所以 $2<\omega<3$. 因为 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称，所以 $b=2$，且 $\omega\times\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\frac{2}{3}\left(k-\frac{1}{4}\right),k\in\mathbf{Z}$，又 $2<\omega<3$，所以 $k=4$，$\omega=\frac{5}{2}$，所以 $f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}+2=1$.

例 5 C [解析] $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$，令 $2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，∴函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$. 同理，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$. 结合选项可知，C 选项正确.

【应用演练】

1. A [解析] 对于 A，$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，最小正周期 $T=2\pi$，故 A 正确；对于 B，$y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 错误；对于 C，$y=\sin^2 x+\cos^2 x=1$，是常数函数，不存在最小正周期，故 C 错误；对于 D，$y=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 D 错误. 故选 A.
2. D [解析] $f(x)=-3\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，∴$k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$，故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$. 故选 D.
3. B [解析] 因为函数 $f(x)$ 的一个周期为 4，且 C，D 选项中函数的最小正周期为 8，所以排除 C，D. 对于 A，当 $x=2$ 时，$f(2)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=\sin\pi=0$，所以直线 $x=2$ 不是该函数图象的对称轴，排除 A. 对于 B，当 $x=2$ 时，$f(2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 2\right)=\cos\pi=-1$，所以直线 $x=2$ 是该函数图象的对称轴. 故选 B.
4. B [解析] 当 $x\in\left(-\frac{2\pi}{9},\frac{\pi}{12}\right)$ 时，$3x+\varphi\in\left(-\frac{2\pi}{3}+\varphi,\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$，由于 φ 是三角形的一个内角，所以 $0<\varphi<\pi$，则 $-\frac{2\pi}{3}<-\frac{2\pi}{3}+\varphi<\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\varphi<\frac{5\pi}{4}$，由于函数 $y=2\sin(3x+\varphi)$ 在区间 $\left(-\frac{2\pi}{9},\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调，所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{2\pi}{3}+\varphi,\\ \frac{\pi}{4}+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$，即 φ 的取值范围为 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$. 故选 B.
5. BCD [解析] 对于 A 选项，令 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\neq 0$，故函数 $f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 不是偶函数，故 A 错误；对于 B 选项，因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 0=0$，故 $x=-\frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点，故 B 正确；对于 C 选项，当 $-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$ 时，$-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增，故 C 正确；对于 D 选项，因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，故 D 正确. 故选 BCD.

第 27 讲　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及三角函数模型的应用

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. $\frac{-\varphi}{\omega}$　$\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$　$\frac{\pi-\varphi}{\omega}$　$\frac{\frac{3\pi}{2}-\varphi}{\omega}$　$\frac{2\pi-\varphi}{\omega}$

0　$\frac{\pi}{2}$　π　$\frac{3\pi}{2}$　2π

2. $|\varphi|$　$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$　3. $\frac{2\pi}{\omega}$　$\frac{\omega}{2\pi}$　$\omega x+\varphi$　φ

【对点演练】

1. $2,\frac{1}{\pi},\frac{\pi}{4}$ [解析] 由振幅、频率和初相的定义可知，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的振幅为 2，频率为 $\frac{1}{\pi}$，初相为 $\frac{\pi}{4}$.
2. $\frac{\pi}{12}$ [解析] 由于函数 $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 3\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$，故把 $y=\cos 3x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到函数 $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.
3. $y=10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20,x\in[6,14]$

[解析] 从题图中可以看出，6~14 时的温度变化曲线是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 在半个周期内的图象，所以 $A=\frac{1}{2}\times(30-10)=10$，$b=\frac{1}{2}\times(30+10)=20$，又 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=14-6$，所以 $\omega=\frac{\pi}{8}$. 又 $\frac{\pi}{8}\times 10+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，$0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，所以所求解析式为 $y=$

$10\sin\left(\frac{\pi}{8}x+\frac{3\pi}{4}\right)+20,x\in[6,14]$.

4. 右 $\frac{\pi}{6}$ [解析] $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，故将函数 $y=2\cos 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度即可得到函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

5. -1 或 -5 [解析] 由 $f\left(\frac{\pi}{8}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{8}-x\right)$得，直线$x=\frac{\pi}{8}$为函数 $f(x)$的图象的一条对称轴，故当 $x=\frac{\pi}{8}$时，函数 $f(x)$取得最大值或最小值，则 $-2+m=-3$ 或 $2+m=-3$，解得 $m=-1$ 或 $m=-5$.

6. $-\sqrt{3}$ [解析] 由题图可知，$\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi,\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. 因为点 $\left(\frac{5\pi}{12},2\right)$ 在 $f(x)$ 的图象上，所以 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f(0)=-\sqrt{3}$.

● 课堂考点探究

例1 (1)ACD (2)B [解析] (1)对于A，将 $f(x)=\sin 4x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍，可得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象，故A正确；对于B，将 $f(x)$图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$，可得到函数 $y=\sin 8x$ 的图象，故B错误；对于C，将 $f(x)$图象上所有的点向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，可得到函数 $y=\sin 4\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象，故C正确；对于D，将 $f(x)$图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度后，可得到函数 $y=\sin 4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(4x-2\pi)=\sin 4x$ 的图象，与原图象重合，故D正确. 故选ACD.

(2) $g(x)=f(x+\varphi)=\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$，要使 $g(x)$的图象与 $f(x)$的图象关于 y 轴对称，则 $g(x)=f(-x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $2\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $\varphi>0$，所以 $\varphi_{\min}=\frac{\pi}{6}$，故选B.

变式题 (1)D (2)$\frac{1}{2}$ [解析] (1) $f(x)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，$g(x)=\sin 2x-2\cos^2x+1=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$，故将 $f(x)$的图象向右平移$\frac{3\pi}{8}$个单位长度可得 $y=\sqrt{2}\cos 2\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$ 的图象，即为 $g(x)$的图象. 故选D.

(2)将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数 $g(x)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right](\omega>0)$ 的图象，又 $g(x)\leqslant\left|g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\omega\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}\right)=\pm1$，∴ $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=\frac{1}{2}+3k(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，∴ ω 的最小值为$\frac{1}{2}$.

例2 (1)A (2)$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ [解析] (1)由图可知 $\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=2\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$，排除B,D.

当 $A>0$ 时，$A=2$，所以 $f(x)=2\sin(x+\varphi)$，将最高点 $\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$ 代入可得 $2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=2$，所以 $\frac{3\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，故A正确；当 $A<0$ 时，$A=-2$，所以 $f(x)=-2\sin(x+\varphi)$，将$\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$代入可得 $-2\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=2$，所以$\frac{3\pi}{4}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{5\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为$|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，所以 $f(x)=-2\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$，故C错误. 故选A.

(2)依题意设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right),B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$，则 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$，因为 $\omega x_2+\varphi-(\omega x_1+\varphi)=\frac{2\pi}{3}$，即 $\frac{\pi}{6}\omega=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\omega=4$，又 $\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\frac{8\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，不妨取 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$，故 $f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

变式题 (1)C (2)C [解析] (1) ∵点 $\left(-\frac{4\pi}{9},0\right)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，∴ $\cos\left[\omega\times\left(-\frac{4\pi}{9}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=0$，∴ $-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，∴ $\omega=\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k(k\in\mathbf{Z})$，∴ $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k\right|}(k\in\mathbf{Z})$. 由图可知$\frac{10\pi}{9}<T<\frac{13\pi}{9}$，得$\frac{18}{13}<\left|\frac{3}{2}-\frac{9}{2}k\right|<\frac{9}{5}(k\in\mathbf{Z})$，解得$-\frac{1}{15}<k<\frac{1}{39}$ 或 $\frac{25}{39}<k<\frac{11}{15}(k\in\mathbf{Z})$，故 $k=0$，则 $f(x)$ 的最小正周期为$\frac{4\pi}{3}$. 故选C.

(2)由图象可知，$A=2$，由 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 可得 $T=\frac{2\pi}{3}-0=\frac{2\pi}{3}$，且 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以$\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\omega=3$，所以 $f(x)=2\sin(3x+\varphi)$，由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 可得，$f\left(\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi}{2}\right)=f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=-2$，所以 $f\left(\frac{5}{12}\pi\right)=2\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\varphi\right)=-2$，即 $\frac{5}{4}\pi+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{7}{4}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$. 故选C.

例3 解：(1)因为 $f(x)=\sin(\pi-\omega x)\cos\omega x+\cos^2\omega x=\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x=\frac{1}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\omega x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\omega x\right)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}(\omega>0)$，又由 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$，得$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{4}$，可得 $\omega=1$，所以 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，由题意可得 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $4x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，故 $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\in\left[0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$，故所求取值范围为 $\left[0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$.

变式题 (1)BC (2)$-\frac{\pi}{3}$ [解析] (1)方法一：$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为1，$g(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，最

大值为1,故B,C均正确;因为 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$,所以将 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度可得 $g(x)$ 的图象,又 $\frac{\pi}{8}<\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的零点不相同,$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴不相同,故A,D均不正确.故选BC.

方法二:$f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,最大值为1,$g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,最大值为1,故B,C均正确;令 $f(x)=\sin 2x=0$,得 $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,令 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的零点不相同,A不正确;令 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$,令 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的对称轴不相同,D不正确.故选BC.

(2)根据题意可得周期 $T=\left(\frac{5\pi}{18}-\frac{\pi}{9}\right)\times4=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=3$,所以 $f(x)=\cos(3x+\varphi)$,因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减,$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $3x+\varphi\in\left(\frac{\pi}{2}+\varphi,\pi+\varphi\right)$,且 $\begin{cases}2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}+\varphi,k\in\mathbf{Z},\\ \pi+\varphi\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 解得 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $-\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant0$,又因为 $f\left(\frac{5\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$,所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,可得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

例4 解:(1)由题意知 $\begin{cases}A+B=90,\\-A+B=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=40,\\B=50,\end{cases}$ $\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$,故 $H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t+\varphi\right)+50,t\in[0,30]$.因为 $H(0)=40\sin\varphi+50=10$,所以 $\sin\varphi=-1$,又 $|\varphi|\leqslant\pi$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$,因此 $H(t)=40\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+50=50-40\cos\frac{\pi}{15}t,t\in[0,30]$,

即 $H(t)=50-40\cos\frac{\pi}{15}t,t\in[0,30]$.

(2)令 $H(t)=50-40\cos\frac{\pi}{15}t=30$,可得 $\cos\frac{\pi}{15}t=\frac{1}{2}$,因为 $t\in[0,30]$,所以 $\frac{\pi}{15}t\in[0,2\pi]$,所以 $\frac{\pi}{15}t=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{3}$,解得 $t=5$ 或 $t=25$,故游客甲坐上摩天轮5分钟或25分钟时,距离地面的高度恰好为30米.

变式题 (1)A (2)BC [解析](1)设 $d=A\sin(\omega t+\varphi)+b\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$,由题意可知,$d_{\max}=A+b=6$,$d_{\min}=-A+b=-2$,解得 $A=4,b=2$,易知函数 $d=4\sin(\omega t+\varphi)+2\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{60}{1.5}=40$,则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{40}=\frac{\pi}{20}$,当 $t=0$ 时,$d=4\sin\varphi+2=0$,可得 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$,又因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,故 $d=4\sin\left(\frac{\pi}{20}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$,故选A.

(2)由 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$,得 $f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$,由题意得 $f(2\pi)=f'(2\pi)$,即 $A\sin\varphi=A\omega\cos\varphi$,故 $\tan\varphi=\omega$,因为 $\omega\in\mathbf{N}^*$,$|\varphi|<\frac{\pi}{3}$,所以 $\tan\varphi=\omega<\sqrt3$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,$\omega=1$,故选项A错误;因为破碎的涌潮的波谷为-4,所以 $f'(x)$ 的最小值为-4,即 $-A\omega=-4$,得 $A=4$,所以 $f(x)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)=4\times\left(\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{\sqrt2}{2}+\frac12\times\frac{\sqrt2}{2}\right)=\sqrt6+\sqrt2$,故选项B正确;因为 $f(x)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $f'(x)=4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $f'\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=4\cos x$ 为偶函数,故选项C正确;$f'(x)=4\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,由 $-\frac{\pi}{3}<x<0$,得 $-\frac{\pi}{12}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$,因为函数 $y=4\cos x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 上单调递增,在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减,所以 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 上不单调,故选项D错误.故选BC.

培优专题(三) 三角函数中的参数范围问题

例1 (1)A (2)C [解析](1)由 $x\in(0,\pi)$,得 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$,因为 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有且仅有2个极值点,所以 $2\pi<\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant3\pi$,解得 $\frac{11}{6}<\omega\leqslant\frac{17}{6}$.由 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{24}\right)$,得 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{24}\omega+\frac{\pi}{6}\right)$,因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{11}{24}\pi\right)$ 上单调递增,$\omega>0$,所以 $\begin{cases}\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant\pi+2k\pi,\\ \frac{11}{24}\pi\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant2\pi+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac52+6k\leqslant\omega\leqslant4+\frac{48k}{11}$,$k\in\mathbf{Z}$.综上,$\frac52\leqslant\omega\leqslant\frac{17}{6}$.故选A.

(2)∵函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in(0,2\pi))$ 的图象的一条对称轴为直线 $x=-\frac{\pi}{6}$,∴ $-\frac{\pi\omega}{6}+\varphi=k_1\pi+\frac{\pi}{2},k_1\in\mathbf{Z}$,∴ $\varphi=k_1\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\omega}{6},k_1\in\mathbf{Z}$,当 $\omega x+k_1\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\omega}{6}=k_2\pi+\frac{\pi}{2},k_1,k_2\in\mathbf{Z}$ 时,令 $k=k_2-k_1$,得 $x=\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,又 $f(x)$ 在 $\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调,∴存在 $k\in\mathbf{Z}$,使得 $\begin{cases}\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6}\leqslant\pi,\\ \frac{(k+1)\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{4\pi}{3},\end{cases}$ 解得 $\frac67k\leqslant\omega\leqslant\frac23(k+1),k\in\mathbf{Z}$,由 $\frac67k\leqslant\frac23(k+1)$,$k\in\mathbf{Z},\omega>0$,得 $0\leqslant k\leqslant\frac72$,故当 $k=3$ 时,ω 取得最大值 $\frac83$.故选C.

【自测题】

(1)D (2)$\frac74$ [解析](1)因为 $f(x)=2\sin\omega x(\sqrt3\sin\omega x+\cos\omega x)=2\sqrt3\sin^2\omega x+2\sin\omega x\cos\omega x=\sin2\omega x-\sqrt3\cos2\omega x+\sqrt3=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt3$,由 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,且 $\omega>0$,得 $2\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$,由 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增,得 $\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以 $0<\omega\leqslant\frac54$.因为对任意的实数 a,$f(x)$ 在 $(a,a+\pi)$ 上不单调,所以 $f(x)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}<2\pi$,所以 $\omega>\frac12$,所以 $\frac12<\omega\leqslant\frac54$.故选D.

(2)因为 $f(x)=\sin2\omega x+\cos2\omega x=\sqrt2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$,$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{16}\right)$,且 $\omega>1$,所以 $2\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}\right)$,且 $-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}<0<\frac{\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}$,由 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{16}\right)$ 上单调,得 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{4}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{8}\omega+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $1<\omega\leqslant2$,又因为 $f(x)$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{2}$,所以 $\pi\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=k-\frac14,k\in\mathbf{Z}$,所以 $\omega=\frac74$.

例2 (1)A (2)C [解析](1)当 $x\in[0,\pi]$ 时,$\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right](\omega>0)$,依题意可得 $\frac{3\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{2}$,解得 $\omega\in\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$,故选A.

(2)由题意知,曲线 C 为 $y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,又 C 关于 y 轴对称,所以 $\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac13+2k,k\in\mathbf{Z}$,又 $\omega>0$,故当 $k=0$ 时,ω 取得最小值,为 $\frac13$.故选C.

【自测题】

C [解析] 当 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 时,$\omega x\in$

$\left(-\frac{\omega\pi}{6},\frac{\omega\pi}{3}\right)$，因为函数 $f(x)=2\sin\omega x$ $(\omega>0)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上只有一个极值点，所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\omega\pi}{6},\\ \frac{\pi}{2}<\frac{\omega\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ 得 $\frac{3}{2}<\omega\leqslant3$. 故选C.

例3 (1)D (2)BC [解析] (1)依题意，$f(x)=\cos(2\omega x-\omega x)-2\sin2\omega x\sin\omega x=\cos(2\omega x+\omega x)=\cos3\omega x$，当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$3\omega x\in(0,6\omega\pi)$，若 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上有最小值没有最大值，则 $\pi<6\omega\pi\leqslant2\pi$，所以 $\frac{1}{6}<\omega\leqslant\frac{1}{3}$. 故选D.

(2)因为 $f(x)\geqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值，即直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴，又因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$，所以 $f(0)=2$，即 $f(0)=m\cos0+2\sqrt{3}\sin0=2$，所以 $m=2$，所以 $f(x)=2\cos\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x=4\left(\frac{1}{2}\cos\omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\right)=4\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\frac{16}{3}+8k,k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{16}{3}$，当 $k=1$ 时，$\omega=\frac{40}{3}$. 故选BC.

【自测题】

$\left(\frac{7}{6},\frac{5}{3}\right]$ [解析] $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+\cos^2\omega x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x+\frac{1}{2}\cos2\omega x+1=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，由 $x\in[0,\pi)$，$\omega>0$，得 $2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi)$ 上只有一个零点和两个最大值点，所以 $\frac{5\pi}{2}<2\pi\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{2}$，解得 $\frac{7}{6}<\omega\leqslant\frac{5}{3}$.

例4 $[2,3)$ [解析] 因为 $x\in[0,2\pi]$，$\omega>0$，所以 $\omega x\in[0,2\omega\pi]$，若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有3个零点，则需满足 $4\pi\leqslant2\omega\pi<6\pi$，所以 $2\leqslant\omega<3$.

【自测题】

C [解析] 因为 $x\in(0,\pi)$，$\omega>0$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，要使函数在区间 $(0,\pi)$ 上恰有三个极值点、两个零点，则 $\frac{5\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant3\pi$，解得 $\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$. 故选C.

第28讲　余弦定理、正弦定理

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $\frac{b}{\sin B}$　$\frac{c}{\sin C}$　$b^2+c^2-2bc\cos A$　$c^2+a^2-2ac\cos B$　$a^2+b^2-2ab\cos C$　$2R\sin A$　$2R\sin B$　$2R\sin C$　$\frac{a}{2R}$　$\frac{b}{2R}$　$\frac{c}{2R}$　$\sin A:\sin B:\sin C$　$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$　$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$　$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

3. $\frac{1}{2}ab\sin C$　$\frac{1}{2}bc\sin A$　$\frac{1}{2}ac\sin B$　$\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$

【对点演练】

1. 1 [解析] 因为在△ABC中，$A=30°$，$C=45°$，$c=\sqrt{2}$，所以由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $a=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin A=\frac{\sqrt{2}}{\sin45°}\times\sin30°=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\frac{1}{2}=1$.

2. $\frac{\pi}{6}$ [解析] 因为 $b^2+c^2=a^2+\sqrt{3}bc$，所以由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

3. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ [解析] 因为 $a=3,b=5,c=7$，所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9+25-49}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

4. 60° [解析] 由已知及正弦定理可得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{b\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$，即 $a^2+b^2-c^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}ab\sin C$，由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C$，所以 $\tan C=\sqrt{3}$，又 $0°<C<180°$，所以 $C=60°$.

5. $-\frac{16}{65}$ [解析] 由 $\cos A=\frac{3}{5}$，得 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin A=\frac{4}{5}$. 由 $\sin B=\frac{5}{13}$ 知 $\sin A>\sin B$，所以 $A>B$，所以角 B 是锐角，所以 $\cos B=\frac{12}{13}$. 所以 $\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}=-\frac{16}{65}$.

6. 等腰或直角 [解析] 由 $\sin C+\sin(B-A)=\sin2A$，得 $\sin(A+B)+\sin(B-A)=2\sin A\cos A$，即 $2\sin B\cos A=2\sin A\cos A$，所以 $2\cos A(\sin A-\sin B)=0$，所以 $\cos A=0$ 或 $\sin A-\sin B=0$. 当 $\cos A=0$ 时，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，此时△ABC为直角三角形. 当 $\sin A-\sin B=0$ 时，由正弦定理得 $a=b$，则△ABC为等腰三角形. 综上所述，△ABC为等腰三角形或直角三角形.

● 课堂考点探究

例1 解：(1)方法一：∵ $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2$，$A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，

∴ $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{6}$.

方法二：由 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，得 $4\cos^2A-4\sqrt{3}\cos A+3=0$，解得 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，∴ $A=\frac{\pi}{6}$.

(2)∵ $\sqrt{2}b\sin C=c\sin2B$，∴ $\sqrt{2}\sin B\sin C=2\sin C\sin B\cos B$，又 $\sin B\sin C>0$，

∴ $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $B=\frac{\pi}{4}$，得 $C=\frac{7\pi}{12}$，

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=4$，

∴ $b=4\sin B=2\sqrt{2}$，$c=4\sin C=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

∴△ABC的周长为 $2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

变式题1 (1)C (2)C [解析] (1)方法一：因为 $a\cos B-b\cos A=c$，所以由正弦定理得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$，即 $\sin(A-B)=\sin C$，所以 $A-B=C$ 或 $A-B+C=\pi$(舍). 因为 $C=\frac{\pi}{5}$，$A+B+C=\pi$，所以 $A+B=\frac{4\pi}{5}$. 所以 $B=\frac{3\pi}{10}$. 故选C.

方法二：由余弦定理得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$，整理得 $a^2=b^2+c^2$，所以△ABC为直角三角形，且 $A=\frac{\pi}{2}$，又 $C=\frac{\pi}{5}$，所以 $B=\frac{3\pi}{10}$. 故选C.

(2)因为 $B=60°$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，所以 $\sin A\sin C=\frac{4}{9}\sin^2B=\frac{1}{3}$. 由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-ac=\frac{9}{4}ac$，即 $a^2+c^2=\frac{13}{4}ac$，所以 $\sin^2A+\sin^2C=\frac{13}{4}\sin A\sin C=\frac{13}{12}$，所以 $(\sin A+\sin C)^2=\sin^2A+\sin^2C+2\sin A\sin C=\frac{7}{4}$，则 $\sin A+\sin C=\frac{\sqrt{7}}{2}$，故选C.

变式题2 解：(1)由 $\frac{\cos C}{c}=\frac{\cos A}{3b-a}$ 及正弦定理可得，$\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\cos A}{3\sin B-\sin A}$，

即 $3\sin B\cos C-\sin A\cos C=\cos A\sin C$，

所以 $3\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)$. 又 $\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$，且 $\sin B\neq0$，所以 $\cos C=\frac{1}{3}$. 又 $\sin C>0$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2)因为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=5\sqrt{2}$，所以 $ab=15$. 由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-10$.

又 $c^2=6(a-b)^2=6(a^2+b^2)-180$，

所以 $a^2+b^2=34$，$c=2\sqrt{6}$，

所以 $a+b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}=8$，

故△ABC的周长为 $a+b+c=8+2\sqrt{6}$.

例2 (1)D (2)D [解析] (1)由 $a-c\cos B=b-c\cos A$ 及余弦定理得 $a-c\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b-c\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，化简得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{a}=\frac{a^2+b^2-c^2}{b}$. 当 $a^2+b^2-c^2=0$，即 $a^2+b^2=c^2$ 时，△ABC为直角三角形；当 $a^2+b^2-c^2\neq0$ 时，得 $a=b$，则△ABC为等腰三角形. 综上，△ABC为等腰三角形或直角三角形，故D正确. 故选D.

(2)由题可得 $a(1+\cos C)=b(1-\cos A)+a$，化简得 $a\cos C+b\cos A=b$，由正弦定理可得 $\sin A\cos C+\sin B\cos A=\sin B$，因为 $\sin B=\sin(A+C)$，所以 $\sin A\cos C+\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，即 $\cos A(\sin B-\sin C)=0$，所以 $\cos A=0$ 或 $\sin B=\sin C$，可得 $A=\frac{\pi}{2}$ 或 $B=C$，所以△ABC为直角三角形或等腰三角形. 故选D.

变式题 (1)C (2)ACD [解析] (1)∵ $a^2+b^2-c^2=ab$，∴ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，∴ $C=\frac{\pi}{3}$. 由 $2\cos A\sin B=\sin C$，得 $\cos A=\frac{\sin C}{2\sin B}=\frac{c}{2b}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$，∴ $b^2=a^2$，即 $b=a$，又 $C=\frac{\pi}{3}$，∴该三角

形为等边三角形，故选 C.

(2)对于 A，若 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，则由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$，即 $\tan A=\tan B=\tan C$，则 $A=B=C$，所以 $\triangle ABC$ 一定是等边三角形，故 A 正确；对于 B，若 $a\cos A=b\cos B$，则由正弦定理得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=180°$，即 $A=B$ 或 $A+B=90°$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形，故 B 错误；对于 C，若 $b\cos C+c\cos B=b$，则由正弦定理得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B$，所以 $\sin(B+C)=\sin A=\sin B$，即 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形，故 C 正确；对于 D，在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a^2+b^2<c^2$，且 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，所以 $\cos C<0$，所以角 C 为钝角，所以 $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形，故 D 正确. 故选 ACD.

例 3 解：(1)由 $A+B+C=\pi$ 可得 $A=\pi-(B+C)$，所以 $\cos A=-\cos(B+C)$，所以 $a\cos(B-C)-a\cos(B+C)=2\sqrt3 c\sin B\cos A$，

即 $a\cos B\cos C+a\sin B\sin C-a\cos B\cos C+a\sin B\sin C=2\sqrt3 c\sin B\cos A$，

即 $a\sin B\sin C=\sqrt3 c\sin B\cos A$，

由正弦定理可得 $\sin A\sin B\sin C=\sqrt3\sin C\sin B\cos A$. 因为 $\sin C>0$，$\sin B>0$，所以 $\sin A=\sqrt3\cos A$，所以 $\tan A=\sqrt3$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R，则由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R=2\sqrt3$，所以 $b=2\sqrt3\sin B$，$c=2\sqrt3\sin C$，所以 $2c-b=4\sqrt3\sin C-2\sqrt3\sin B=2\sqrt3(2\sin C-\sin B)$，又 $A+B+C=\pi$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}-C$，$C\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $2c-b=2\sqrt3\left[2\sin C-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)\right]=2\sqrt3\left(\frac32\sin C-\frac{\sqrt3}{2}\cos C\right)=6\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，又 $C\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $C-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2c-b=6\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)\in(-3,6)$，所以 $2c-b$ 的取值范围为 $(-3,6)$.

变式题 解：(1)由已知条件得 $\sin 2B+\sin A\sin 2B=\cos A+\cos A\cos 2B$，则 $\sin 2B=\cos A+\cos A\cos 2B-\sin A\sin 2B=\cos A+\cos(A+2B)=\cos[\pi-(B+C)]+\cos[\pi-(B+C)+2B]=-\cos(B+C)-\cos(B-C)=-2\cos B\cos C$，所以 $2\sin B\cos B=-2\cos B\cos C$，所以 $(\sin B+\cos C)\cos B=0$.

由题知 $1+\cos 2B\neq0$，所以 $B\neq\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos B\neq0$，

所以 $\sin B=-\cos C=\frac12$，可得 $B=\frac{\pi}{6}$.

(2)由(1)知 $\sin B=-\cos C>0$，则 $B=C-\frac{\pi}{2}$，则 $\sin A=\sin(B+C)=\sin\left(2C-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2C$. 由正弦定理得 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}=\frac{\cos^2 2C+\cos^2C}{\sin^2C}=\frac{(1-2\sin^2C)^2+(1-\sin^2C)}{\sin^2C}=\frac{2+4\sin^4C-5\sin^2C}{\sin^2C}=\frac{2}{\sin^2C}+4\sin^2C-5\geqslant2\sqrt{\frac{2}{\sin^2C}\cdot4\sin^2C}-5=4\sqrt2-5$，当且仅当 $\sin^2C=\frac{\sqrt2}{2}$ 时等号成立，所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt2-5$.

第 29 讲 多三角形背景下解三角形

● 课堂考点探究

例 1 解：(1)证明：由 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$ 及正弦定理得，$BD\cdot b=ac$，

又 $b^2=ac$，所以 $BD\cdot b=b^2$，即 $BD=b$.

(2)若 $AD=2DC$，则 $AD=\frac23 b$，$DC=\frac13 b$. 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADB=\frac{DA^2+DB^2-AB^2}{2DA\cdot DB}=\frac{\left(\frac23b\right)^2+b^2-c^2}{2\times\frac23b\cdot b}$；

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\frac{DB^2+DC^2-BC^2}{2DB\cdot DC}=\frac{b^2+\left(\frac13b\right)^2-a^2}{2\cdot b\cdot\frac13b}$.

因为 $\angle ADB+\angle BDC=\pi$，所以 $\frac{\left(\frac23b\right)^2+b^2-c^2}{2\times\frac23b\cdot b}+\frac{b^2+\left(\frac13b\right)^2-a^2}{2\cdot b\cdot\frac13b}=0$，即 $\frac{11}{3}b^2=2a^2+c^2$，又 $b^2=ac$，所以 $\frac{11}{3}ac=2a^2+c^2$，即 $6a^2-11ac+3c^2=0$，即 $(3a-c)\cdot(2a-3c)=0$，解得 $3a=c$ 或 $2a=3c$. 当 $3a=c$ 时，由 $\frac{11}{3}b^2=2a^2+c^2$，得 $a^2=\frac13b^2$，$c^2=9a^2=3b^2$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac13b^2+3b^2-b^2}{2b^2}=\frac{\frac73b^2}{2b^2}=\frac76>1$，不成立. 当 $2a=3c$ 时，由 $\frac{11}{3}b^2=2a^2+c^2$，得 $a^2=\frac32b^2$，$c^2=\frac23b^2$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac32b^2+\frac23b^2-b^2}{2b^2}=\frac{\frac76b^2}{2b^2}=\frac{7}{12}$. 综上，$\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$.

变式题 解：(1)由 $\cos B+2\cos C=0$ 和余弦定理可得，$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+2\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=0$，将 $c=2b$ 代入得，$\frac{a^2+4b^2-b^2}{2a\cdot2b}+2\times\frac{a^2+b^2-4b^2}{2ab}=0$，化简得 $5a^2=9b^2$，即 $a=\frac{3\sqrt5}{5}b$. 由余弦定理可得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+4b^2-\frac95b^2}{4b^2}=\frac45$.

(2)由(1)和余弦定理可得，$\cos\angle ACB=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{b^2+\frac95b^2-4b^2}{\frac{6\sqrt5}{5}b^2}=-\frac{\sqrt5}{5}$，则 $\angle ACB\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，故 $\sin\angle ACB=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt5}{5}$. 由 $\overrightarrow{AD}=\frac12\overrightarrow{DB}$，可得 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}=\frac12(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$，整理得 $\overrightarrow{CD}=\frac23\overrightarrow{CA}+\frac13\overrightarrow{CB}$，两边同时平方可得，$|\overrightarrow{CD}|^2=\left(\frac23\overrightarrow{CA}+\frac13\overrightarrow{CB}\right)^2=\frac49b^2+\frac19a^2+\frac49ab\cos\angle ACB$，

又因为 $CD=\sqrt{17}$，所以 $17=\frac49b^2+\frac19\times\frac95b^2+\frac49\times\frac{3\sqrt5}{5}\times\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right)b^2$，整理得 $\frac{17}{45}b^2=17$，可得 $b=3\sqrt5$，则 $a=\frac{3\sqrt5}{5}\times3\sqrt5=9$，故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac12ab\sin\angle ACB=\frac12\times9\times3\sqrt5\times\frac{2\sqrt5}{5}=27$.

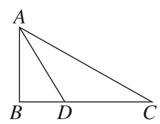
例 2 解：(1)证明：记 CD 的中点为 E，连接 AE，则 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$，因为 $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $AE\perp BC$，所以 AE 为 CD 的垂直平分线，所以 $AD=AC=b$.

(2)记 $\angle CAD=\theta$，因为 $\overrightarrow{AD}=\frac13\overrightarrow{AB}+\frac23\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，所以 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $BD=\frac23a$，$DC=\frac13a$，又 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，所以 $\frac cb=\frac{BD}{DC}=2$，则 $c=2b$. 在 $\triangle ACD$，$\triangle ABD$ 中，分别由余弦定理得 $b^2+b^2-2b^2\cos\theta=\frac{a^2}{9}$，$b^2+4b^2-4b^2\cos\theta=\frac{4a^2}{9}$，消去 $\cos\theta$ 可得 $a^2=\frac{9b^2}{2}$. 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{b^2+4b^2-\frac{9b^2}{2}}{4b^2}=\frac18$，所以 $\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac18\right)^2}=\frac{3\sqrt7}{8}$.

变式题 解：(1)依题意，由正弦定理可得 $\frac{\sin C-\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$，所以 $\sin C-\sin B=\sin(A-B)$，又 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$，所以 $\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$. 因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，所以 $\cos A=\frac12$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)方法一：由题意得，$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，所以 $\frac12c\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}+\frac12b\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}=\frac12b\cdot c\sin\frac{\pi}{3}$，即 $b+c=\frac{\sqrt3}{2}bc$，又 $b=AC=2\sqrt3$，所以 $c=\sqrt3$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=9$，即 $a=3$，所以 $a+c=3+\sqrt3$.

方法二：如图，在 $\triangle ACD$ 中，$AD=2$，$AC=2\sqrt3$，$\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理得，$CD^2=2^2+(2\sqrt3)^2-2\times2\times2\sqrt3\cos\frac{\pi}{6}=4$，所以 $CD=AD=2$，所以 $C=\angle CAD=\frac{\pi}{6}$，所以 $B=\pi-$



$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以 $a=b\cos\frac{\pi}{6}=3$，$c=b\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$，所以 $a+c=3+\sqrt{3}$.

例3 解：(1)在△ABC中，由余弦定理可得 $\cos\angle BCA=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}$，

又 $AB=\sqrt5$，$AC=3$，$BC=2\sqrt2$，

所以 $\cos\angle BCA=\frac{9+8-5}{2\times3\times2\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$.

(2)由(1)知 $\cos\angle BCA=\frac{\sqrt2}{2}$，所以 $\sin\angle BCA=\sqrt{1-\cos^2\angle BCA}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt2}{2}$. 因为 $\cos\angle BCD=-\frac{12}{13}$，所以 $\sin\angle BCD=\sqrt{1-\cos^2\angle BCD}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$，所以 $\sin\angle ACD=\sin(\angle BCD-\angle BCA)=\sin\angle BCD\cos\angle BCA-\cos\angle BCD\sin\angle BCA=\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt2}{2}+\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt2}{2}=\frac{17\sqrt2}{26}$.

因为 $\cos\angle ADC=-\frac{\sqrt{21}}{5}$，

所以 $\sin\angle ADC=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2}=\frac{2}{5}$.

在△ACD中，由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$，即 $\frac{3}{\frac{2}{5}}=\frac{AD}{\frac{17\sqrt2}{26}}$，所以 $AD=\frac{255\sqrt2}{52}$.

变式题 解：(1)设 $BC=CD=x>0$，在△ABC中，由余弦定理得 $AC^2=9+x^2-2\times3x\cos B=7$，即 $x^2+2=6x\cos B$①. 在△ACD中，由余弦定理得 $AC^2=1+x^2-2x\cos D=7$，即 $x^2-6=2x\cos D$②. 因为 $B+D=\pi$，所以 $\cos D=\cos(\pi-B)=-\cos B$，联立①②可得 $x=2$(负值舍去)，$\cos B=\frac{1}{2}$. 因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)在△PBC中，由正弦定理知，$\frac{BC}{\sin\angle BPC}=\frac{PC}{\sin B}$，所以 $\sin\angle BPC=\frac{BC\sin B}{PC}=\frac{2\times\frac{\sqrt3}{2}}{\sqrt3}=1$，又 $0<\angle BPC<\pi$，所以 $\angle BPC=\frac{\pi}{2}$. 在Rt△PBC中，由勾股定理知，$PB=\sqrt{BC^2-PC^2}=1$，则 $PA=AB-PB=2$.

第30讲 余弦定理、正弦定理应用举例

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. 仰角 俯角

【对点演练】

1. $\sqrt3$ [解析] 在△ABC中，易得 $A=30°$，由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，则 $AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{1\times\frac{\sqrt3}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt3$(km).

2. $(30\sqrt3+30)$ m [解析] 由题意知 $\angle APB=45°-30°$，所以 $\sin\angle APB=\sin(45°-30°)=\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$，由正弦定理得 $PB=\frac{AB\sin30°}{\sin\angle APB}=\frac{60\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}}=30(\sqrt6+\sqrt2)$(m)，所以该树的高度为 $30(\sqrt6+\sqrt2)\sin45°=(30\sqrt3+30)$(m).

3. $2\sqrt3$ km [解析] 依题意知 $\angle ACB=180°-20°-40°=120°$，所以由余弦定理得 $AB=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos120°}=2\sqrt3$(km).

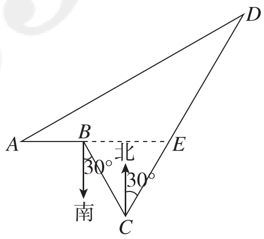
4. $200\sqrt3$ m [解析] 由题意得 $BC=\frac{100}{\tan15°}-\frac{100}{\tan75°}=100\times\frac{\tan75°-\tan15°}{\tan15°\tan75°}=100\times\frac{\tan60°(1+\tan15°\tan75°)}{\tan15°\tan75°}$，而 $\tan15°\tan75°=\frac{\sin15°}{\cos15°}\cdot\frac{\sin75°}{\cos75°}=\frac{\sin15°}{\cos15°}\cdot\frac{\cos15°}{\sin15°}=1$，所以 $BC=100\times2\sqrt3=200\sqrt3$(m).

5. 200° [解析] 根据方位角的概念可得点A的方位角为200°.

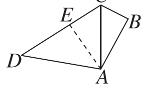
● **课堂考点探究**

例1 D [解析] 因为 $\angle ADC=30°$，$\angle ACB=75°$，$\angle ACD=120°$，所以 $\angle BCD=45°$，$\angle CAD=30°$，在△ACD中，$\angle ADC=\angle CAD=30°$，所以 $AC=CD=10\sqrt3$. 在△BDC中，$\angle CBD=180°-(30°+45°+45°)=60°$，由正弦定理得 $BC=\frac{10\sqrt3\sin75°}{\sin60°}=5\sqrt2+5\sqrt6$. 在△ABC中，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=(10\sqrt3)^2+(5\sqrt2+5\sqrt6)^2-2\times10\sqrt3\times(5\sqrt2+5\sqrt6)\cos75°=500$，所以 $AB=10\sqrt5$，即基站A，B之间的距离为 $10\sqrt5$ km，故选D.

变式题 (1)B (2)475 [解析] (1)如图，$AB=4$，$BC=6$，$CD=16$，延长AB交CD于点E，则 $\angle CBE=60°$，$\angle BCE=60°$，因此△CBE是正三角形，故 $BE=CE=BC=6$，$\angle BEC=60°$，故 $AE=DE=10$，$\angle AED=120°$. 在△ADE中，由余弦定理得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cos120°}=\sqrt{10^2+10^2-2\times10\times10\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=10\sqrt3$，所以A，D两地间的距离为 $10\sqrt3$ km. 故选B.



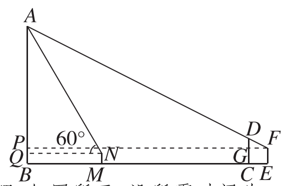
(2)作 $AE\perp CD$，垂足为E，如图，由题意可得 $B=90°$，$\angle CAB=30°$，$BC=300$ m，所以 $AC=\frac{BC}{\sin\angle CAB}=600$(m)，$AB=\frac{BC}{\tan\angle CAB}=300\sqrt3\approx300\times1.73=519$(m). 在△ADC中，由正弦定理可得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin D}$，则 $\sin D=\frac{3\sin80°}{4}$，所以 $\cos\angle EAD=\frac{3\sin80°}{4}\approx0.735$，所以 $\sin\angle EAD\approx0.68$，$\cos\angle CAE=\cos(80°-\angle EAD)\approx0.17\times0.735+0.98\times0.68=0.79135$. 在直角三角形ACE中，$AE=AC\cdot\cos\angle CAE\approx600\times0.79135\approx475$(m)，因为 $AE<AB$，所以最短距离约为475 m.



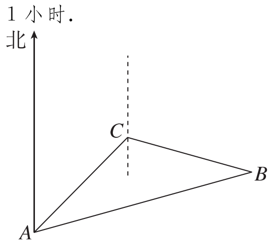
例2 (1)C (2)A [解析] (1)设 $AB=x$ m，在Rt△ABC中，因为 $\angle ACB=45°$，所以 $BC=x$ m，在Rt△ABD中，因为 $\angle ADB=30°$，所以 $BD=\frac{x}{\tan30°}=\sqrt3x$(m)，在△BCD中，由余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos\angle CBD$，即 $23.8^2=x^2+3x^2-3x^2$，可得 $x=23.8$. 故选C.

(2)在Rt△PMN中，$PM=\frac{MN}{\sin15°}$，在△FPM中，$\angle FMP=45°+15°=60°$，$\angle FPM=180°-60°-15°=105°$，则 $\angle MFP=180°-105°-60°=15°$，由正弦定理得 $\frac{PM}{\sin\angle MFP}=\frac{PF}{\sin\angle PMF}$，则 $PF=\frac{\sin\angle PMF}{\sin\angle MFP}\cdot PM=\frac{\sin60°}{\sin15°}\cdot\frac{MN}{\sin15°}=\frac{\sqrt3}{2}\times\frac{MN}{\sin^2 15°}=\frac{\sqrt3MN}{1-\cos30°}$. 在Rt△PEF中，$EF=PF\cdot\sin60°=\frac{\sqrt3MN}{1-\cos30°}\cdot\sin60°=\frac{40\sqrt3\times(2-\sqrt3)}{1-\frac{\sqrt3}{2}}\times\frac{\sqrt3}{2}=120$(m). 故选A.

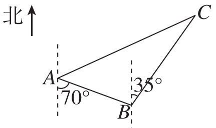
变式题 B [解析] 如图，过点N作 $NQ\perp AB$ 于点Q，过点F作 $FP\perp AB$ 于点P，交CD于点G，则四边形BMNQ，四边形BCGP，四边形CEFG，四边形BEFP都是矩形，所以 $BQ=MN=1$ m，$BM=QN$，$BP=CG=EF=1.5$ m，$FG=CE=2$ m，所以 $DG=CD-CG=2.5-1.5=1$(m). 在Rt△AQN中，$QN=\frac{AQ}{\tan\angle ANQ}=\frac{AB-1}{\tan60°}=\frac{AB-1}{\sqrt3}$，所以 $FP=BM+MC+CE=\frac{AB-1}{\sqrt3}+94$，由已知得 $\triangle DFG\backsim\triangle AFP$，所以 $\frac{FG}{DG}=\frac{FP}{AP}$，即 $\frac{2}{1}=\frac{\frac{AB-1}{\sqrt3}+94}{AB-1.5}$，所以 $AB=\frac{581+95\sqrt3}{11}\approx\frac{581+95\times1.732}{11}\approx67.8$(m). 故选B.



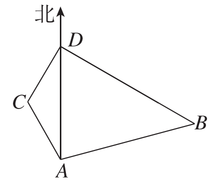
例3 解：如图所示，设所需时间为t小时，则 $AB=10\sqrt3t$ 海里，$CB=10t$ 海里，在△ABC中，$\angle ACB=45°+(180°-105°)=120°$，由余弦定理得 $AB^2=AC^2+CB^2-2AC\cdot CB\cdot\cos120°$，即 $(10\sqrt3t)^2=10^2+(10t)^2-2\times10\times10t\cos120°$，整理得 $2t^2-t-1=0$，可得 $t=1$，所以 $AB=10\sqrt3$ 海里，$CB=10$ 海里，在△ABC中，由正弦定理得 $\frac{CB}{\sin\angle CAB}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$，所以 $\sin\angle CAB=\frac{CB\sin\angle ACB}{AB}=\frac{10\times\frac{\sqrt3}{2}}{10\sqrt3}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle CAB=30°$，所以舰艇航行的方位角为75°，追上渔船所需的时间为1小时.



变式题 (1)B (2)AC



[解析] (1)如图,依题意知,在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=70°+35°=105°$,$AB=40$海里,$BC=40\sqrt{2}$海里,所以由余弦定理得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC=40^2+(40\sqrt{2})^2-2\times 40\times 40\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=3200+1600\sqrt{3}$,所以$AC=\sqrt{3200+1600\sqrt{3}}=20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$(海里).由正弦定理得$\frac{40\sqrt{2}}{\sin\angle CAB}=\frac{20(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sin 105°}$,所以$\sin\angle CAB=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又因为$\angle CAB$为锐角,所以$\angle CAB=45°$,所以航行的方向和距离分别为北偏东65°,$20(\sqrt{6}+\sqrt{2})$海里.故选B.
(2)如图,由题意可知$\angle ADB=60°$,$\angle BAD=75°$,$\angle CAD=30°$,$AB=12\sqrt{6}$,$AC=8\sqrt{3}$,所以$B=180°-60°-75°=45°$.在$\triangle ABD$中,由正弦定理得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,所以$AD=\frac{12\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=24$,故A正确;在$\triangle ACD$中,由余弦定理得$CD=\sqrt{AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\angle CAD}$,即$CD=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+24^2-2\times 8\sqrt{3}\times 24\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$,故B错误;由B项知$CD=AC$,所以$\angle CDA=\angle CAD=30°$,所以灯塔$C$在$D$的南偏西30°方向上,故C正确;由$\angle ADB=60°$,得$D$在灯塔$B$的北偏西60°方向上,故D错误.故选AC.



第五单元 平面向量与复数

第31讲 平面向量的概念及其线性运算

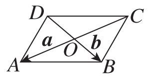
● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)大小 方向 模 长度 (2)相同 $\mathbf{0}$ (3)1 (4)相同或相反 平行 (5)相同 (6)相反
2. $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 相同 相反 $\mathbf{0}$ $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ $\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
3. $\lambda\boldsymbol{a}$

【对点演练】

1. $\overrightarrow{CF}$ [解析] 将$\overrightarrow{CD}$平移到$\overrightarrow{AF}$,$\overrightarrow{EF}$平移到$\overrightarrow{CB}$,故$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CF}$.
2. $\frac{1}{2}$ [解析] ∵$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$共线,∴存在实数$\mu$使得$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$,∴$\begin{cases}\lambda=\mu,\\1=2\mu,\end{cases}$∴$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\\mu=\frac{1}{2}.\end{cases}$
3. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$



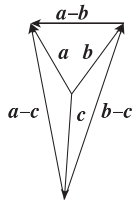
[解析] 如图,$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
4. 充分不必要 [解析] $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Rightarrow|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,充分性成立,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,必要性不成立,所以"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$"是"$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$"的充分不必要条件.
5. 平行四边形 [解析] 在平面四边形$ABCD$中,因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,所以$AB=DC$,且$AB/\!/DC$,所以四边形$ABCD$是平行四边形.
6. $[2,6]$ [解析] 当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相同时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$,当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$方向相反时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=6$,当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线时,$2<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<6$,所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的取值范围为$[2,6]$.

● 课堂考点探究

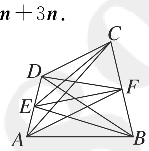
例1 AC [解析] 对于A,向量$\overrightarrow{AB}$与向量$\overrightarrow{BA}$的长度相等,方向相反,故A正确;对于B,当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行,且$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{b}$为零向量时,不满足条件,故B错误;对于C,两个有共同起点且相等的向量,其终点必相同,故C正确;对于D,两个有公共终点的向量不一定是共线向量,故D错误.故选AC.

变式题 (1)BD (2)A [解析] (1)零向量是有方向的,其方向是任意的,故A错误;若$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$都是零向量,则它们必相等,故B正确;若$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$都为单位向量,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$长度相等,但方向不一定相同,故C错误;由向量相等的定义知D正确.故选BD.
(2)$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$等价于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向,当$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}$时,$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同向,故选A.

例2 (1)C (2)A [解析] (1)在平行四边形中,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BD}$. ∵$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$,∴$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{DB}|$,∴平行四边形$ABCD$是矩形.故选C.
(2)如图,由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 1$,$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant 2$,得$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant 3$,充分性成立;当$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant 3$时,不一定有$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 1$,$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant 2$,必要性不成立.综上,"$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 1$,$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant 2$"是"$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant 3$"的充分不必要条件.故选A.



例3 (1)B (2)D [解析] (1)因为点D在边AB上,$BD=2DA$,所以$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$,所以$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$,所以$\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.
(2)如图,因为在平面四边形$ABCD$中,E,F分别为AD,BC的中点,所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

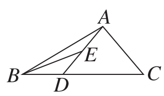


$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$,所以$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$,所以A不符合题意;因为$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$,所以$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$,所以B不符合题意;因为$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$,所以$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}$,所以C不符合题意;因为$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$,所以D符合题意.故选D.

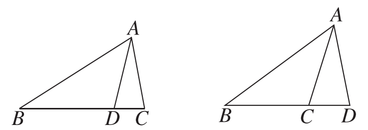
例4 (1)C (2)B [解析] (1)由题知$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+(2-\lambda)\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$. ∵$O$是$\triangle ABC$的重心,∴$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,∴$(2-\lambda)\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,又$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{OC}$不共线,∴$\lambda=1$.故选C.
(2)因为$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$,所以$m=\frac{1}{3}$,$n=\frac{1}{6}$,所以$m+n=\frac{1}{2}$,故选B.

【应用演练】

1. B [解析] 如图,由题知$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\right]=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{BE}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.故选B.



2. AD [解析] 对于A,因为D是AB的中点,所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$,因为$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}$,所以$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$,所以A正确;对于B,由向量加法的三角形法则,得$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$,所以B错误;对于C,$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,所以C错误;对于D,因为$D$是$AB$的中点,所以$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,所以D正确.故选AD.
3. BC [解析] 当点D在线段BC上时,如图①,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$,此时$\frac{m}{n}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$.当点$D$在线段$BC$的延长线上时,如图②,$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$,此时$\frac{m}{n}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}$.故选BC.



① ②

4. $\frac{20}{3}$ [解析] 由题知$2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=-m\overrightarrow{OC}$,则$\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}=-\frac{m}{5}\overrightarrow{OC}$,设$-\frac{m}{5}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$,则$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$,因为$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$,所以$A$,$B$,$D$三点共线,则$\overrightarrow{OC}$与$\overrightarrow{OD}$反向共线,所以$m>0$,所以$\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OC}|}=\frac{m}{5}$,所以$\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{m}{m+5}$,因为$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{CD}|}$,所以$\frac{m}{m+5}=\frac{4}{7}$,解得$m=\frac{20}{3}$.
5. 2 [解析] 因为四边形$ABCD$是边长为1的正方形,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-$

$\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AB}$，又$|\overrightarrow{AB}|=1$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|2\overrightarrow{AB}|=2$.

例 5 (1)C (2)B [解析](1)因为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线，所以存在 $k\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{c}$，即 $\boldsymbol{a}+(2x-1)\boldsymbol{b}=kx\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}kx=1,\\k=2x-1,\end{cases}$ 整理可得 $x(2x-1)=1$，即 $2x^2-x-1=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=1$.

(2)由 $\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$，得 $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{PA}$，即 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{PA}$，则 $\overrightarrow{CP},\overrightarrow{PA}$ 为共线向量，又 $\overrightarrow{CP},\overrightarrow{PA}$ 有一个公共点 P，所以 C,P,A 三点共线，即点 P 在 AC 边所在直线上. 故选 B.

变式题 (1)A (2)C [解析](1)$2\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{OA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{OC}$，因为点 A,B,C 是直线 l 上相异的三点，所以点 A,B,C 三点共线，则 $\frac{3}{2}+\frac{\lambda}{2}=1$，解得 $\lambda=-1$. 故选 A.

(2)∵O 为△ABC 所在平面上一点，且实数 x,y,z 满足 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}(x^2+y^2+z^2\neq0)$，∴$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=-z\overrightarrow{OC}$. 若 $xyz=0$，则当 x,y,z 中有两个为 0 时，O 与△ABC 的一个顶点重合. 当 x,y,z 中只有一个为 0 时，假设 $x=0$(y,z 不为 0)，可得 $y\overrightarrow{OB}=-z\overrightarrow{OC}$，∴$\overrightarrow{OB}=-\frac{z}{y}\overrightarrow{OC}$，∴向量 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 共线，∴点 O 在△ABC 的边 BC 所在直线上. 若点 O 在△ABC 的边所在直线上，假设在 AB 上，则向量 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ 共线，∴$z=0$，∴$xyz=0$. ∴“$xyz=0$”是“点 O 在△ABC 的边所在直线上”的充要条件. 故选 C.

第 32 讲 平面向量基本定理及坐标表示

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 2. $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$
3. (1)(x_1+x_2,y_1+y_2) (x_1-x_2,y_1-y_2) $(\lambda x_1,\lambda y_1)$ $\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ (2)①终点 ②(x_2-x_1,y_2-y_1) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
4. $x_2y_1=x_1y_2$

【对点演练】

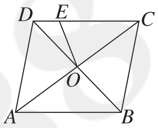
1. (9,7) [解析]依题意得 $\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{CD}=(5,5)$，所以 $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2(2,1)+(5,5)=(9,7)$.
2. $-\frac{3}{49}$ [解析]$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\times\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$，故 $\lambda\mu=-\frac{1}{7}\times\frac{3}{7}=-\frac{3}{49}$.
3. (2,2)或(3,1) [解析]由题意可知 $\overrightarrow{P_1P_2}=(3,-3)$. 若 $\overrightarrow{P_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$，则点 P 的坐标为(2,2)；若 $\overrightarrow{P_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2}$，则点 P 的坐标为(3,1).
4. ② [解析]两个不共线的向量可以构成一组基底，①③④中两向量共线，②中 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线. 故填②.
5. 2 或−1 [解析]$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2x-2,3-x)$，∵$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{a}$，∴$2x-2=x(3-x)$，即 $x^2-x-2=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-1$.
6. $\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$或(1,0) [解析]由点 P 在直线 AB 上，且$|\overrightarrow{AP}|=2|\overrightarrow{PB}|$，可得 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 或 $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$. 当 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 时，设 $P(a,b)$，则$(a+3,b-4)=2(-1-a,2-b)$，解得 $a=-\frac{5}{3},b=\frac{8}{3}$，此时点 P 的坐标为$\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$. 当 $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{PB}$ 时，设 $P(m,n)$，则$(m+3,n-4)=-2(-1-m,2-n)$，解得 $m=1$，$n=0$，此时点 P 的坐标为(1,0). 综上，点 P 的坐标为$\left(-\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$或(1,0).

● 课堂考点探究

例 1 (1)A (2)C [解析](1)连接 BD，设 AC 与 BD 相交于点 O，则 O 为 AC，BD 的中点，因为 G 为△ABC 的重心，所以 $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BO}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，所以 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，又 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，所以 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，所以 $x+2y=\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$. 故选 A.

(2)因为点 F 为 DE 的中点，所以 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE})$，又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EC}$，所以 $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BE})=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{3}{8}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$. 故选 C.

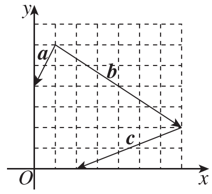
变式题 (1)A (2)A [解析](1)如图，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{8}\overrightarrow{BD}$，又因为 $\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{BD}$，所以 $\lambda=\frac{1}{8}$，$\mu=\frac{3}{8}$，故 $\lambda-\mu=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{4}$. 故选 A.



(2)选取$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$为基底，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HF}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$. 设 $\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{GH}=-2x\overrightarrow{AB}+2x\overrightarrow{AC}+3y\overrightarrow{AB}-2y\overrightarrow{AC}=(-2x+3y)\overrightarrow{AB}+(2x-2y)\overrightarrow{AC}$，∴$\begin{cases}-2x+3y=3,\\2x-2y=1,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=\frac{9}{2},\\y=4,\end{cases}$ 即 $\overrightarrow{EF}=\frac{9}{2}\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{GH}$. 故选 A.

例 2 (1)B (2)−4 [解析](1)因为 $A(-1,1)$，$B(2,3)$，$C(-6,5)$，所以 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}[(3,2)+(-5,4)]=\frac{1}{2}(-2,6)=(-1,3)$. 故选 B.

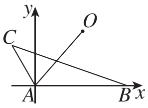
(2)根据题意建立如图所示的平面直角坐标系，则 $\boldsymbol{a}=(0,4)-(1,6)=(-1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(7,2)-(1,6)=(6,-4)$，$\boldsymbol{c}=(2,0)-(7,2)=(-5,-2)$，



所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(-1,-2)+\mu(6,-4)=(-\lambda+6\mu,-2\lambda-4\mu)$，因为 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，所以$(-5,-2)=(-\lambda+6\mu,-2\lambda-4\mu)$，所以 $\begin{cases}-\lambda+6\mu=-5,\\-2\lambda-4\mu=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=2,\\\mu=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{\lambda}{\mu}=-4$.

变式题 (1)A (2)D [解析](1)$\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-4,-3)-(3,1)=(-7,-4)$.

(2)建立如图所示的平面直角坐标系，若 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$|\overrightarrow{AC}|=1$，$\angle BAC=120°$，



则 $C\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 设△$ABC$ 的外心为 $O(x,y)$，由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，得 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，解得 $x=1$，由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$，得 $\sqrt{1^2+y^2}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$，解得 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，可得 $O\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，则 $\overrightarrow{AO}=\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，又 $\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0)$，$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，故 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\lambda(2,0)+\mu\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，得 $\begin{cases}2\lambda-\frac{1}{2}\mu=1,\\\frac{\sqrt{3}}{2}\mu=\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{5}{6},\\\mu=\frac{4}{3},\end{cases}$ 故 $\lambda+\mu=\frac{13}{6}$.

例 3 (1)C (2)A [解析](1)由向量 $\boldsymbol{a}=(-1,4)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2\lambda)$，可得 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-5,8+2\lambda)$，因为 $\boldsymbol{a}\parallel(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $-1\times(8+2\lambda)=4\times(-5)$，解得 $\lambda=6$. 故选 C.

(2)设 $D(x,y)$，则 $\overrightarrow{AD}=(x,y-2)$，$\overrightarrow{BC}=(4,3)$，因为 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$，所以 $\begin{cases}4=2x,\\3=2(y-2),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=\frac{7}{2},\end{cases}$ 所以顶点 D 的坐标为$\left(2,\frac{7}{2}\right)$. 故选 A.

变式题 (1)ABD (2)3 [解析](1)由题意得 $m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(3m-1,m+2)$，$\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}=(3+2n,1+3n)$. 由$(m\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\parallel(\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})$可得$(3+2n)(m+2)-(1+3n)(3m-1)=0$，整理得 $mn=n+1$. A 中，$2\times1=1+1$，满足题意；B 中，$0\times(-1)=-1+1$，满足题意；C 中，$3\times2\neq2+1$，不满足题意；D 中，$(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+1$，满足题意. 故选 ABD.

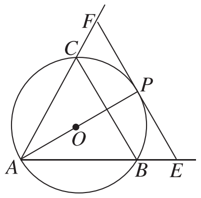
(2)∵$\overrightarrow{OA}=(-1,k)$，$\overrightarrow{OB}=(1,2)$，$\overrightarrow{OC}=(k+2,0)$，∴$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,2-k)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(k+1,-2)$. ∵$A,B,C$ 三点共线，∴$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{BC}$，∴$(k+1)(2-k)=-2\times2$，又 $k>0$，∴$k=3$.

拓展应用 2 等和线求最值范围问题

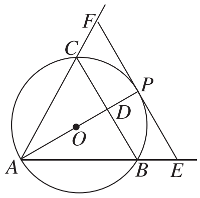
【典型例题】

例 1 D [解析]由题意知，向量 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且点 D 在线段 BC 上(不包括端点)，由等和线定理可得 $x+y=1$，且 $x>0$，$y>0$，故 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+y)=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}+3\geqslant2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $x=\sqrt{2}-1$，$y=2-\sqrt{2}$ 时取等号，故 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+3$，故选 D.

例 2 $\frac{8}{3}$ [解析] 方法一：如图，作 BC 的平行线，与圆 O 相切于点 P，与直线 AB 相交于点 E，与直线 AC 相交于点 F，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}$，则 $\lambda+\mu=1$，∵ $BC//EF$，∴设 $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=k$，则 $k\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$，∴ $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AE}+\mu\overrightarrow{AF}=\lambda k\overrightarrow{AB}+\mu k\overrightarrow{AC}$，∴ $x=\lambda k$，$y=\mu k$，∴ $2x+2y=2(\lambda+\mu)k=2k\leqslant\frac{8}{3}$.

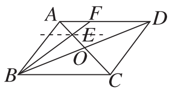


方法二：如图，过点 P 作 BC 的平行线，与直线 AB 相交于点 E，与直线 AC 相交于点 F，设 AP 与 BC 相交于点 D. 由等和线定理知，当 AP 过圆心 O，并且 A,P 位于 O 点两侧时，$x+y$ 取得最大值，此时 $x+y=\frac{AP}{AD}=\frac{4}{3}$，∴ $2x+2y$ 的最大值为 $\frac{8}{3}$.

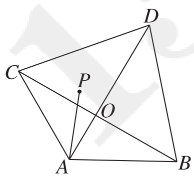


【巩固演练】

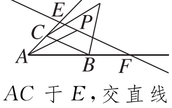
1. B [解析] 方法一(常规方法)：∵ E 为线段 AO 的中点，∴ $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BO})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BD}$，∴ $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{4}$，则 $\lambda+\mu=\frac{3}{4}$.
方法二(等和线法)：如图，延长 BE，交 AD 于 F，过点 E 作 AD 的平行线，设 $\lambda+\mu=k$，则 $k=\frac{BE}{BF}=\frac{3}{4}$，即 $\lambda+\mu=k=\frac{3}{4}$.



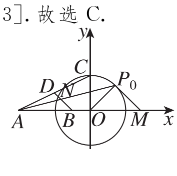
2. A [解析] 由重心的性质可得 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3y}\overrightarrow{AN}$，由 M,G,N 三点共线，得 $\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}=1$，即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$.
3. C [解析] 方法一：根据题意，将图形特殊化，如图，设 AD 垂直平分 BC，且 AD 与 BC 交于点 O，因为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 2，所以 $DO=2AO$. 当点 P 与点 A 重合时，可得 $\overrightarrow{AP}=\mathbf{0}$，此时 $\lambda=\mu=0$，即 $\lambda+\mu$ 的最小值为 0；当点 P 与点 D 重合时，可得 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AO}=3\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$，此时 $\lambda=\mu=\frac{3}{2}$，即 $\lambda+\mu$ 的最大值为 3. 所以 $\lambda+\mu$ 的取值范围为 $[0,3]$. 故选 C.



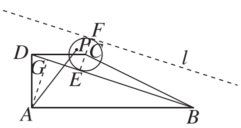
方法二：因为 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 2，所以 A,D 到 BC 的距离之比为 $1:2$，过点 P 作与 BC 平行的直线 EF，EF 交直线 AC 于 E，交直线 AB 于 F，如图所示. 由等和线定理得，当 P 与 D 重合时，$\lambda+\mu$ 的最大值为 3，当 P 与 A 重合时，$\lambda+\mu$ 的最小值为 0，所以 $\lambda+\mu$ 的取值范围为 $[0,3]$. 故选 C.



4. $\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$ [解析] 方法一：如图，取 AC 的中点 D，连接 BD，则 $D\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AD}$，可得 $\angle ABD=45^\circ$，作 BD 的平行线，与圆 O 相切于点 P_0，与 x 轴相交于点 M，由等和线定理知当 P 在 P_0 处时 $\lambda+2\mu$ 最大，易知 $\angle P_0MO=45^\circ$，连接 AP_0 与 BD 交于点 N，连接 OP_0，因为 $|OP_0|=1$，所以 $|OM|=\sqrt{2}$. 设 $\overrightarrow{AN}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$，则 $m+n=1$，由三角形相似知 $\frac{|AP_0|}{|AN|}=\frac{|AM|}{|AB|}$，则 $\overrightarrow{AP_0}=\frac{|AM|}{|AB|}\cdot\overrightarrow{AN}$，此时 $\lambda\overrightarrow{AB}+2\mu\overrightarrow{AD}=\frac{|AM|}{|AB|}\cdot(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD})$，所以 $\lambda+2\mu=\frac{|AM|}{|AB|}\cdot(m+n)=\frac{|AM|}{|AB|}$，故 $\lambda+2\mu$ 的最大值为 $\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{2+\sqrt{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$.



方法二：设 $P(x,y)$，又 $A(-2,0)$，$B\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$C(0,1)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1)$，代入 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，可得 $\begin{cases}x+2=\frac{3}{2}\lambda+2\mu,\\ y=\mu,\end{cases}$ 则 $x+y+2=\frac{3}{2}\lambda+3\mu=\frac{3}{2}(\lambda+2\mu)$，所以 $\lambda+2\mu=\frac{2}{3}(x+y+2)$. 由 $1=x^2+y^2\geqslant2xy$，得 $xy\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，所以 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\leqslant1+1=2$，得 $x+y\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，所以 $\lambda+2\mu=\frac{2}{3}(x+y+2)\leqslant\frac{2}{3}(\sqrt{2}+2)=\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$，即 $\lambda+2\mu$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{2}+4}{3}$.
5. $\left(1,\frac{5}{3}\right)$ [解析] 如图，设圆 C 与直线 BD 相切于点 E，过 A 作 $AG\perp BD$ 于 G，作直线 $l//DB$，且直线 l 与圆 C 相切于 F，连接 EF，则 EF 过圆心，且 $EF\perp BD$. 由图可知，对圆 C 内任意一点 P，AP 在直线 AG 上的射影长度 d 满足 $AG<d<AG+EF$，又 $AG=\frac{AD\cdot AB}{DB}=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$EF=2EC=2CD\sin\angle ABD=\frac{2}{\sqrt{10}}$，所以 $\frac{3}{\sqrt{10}}<d<\frac{5}{\sqrt{10}}$，又 $\alpha+\beta=\frac{d}{AG}$，所以 $1<\alpha+\beta<\frac{5}{3}$.



第 33 讲　平面向量的数量积

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

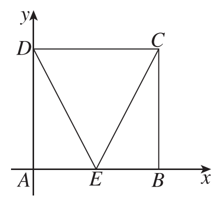
1. 非零
2. $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$　$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$
3. (1) $\overrightarrow{A'B'}$　投影向量　投影　(2)共线　相同　相反　(3) $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$　长度　非负数　负数　$(|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)|\boldsymbol{b}|$
4. ① $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　② $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$　$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$　③ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
5. $x_1x_2+y_1y_2$　$x_1x_2+y_1y_2=0$

【对点演练】

1. 63　$\frac{16}{65}$ [解析] $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+12^2}=13$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times5+4\times12=63$. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{63}{5\times13}=\frac{63}{65}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{16}{65}$.
2. $\pm\frac{3}{4}$ [解析] 由题意知 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=9-16k^2=0$，解得 $k=\pm\frac{3}{4}$.
3. $\sqrt{7}$ [解析] 因为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4+2\times2\times1\times\cos\frac{\pi}{3}+1}=\sqrt{7}$.
4. -8 [解析] ∵ $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos120^\circ=4\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$.
5. $\left(-\frac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$ [解析] ∵ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是钝角，∴ $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{-2\lambda-1}{\sqrt{(-2)^2+1}\cdot\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}<0$，可得 $\lambda>-\frac{1}{2}$. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$\lambda=2$，此时 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-1<0$，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是平角，不满足题意，所以 λ 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$.
6. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ [解析] ∵ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直，∴ $2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$①，∵ $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 互相垂直，∴ $2\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$②. 由①×3+②得 $\boldsymbol{a}^2=\frac{5}{8}\boldsymbol{b}^2$，代入①得 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}^2$，∴ $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}^2}{\sqrt{\frac{5}{8}}|\boldsymbol{b}|^2}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

● **课堂考点探究**

例 1 (1)B　(2)C [解析] (1)方法一：由题知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=2$，$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2=-1+4=3$. 故选 B.
方法二：如图，以 A 为原点，AB，AD 所在直线分别为 x，y 轴，建立平面直角坐标系，则 $E(1,0)$，$C(2,2)$，$D(0,2)$，则 $\overrightarrow{EC}=(1,2)$，$\overrightarrow{ED}=(-1,2)$，所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=(1,2)\cdot(-1,2)=-1+4=3$. 故选 B.



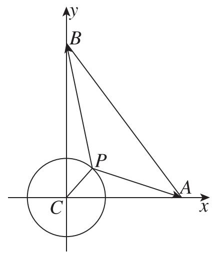
方法三：由题意可得，$ED=EC=\sqrt{5}$，$CD=2$，在 $\triangle CDE$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle DEC=\frac{DE^2+CE^2-DC^2}{2DE\cdot CE}=\frac{5+5-4}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=$

$\frac{3}{5}$,所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{ED}|\cos\angle DEC=\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\frac{3}{5}=3$.故选 B.

(2)由 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 及向量加减法的几何意义,可得向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2$,∴ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}^2$.故选 C.

变式题 (1)11 (2)D [解析](1)设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,又 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=3$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=1\times3\times\frac{1}{3}=1$,所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2\times1+3^2=11$.

(2)方法一:以 C 为坐标原点,CA,CB 所在直线分别为 x,y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系,则 $A(3,0)$,$B(0,4)$.设 $P(\cos\theta,\sin\theta)$,$\theta\in[0,2\pi)$,则 $\overrightarrow{PA}=(3-\cos\theta,-\sin\theta)$,$\overrightarrow{PB}=(-\cos\theta,4-\sin\theta)$,∴ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3-\cos\theta)(-\cos\theta)+(-\sin\theta)(4-\sin\theta)=-3\cos\theta-4\sin\theta+1=-5\sin(\theta+\varphi)+1\in[-4,6]\left(\text{其中 }\tan\varphi=\frac{3}{4}\right)$.故选 D.



方法二:由题易知 $\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CB}\rangle=\pm\sin\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle$,且 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,∴ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1+3\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle+4\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CB}\rangle+0=1+3\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle\pm4\sin\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle=1+5\sin(\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CA}\rangle\pm\varphi)$,其中 $\tan\varphi=\frac{3}{4}$,∴ $-4\leqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant6$.故选 D.

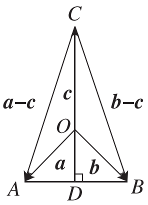
例 2 B [解析]因为 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$,所以 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=0$,得 $|\boldsymbol{b}|^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$①.因为 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$,所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=4$,即 $|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$,得 $4|\boldsymbol{b}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$②.由①②得 $|\boldsymbol{b}|^2=\frac{1}{2}$,则 $|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故选 B.

例 3 (1)C (2)D [解析](1)因为向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$,所以 $|\boldsymbol{a}|=2$,设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,由 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,得 $\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4(\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2)$,即 $3\boldsymbol{a}^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,又 $|\boldsymbol{b}|=1$,则有 $12+24\cos\theta=0$,得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.故选 C.

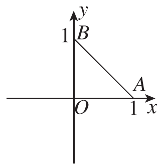
(2)因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$,即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$,即 $1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

方法一:因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2=4$,且 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$,$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\frac{4}{5}$.故选 D.

方法二:如图,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,由题知,$OA=OB=1$,$OC=\sqrt{2}$,$\triangle OAB$ 是等腰直角三角形,AB 边上的高 $OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\triangle ACB$ 是等腰三角形,C,O,D 共线,所以 $CD=CO+OD=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,则 $\tan\angle ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{1}{3}$,则 $\cos\angle ACD=\frac{3}{\sqrt{10}}$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\cos\angle ACB=\cos2\angle ACD=2\cos^2\angle ACD-1=2\times\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-1=\frac{4}{5}$.



方法三:如图,令向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的起点均为 O,终点分别为 A,B,以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 的方向分别为 x,y 轴的正方向建立平面直角坐标系,则 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1)$,$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-1)$,所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(1,2)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|}=\frac{2+2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$.



例 4 D [解析]方法一:因为 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,又 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$,所以 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\lambda\mu\boldsymbol{b}^2=0$,即 $2+2\lambda\mu=0$,所以 $\lambda\mu=-1$,故选 D.

方法二:因为 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,1-\lambda)$,$\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(1+\mu,1-\mu)$,由 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$ 得 $(1+\lambda)(1+\mu)+(1-\lambda)(1-\mu)=0$,即 $2+2\lambda\mu=0$,所以 $\lambda\mu=-1$,故选 D.

例 5 (1)A (2)A [解析](1)因为 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{5\pi}{6}$,所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}$.故选 A.

(2)将 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|$ 两边同时平方,可得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2=2$,所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=1$.故选 A.

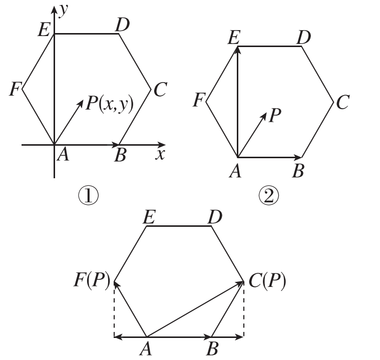
【应用演练】

1. B [解析]因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=0$,所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$,即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$,所以 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.故选 B.
2. D [解析]因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=3$,故 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$,即 $1+2\times1\times2\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+4=3$,即 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$,所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.故选 D.
3. D [解析]因为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,所以 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$,所以 $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,所以 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1+4-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$,故选 D.
4. D [解析]因为 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|=2$,且 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$,即 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}^2=-1$.设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{2\times1}=-\frac{1}{2}$,因为 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$.故选 D.
5. C [解析]∵ $\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{3})$,$|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的数量为 $\frac{3}{2}$,∴ $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=\frac{3}{2}$,∴ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle=2\times\frac{3}{2}=3$,∴ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4+2\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=3$,解得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$,又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,∴ $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.故选 C.

例 6 A [解析]方法一:以 A 为原点,$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴的正方向,建立如图①所示的平面直角坐标系,设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{AB}=(2,0)$,$\overrightarrow{AP}=(x,y)$,∵ $-1<x<3$,∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2x\in(-2,6)$.

方法二:如图②,以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\}$ 为基底,则 $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\pi}{2}$,且 $|\overrightarrow{AB}|=2$,$|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$.∵ P 为正六边形内一点,∴ $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE}$,$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AB}^2=4x$.∵ $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$,∴ $-2<\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}<6$.

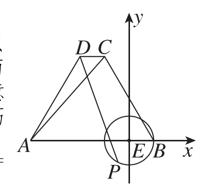
方法三:作出正六边形 $ABCDEF$,如图③所示,P 是正六边形内一点,$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$,$|\overrightarrow{AB}|=2$.由图可得,当 P 位于 C 处时,$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$ 最大,又 $BC=2$,$\angle CAB=30°$,故此时 $|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times3=6$;当 P 位于 F 处时,$|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle$ 最小,又 $AF=2$,$\angle FAB=120°$,故此时 $|\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\rangle=2\times(-1)=-2$.∵ P 在正六边形内,∴ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为 $(-2,6)$.故选 A.



① ② ③

变式题 (1)A (2)B

[解析](1)如图,以 E 为原点,建立平面直角坐标系.由题意知,梯形 $ABCD$ 的高为 $\sqrt{4^2-\left(\frac{5-1}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$,则 $A(-4,0)$,$C(-1,2\sqrt{3})$,$D(-2,2\sqrt{3})$.因为以 E 为圆心、1 为半径的圆的



方程为 $x^2+y^2=1$,所以可设点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$,$0\leqslant\theta<2\pi$,则 $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AC}=(\cos\theta+2,\sin\theta-2\sqrt{3})\cdot(3,2\sqrt{3})=3\cos\theta+6+2\sqrt{3}\sin\theta-12=2\sqrt{3}\sin\theta+3\cos\theta-6=\sqrt{21}\sin(\theta+\varphi)-6$,其中 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时,$(\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AC})_{\max}=\sqrt{21}-6$.故选A.

(2)设△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,设BC的中点为D,连接OD,因为O是△ABC的外心,所以OD⊥BC,即 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BA}^2=-2+c^2$.

在△ABC中,由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$,则 $c=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin C\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}$,当且仅当 $\sin C=1$,即 $C=\frac{\pi}{2}$ 时,等号成立,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$ 的最大值为 $-2+\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{10}{3}$.故选B.

第34讲　平面向量的综合问题

● **课堂考点探究**

例1　(1)B　(2)D　[解析](1)∵ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,∴ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$,设AB的中点为D,则 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MD}$,∴C,M,D三点共线,即M为△ABC的中线CD上的点,且MC=2MD,∴M为△ABC的重心.∵ $|\overrightarrow{NA}|=|\overrightarrow{NB}|=|\overrightarrow{NC}|$,∴NA=NB=NC,∴N为△ABC的外心.∵ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$,∴ $\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0$,即 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,∴PB⊥AC.同理可得,PA⊥BC,PC⊥AB,∴P为△ABC的垂心.故选B.

(2)在△ABC中,由 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}-\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)=0$,得 $\overrightarrow{PA}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{PA}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$,即 $\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$,由 $\overrightarrow{PB}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}-\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}\right)=0$,同理得 $\overrightarrow{BP}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\overrightarrow{BP}\cdot\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$,显然 $\overrightarrow{AP}\neq\mathbf{0}$,即P与A不重合,同理 $\overrightarrow{BP}\neq\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAC=|\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB$,即 $\cos\angle PAC=\cos\angle PAB$,可得∠PAC=∠PAB,于是AP平分∠BAC,同理得BP平分∠ABC,所以点P是△ABC的内心.故选D.

变式题　(1)重心　(2)1　[解析](1)因为 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{AN}=\mu\overrightarrow{NC}$,所以 $\overrightarrow{AB}=\frac{\lambda+1}{\lambda}\overrightarrow{AM}=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AM}$,$\overrightarrow{AC}=\frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{AN}=\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\overrightarrow{AN}$,设G为△ABC的重心,则 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\lambda}\right)\overrightarrow{AM}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\mu}\right)\overrightarrow{AN}$,又因为 $\lambda+\mu=\lambda\mu$,且 $\lambda\mu\neq0$,即 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=1$,所以 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\lambda}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\mu}\right)=1$,所以G,M,N三点共线,故MN恒过△ABC的重心.

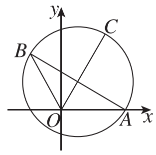
(2)∵ $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}$,∴ $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AO}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,∴ $\overrightarrow{AH}=(m-1)\overrightarrow{OA}+m(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.取BC的中点D,连接OD,则OD⊥BC,∴ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$,$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.∵AH⊥BC,∴ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,又 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+2m\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{BC}$,∴ $0=(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+0$,∵ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 不恒为0,∴m−1=0,解得m=1.

例2　(1)B　(2)$\frac{11}{8}$　[解析](1)由题意设 $a=5m,b=5m,c=8m(m>0)$,所以△ABC是等腰三角形,由余弦定理,得 $\cos\angle ACB=\frac{(5m)^2+(5m)^2-(8m)^2}{2\times5m\times5m}=-\frac{7}{25}$.因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-28$,所以 $5m\times5m\times\cos\angle ACB=-28$,解得m=2(负值舍去),所以a=10,b=10,c=16.设△ABC的外接圆半径为R,因为 $\sin\angle ACB=\sqrt{1-\cos^2\angle ACB}=\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2}=\frac{24}{25}$,所以 $2R=\frac{c}{\sin\angle ACB}=\frac{50}{3}$,所以 $R=CG=\frac{25}{3}$.由△ABC为等腰三角形知 $\angle GCB=\frac{1}{2}\angle ACB$,所以 $\cos^2\angle GCB=\frac{1+\cos\angle ACB}{2}=\frac{9}{25}$,即 $\cos\angle GCB=\frac{3}{5}$,所以 $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CG}||\overrightarrow{CB}|\cos\angle GCB=\frac{25}{3}\times10\times\frac{3}{5}=50$.故选B.

(2)记 $|\overrightarrow{AB}|=c,|\overrightarrow{AC}|=b,|\overrightarrow{BC}|=a$,由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$,即 $b^2+c^2-bc=3$,即 $b^2+c^2=3+bc$,由均值不等式得 $3+bc=b^2+c^2\geqslant2bc$,得 $bc\leqslant3$,当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时等号成立.由题意知 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}^2+\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{8}(b^2+c^2)+\frac{5}{12}bc\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{8}(b^2+c^2)+\frac{5}{24}bc=\frac{1}{8}(3+bc)+\frac{5}{24}bc=\frac{3}{8}+\frac{1}{3}bc\leqslant\frac{11}{8}$,当且仅当 $b=c=\sqrt{3}$ 时取等号,所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最大值为 $\frac{11}{8}$.

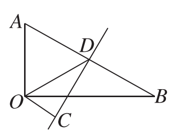
变式题　$\frac{\sqrt{3}}{3}$　[解析]设内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$,可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$,所以 $ac\cos(\pi-B)+ab\cos C=\frac{1}{2}a^2$,可得 $2(-c\cos B+b\cos C)=a$,由正弦定理得 $2\sin B\cos C-2\sin C\cos B=\sin A$,又因为 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,所以 $2\sin B\cos C-2\sin C\cos B=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,所以 $\sin B\cos C=3\cos B\sin C$,则 $\tan B=3\tan C$.因为B,C为三角形的内角,所以 $\tan C>0$,则 $\tan(B-C)=\frac{\tan B-\tan C}{1+\tan B\tan C}=\frac{2\tan C}{1+3\tan^2C}=\frac{2}{\frac{1}{\tan C}+3\tan C}$,又因为 $\frac{1}{\tan C}+3\tan C\geqslant2\sqrt{\frac{1}{\tan C}\times3\tan C}=2\sqrt{3}$,当且仅当 $\frac{1}{\tan C}=3\tan C$,即 $\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立,所以 $\tan(B-C)\leqslant\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $\tan(B-C)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例3　C　[解析]令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=(x,y)$,如图所示,不妨令 $\boldsymbol{a}=(1,0)$,$\boldsymbol{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$,线段AB的中点坐标为 $\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.因为 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\perp(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$,所以C在以AB为直径的圆上,即在圆 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{3}{4}$ 上.$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=x-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$,令 $x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$,$y=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}\sin\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$,因为 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\in[-1,1]$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 的最大值为 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.故选C.

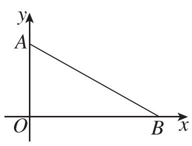


变式题　B　[解析]方法一:因为 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2}=2$,由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|^2$,即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2$,即 $1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=3-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1$,即 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=1$.设 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为θ,则 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\theta=1$,所以 $|\boldsymbol{c}|=\frac{1}{2\cos\theta}$,则当 $\cos\theta=1$ 时,$|\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.故选B.

方法二:$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,如图所示,设Rt△ABC中,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则 $|\overrightarrow{AB}|=2$,设 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 知,点C在线段AB的垂直平分线上,设D为AB的中点,连接OD,则OD=1,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最小值为点O到垂直平分线的距离,即为 $\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}$.故选B.



方法三:$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,建立如图所示的平面直角坐标系,则 $A(0,1)$,$B(\sqrt{3},0)$.



设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$,由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$ 知 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}$,所以 $y+1=\sqrt{3}x$,则 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2}=$

$\sqrt{4x^2-2\sqrt{3}x+1}$，当 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 时，$|c|$ 取到最小值 $\frac{1}{2}$. 故选 B.

第 35 讲　复数

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)虚数单位　-1　(2)①$=$　②$\neq$　③$=$　$\neq$　(3)$a=c$ 且 $b=d$　(4)$a=c$ 且 $b=-d$　(5)$|z|$　$|a+bi|$　$\sqrt{a^2+b^2}$
2. (1)$Z(a,b)$
3. (1)①$(a+c)+(b+d)i$　②$(a-c)+(b-d)i$　③$(ac-bd)+(ad+bc)i$　④$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$
(2)$\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$　$\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1}$

【对点演练】

1. -3　[解析] 因为复数 $z=\frac{m^2+m-6}{m}+(m^2-2m)i$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}m\neq 0,\\ \frac{m^2+m-6}{m}=0,\\ m^2-2m\neq 0,\end{cases}$ 解得 $m=-3$.
2. $-3-4i$　[解析] ∵$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$，∴$\overrightarrow{CA}$ 在复平面内对应的复数为 $-1-3i-(2+i)=-3-4i$.
3. 12　26　[解析] ∵$-3+2i$ 是关于 x 的方程 $2x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的一个根，∴$-3-2i$ 是此方程的另一个根，∴$(-3+2i)+(-3-2i)=-\frac{p}{2}$，$(-3+2i)(-3-2i)=\frac{q}{2}$，解得 $p=12$，$q=26$.
4. 1　[解析] 因为 $\frac{3-i}{1-i}=\frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+2i}{2}=2+i$，所以复数 $\frac{3-i}{1-i}$ 的虚部为 1.
5. 0　二　[解析] 由 $(a-i)(1-2i)=-3+bi$，得 $a-2-(1+2a)i=-3+bi$，由复数相等的充要条件得 $\begin{cases}a-2=-3,\\-(1+2a)=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$ 所以 $a+b=0$，$z=-1+i$，所以复数 z 在复平面内对应的点为 $(-1,1)$，位于第二象限.
6. $-1+i$　[解析] 由 $(z-1)\cdot i^{2025}=1-2i$，得 $(z-1)i=1-2i$，则 $z-1=\frac{1-2i}{i}=\frac{(1-2i)i}{i^2}=-2-i$，则 $z=-1-i$，所以 $\bar{z}=-1+i$.
7. -3　[解析] 因为 $(3+i)(1-ai)=(3+a)+(1-3a)i$，$a\in\mathbf{R}$，且 $(3+i)(1-ai)$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}3+a=0,\\1-3a\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=-3$.
8. 2π　[解析] 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，由 $1\leqslant|z-1+i|\leqslant\sqrt{3}$ 可得 $1\leqslant(a-1)^2+(b+1)^2\leqslant 3$，即复数 z 在复平面内对应的点构成的图形是以 $(1,-1)$ 为圆心，分别以 $1,\sqrt{3}$ 为半径的圆所夹的圆环，其面积为 $3\pi-\pi=2\pi$.

● 课堂考点探究

探究点一

1. C　[解析] 因为 $(a+i)(1-ai)=a-a^2i+i+a=2a+(1-a^2)i=2$，所以 $\begin{cases}2a=2,\\1-a^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$. 故选 C.
2. C　[解析] 由题意得 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$. 对于 A 选项，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1$，不合题意，故 A 错误；对于 B 选项，当 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-1$，不合题意，故 B 错误；对于 C 选项，当 $\theta=\frac{2023\pi}{4}$ 时，$\sin\left(\frac{2023\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 506\pi=0$，故 C 正确；对于 D 选项，当 $\theta=\frac{2025\pi}{4}$ 时，$\sin\left(\frac{2025\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=1$，不合题意，故 D 错误. 故选 C.
3. B　[解析] $(\sqrt{3}+i)z+i=\sqrt{3}$，故 $z=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{3-i^2}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故 $\bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 故选 B.
4. BC　[解析] 对于 A，若 z 为纯虚数，则 $a^2-1=0$ 且 $a+1\neq 0$，故 $a=1$，故 A 错误；对于 B，若 z 在复平面内对应的点位于第二象限，则 $\begin{cases}a^2-1<0,\\a+1>0,\end{cases}$ 解得 $-1<a<1$，即 $a\in(-1,1)$，故 B 正确；对于 C，若 $a=0$，则 $z=-1+i$，则 $\bar{z}=-1-i$，故 C 正确；对于 D，若 $a=0$，则 $|z|=\sqrt{2}$，故 D 错误. 故选 BC.

探究点二

1. D　[解析] 因为 z 在复平面内对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$，所以根据复数的几何意义可知，$z=-1+\sqrt{3}i$，由共轭复数的定义可知，$\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$. 故选 D.
2. B　[解析] 设复数 z，i 在复平面上对应的点分别为 P，$C(0,1)$，因为 $|z-i|=2$，所以 $|PC|=2$，故复数 z 在复平面上对应的点的轨迹是以 C 为圆心，2 为半径的圆. 故选 B.
3. B　[解析] 若复数 z 满足 $|z|=|z-2-2i|$，则由复数的几何意义可知复数 z 对应的点的集合是线段 OA 的垂直平分线，其中 $O(0,0)$，$A(2,2)$，所以 $|z|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}|OA|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$. 故选 B.
4. 2　[解析] 依题意，$z_2=i\cdot(1+i)=i-1$，则 $z_2-z_1=i-1-(1+i)=-2$，所以 $|\overrightarrow{Z_1Z_2}|=|z_2-z_1|=2$.

探究点三

1. C　[解析] 由题可得 $z=(1+i)(z-1)$，则 $z=\frac{1+i}{i}=1-i$.
2. D　[解析] $z_1=(1+i)(1-2i)=1-2i+i-2i^2=3-i$，则 $|z-z_1|=|-2i-3+i|=|-3-i|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$. 故选 D.
3. C　[解析] $\frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5(1-i)}{5}=1-i$. 故选 C.
4. AD　[解析] 设 $z=a+bi$，$w=c+di$，其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且复数 z,w 均不为 0. 对于选项 A，由 $z=a+bi$ 可得 $\bar{z}=a-bi$，所以 $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$，即 $\frac{|z|^2}{z}=\bar{z}$，A 中说法一定正确；对于选项 B，$z+w=a+c+(b+d)i$，所以 $|z+w|^2=(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2$，$(|z|+|w|)^2=(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2})^2=a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+c^2+d^2$，当 $|z+w|=|z|+|w|$，即 $|z+w|^2=(|z|+|w|)^2$ 时，可得 $ac+bd=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$，两边平方整理得 $2abcd=a^2d^2+b^2c^2$，所以 $|z+w|=|z|+|w|$ 不一定成立，B 中说法不一定正确；对于选项 C，$\frac{z}{w}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}$，所以 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{ac+bd+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$，$\frac{\bar{z}}{w}=\frac{a-bi}{c+di}=\frac{(a-bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-bd-(ad+bc)i}{c^2+d^2}$，当 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{w}$ 时，可得 $bd+adi=0$，所以 $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{w}$ 不一定成立，C 中说法不一定正确；对于选项 D，若 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\in\mathbf{R}$，则 $b=0$，所以 $z=a\in\mathbf{R}$，D 中说法一定正确. 故选 AD.
5. BCD　[解析] 因为复数 a,b 满足 $a^2-2a+2=0$，$b^2-2b+2=0$，所以复数 a,b 均是方程 $x^2-2x+2=0$ 的根，在复数范围内，解方程 $x^2-2x+2=0$ 得 $x_1=1+i$，$x_2=1-i$，所以 $a=b=1+i$ 或 $a=b=1-i$ 或 $a=1+i$，$b=1-i$ 或 $a=1-i$，$b=1+i$. 当 $a=b=1+i$ 时，$ab=(1+i)^2=2i$；当 $a=b=1-i$ 时，$ab=(1-i)^2=-2i$；当 $a=1+i$，$b=1-i$ 时，$ab=(1+i)(1-i)=2$；当 $a=1-i$，$b=1+i$ 时，$ab=(1-i)(1+i)=2$. 故选 BCD.

第六单元　数列

第 36 讲　数列的概念与简单表示法

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 一定次序　每一个数　$a_n=f(n)$　一个　$a_1+a_2+\cdots+a_n$
2. 有限　无限　$>$　$<$　$=$
4. $\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2\end{cases}$

【对点演练】

1. $\frac{1}{2n-1}$　[解析] 因为 $\frac{1}{2\times1-1}=1$，$\frac{1}{2\times2-1}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2\times3-1}=\frac{1}{5}$，$\frac{1}{2\times4-1}=\frac{1}{7}$，$\frac{1}{2\times5-1}=\frac{1}{9}$，…，所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.
2. $2n+2$　[解析] ∵$a_1=S_1=1+3=4$，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+3n)-[(n-1)^2+3(n-1)]=2n+2(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$2n+2=4=a_1$，∴$a_n=2n+2$.
3. 70　[解析] ∵$5-1=4$，$12-5=7$，$22-12=10$，∴相邻两个图形的小石子数的差值依次增加 3，∴第 5 个五边形数是 $22+13=35$，第 6 个五边形数是 $35+16=51$，第 7 个五边形数是 $51+19=70$.
4. 22　[解析] 由题意可得数列的通项公式为 $a_n=\sqrt{2n-1}$，又 $\sqrt{43}=\sqrt{2n-1}$，解得 $n=22$，所以 $\sqrt{43}$ 是这个数列的第 22 项.
5. 30　[解析] 因为 $a_n=-n^2+11n=-\left(n-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{121}{4}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以当 $n=5$ 或 6 时，a_n 取得最大值 30.
6. $a_n=\begin{cases}6, n=1,\\2n+2, n\geqslant 2\end{cases}$　[解析] $S_n=n^2+3n+2$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=6$，当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2+3(n-1)+2$，所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+3n+2)-[(n-1)^2+3(n-1)+2]=2n+2$，当 $n=1$ 时，$a_1=6$ 不满足上式，所以 $a_n=\begin{cases}6, n=1,\\2n+2, n\geqslant 2.\end{cases}$

● 课堂考点探究

例1 (1)D (2)ABD [解析](1)通过观察这一列数发现,奇数项为正,偶数项为负,故第n项的正负可以用$(-1)^{n+1}$表示.而$1=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^0,-\frac{\sqrt2}{2}=-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^1,\frac12=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2,-\frac{\sqrt2}{4}=-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3,\frac14=\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^4,\cdots$,故数列的通项公式可以为$a_n=(-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^{n-1}$.故选D.

(2)令$n=1,2,3,4$,分别代入各选项进行验证,易知C选项中$a_3=-2$,不合题意,A,B,D均符合题意.故选ABD.

变式题 (1)C (2)(15,26) [解析](1)因为数列9,99,999,9999,…的通项公式为10^n-1,所以数列0.9,0.99,0.999,0.999 9,…的通项公式为$\frac{1}{10^n}(10^n-1)=1-\frac{1}{10^n}$,而数列0.4,0.44,0.444,0.444 4,…的每一项都是上面数列对应项的$\frac49$,所以数列0.4,0.44,0.444,0.444 4,…的一个通项公式为$a_n=\frac49\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.故选C.

(2)依题意,数列的各项依次写为$\frac{\sqrt{2^2+1}}{1\times3},\frac{\sqrt{3^2+1}}{2\times4},\frac{\sqrt{4^2+1}}{a},\frac{\sqrt b}{4\times6},\frac{\sqrt{6^2+1}}{5\times7},\cdots$,则数列的通项公式为$a_n=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{n(n+2)}$,所以$a_3=\frac{\sqrt{4^2+1}}{3\times5},a_4=\frac{\sqrt{5^2+1}}{4\times6}$,即$a=15,b=26$,所以有序数对$(a,b)$为(15,26).

例2 (1)$a_n=\begin{cases}-12,n=1,\\2n-15,n\geqslant2\end{cases}$ (2)$a_n=\begin{cases}\frac23,n=1,\\\frac{1}{3^n},n\geqslant2\end{cases}$

[解析](1)当$n=1$时,$a_1=S_1=1-14+1=-12$;当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-14n-(n-1)^2+14(n-1)=2n-15$.∵$a_1=-12$不符合该式,∴$a_n=\begin{cases}-12,n=1,\\2n-15,n\geqslant2.\end{cases}$

(2)由题意,当$n=1$时,$a_1=\frac23$,当$n\geqslant2$时,由$a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\frac{n+1}{3}$,可得$a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1}=\frac n3$,两式相减,可得$3^{n-1}a_n=\frac{n+1}{3}-\frac n3=\frac13$,解得$a_n=\frac{1}{3^n}$.∵当$n=1$时,$a_1=\frac23$不满足上式,∴$a_n=\begin{cases}\frac23,n=1,\\\frac1{3^n},n\geqslant2.\end{cases}$

变式题 (1)B (2)$a_n=4n+1$

[解析](1)由题设得$a_{n+1}=2^na_n$,即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$,所以$\frac{a_2}{a_1}=2^1,\frac{a_3}{a_2}=2^2,\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}(n\geqslant2)$,将上面$n-1$个式子两端分别相乘,可得$\frac{a_n}{a_1}=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}(n\geqslant2)$,即$a_n=2\times2^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}(n\geqslant2)$,所以$a_8=2^{29}$.故选B.

(2)因为$S_n=2n^2+a_n-n-1$①,所以当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=2(n-1)^2+a_{n-1}-(n-1)-1$②,①-②得$a_{n-1}=4n-3(n\geqslant2)$,则$a_n=4n+1$,当$n=1$时,$a_1=4\times1+1=5$,符合上式,故$a_n=4n+1$.

例3 (1)B (2)C [解析](1)$a_n=\frac{n-\sqrt{2025}}{n-\sqrt{2024}}=\frac{n-\sqrt{2024}+\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{n-\sqrt{2024}}=1+\frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{n-\sqrt{2024}}(n\in\mathbf N^*)$,因为$44^2<2024<45^2$,所以当$n\leqslant44$时,数列$\{a_n\}$递增,且$a_n>1$;当$n\geqslant45$时,数列$\{a_n\}$递增,且$a_n<1$.故在数列$\{a_n\}$的前100项中最小项和最大项分别是$a_{45},a_{44}$.故选B.

(2)若数列$\{a_n\}$为递增数列,则$a_{n+1}-a_n=[(n+1)^2-3\lambda(n+1)]-(n^2-3\lambda n)=(n^2+2n+1-3\lambda n-3\lambda)-(n^2-3\lambda n)=2n+1-3\lambda>0$,即$3\lambda<2n+1$,由于$n\in\mathbf N^*$,所以$3\lambda<2\times1+1=3$,解得$\lambda<1$;反之,当$\lambda<1$时,$a_{n+1}-a_n>0$,则数列$\{a_n\}$为递增数列,所以"$\lambda<1$"是"数列$\{a_n\}$为递增数列"的充要条件.

变式题 (1)D (2)-6 [解析](1)若数列$\{a_n+n^2\}$是等差数列,则数列的首项为$a_1+1^2=6$,公差为$(a_2+2^2)-(a_1+1^2)=7$,所以$a_n+n^2=6+(n-1)\times7=7n-1$,则$a_n=-n^2+7n-1$.

方法一:$a_{n+1}-a_n=[-(n+1)^2+7(n+1)-1]-(-n^2+7n-1)=-2n+6$,则当$n=1,2,3$时,$a_{n+1}-a_n\geqslant0$,则$a_4=a_3>a_2>a_1$;当$n\geqslant4$时,$a_{n+1}-a_n<0$,故此时数列$\{a_n\}$递减,则$a_4>a_5>a_6>a_7>\cdots$.综上,$\{a_n\}$的最大项为$a_3=a_4=11$.故选D.

方法二:$a_n=-n^2+7n-1=-\left(n-\frac72\right)^2+\frac{45}{4}$,结合二次函数的性质可得$n=3$或$n=4$时$a_n$取最大值,所以$\{a_n\}$的最大项为$a_3=a_4=11$,故选D.

(2)依题意,$a_1=2,a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$,所以$a_2=-3,a_3=-\frac12,a_4=\frac13,a_5=2,\cdots$,所以数列$\{a_n\}$是周期为4的数列,且每4项的积为$2\times(-3)\times\left(-\frac12\right)\times\frac13=1$,又$2026=506\times4+2$,所以$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{2026}=(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4)^{506}\cdot a_1\cdot a_2=-6$.

例4 C [解析]方法一:由题得$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(2n-3)+(2n-5)+\cdots+3+1+1=\frac{(n-1)[(2n-3)+1]}{2}+1=n^2-2n+2(n\geqslant2)$,所以$a_7=7^2-2\times7+2=37$.

方法二:由题意得$a_1=1,a_{n+1}-a_n=2n-1$,所以$a_7=(a_7-a_6)+(a_6-a_5)+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=11+9+7+5+3+1+1=37$.故选C.

例5 D [解析]因为$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}(n\geqslant2)$,所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac12,\frac{a_3}{a_2}=\frac23,\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n}$,上述各式相乘得$\frac{a_n}{a_1}=\frac1n(n\geqslant2)$,因为$a_1=1$,所以$a_n=\frac1n(n\geqslant2)$,经检验,$a_1=1$满足$a_n=\frac1n$,所以$a_n=\frac1n$.故选D.

例6 $a_n=2^{n+1}-3$ [解析]由$a_n=2a_{n-1}+3(n\geqslant2)$,得$a_n+3=2(a_{n-1}+3)$,即$\frac{a_n+3}{a_{n-1}+3}=2(n\geqslant2)$,又$a_1+3=1+3=4$,∴数列$\{a_n+3\}$是首项为4,公比为2的等比数列,∴$a_n+3=4\times2^{n-1}(n\geqslant2)$,即$a_n=2^{n+1}-3(n\geqslant2)$,当$n=1$时,$a_1=2^{1+1}-3=1$,∴数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n+1}-3$.

例7 $a_n=3^n+2^n$ [解析]由已知得$a_{n+1}-2^{n+1}=3(a_n-2^n)$,又$a_1-2=3\neq0$,所以数列$\{a_n-2^n\}$是首项为3,公比$q=3$的等比数列,所以$a_n-2^n=3^n$,即$a_n=3^n+2^n$.

例8 C [解析]因为$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$,所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}=3+\frac1{a_n}$,即$\frac1{a_{n+1}}-\frac1{a_n}=3$,所以$\left\{\frac1{a_n}\right\}$是以1为首项,3为公差的等差数列,所以$\frac1{a_n}=1+3(n-1)=3n-2$,则$a_n=\frac1{3n-2}$,所以$a_{34}=\frac{1}{3\times34-2}=\frac1{100}$.故选C.

【应用演练】

1. B [解析]因为$a_1=1,a_{n+1}=a_n-n$,所以$a_2-a_1=-1,a_3-a_2=-2,a_4-a_3=-3$,累加可得$a_4-a_1=-1-2-3=-6$,则$a_4=a_1-6=1-6=-5$.故选B.

2. C [解析]设$a_{n+1}+x=\frac23(a_n+x)$,即$a_{n+1}=\frac23a_n-\frac13x$,所以$-\frac13x=4$,解得$x=-12$,所以$a_{n+1}-12=\frac23(a_n-12)$,所以$\{a_n-12\}$是首项为$a_1-12=-11$,公比为$\frac23$的等比数列,所以$a_n-12=-11\times\left(\frac23\right)^{n-1}$,所以$a_n=12-11\times\left(\frac23\right)^{n-1}$.故选C.

3. $(2n-1)\cdot2^n$ [解析]数列$\{a_n\}$中,由$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$,得$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+2$,即$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=2$,因此数列$\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$是以$\frac{a_1}{2^1}=1$为首项,2为公差的等差数列,则$\frac{a_n}{2^n}=1+2(n-1)=2n-1$,所以$a_n=(2n-1)\cdot2^n$.

4. $\frac{48}{5}$ [解析]由$a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$可得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n}{n+1}$,累乘可得$\frac{a_{10}}{a_6}=\frac{a_{10}}{a_9}\cdot\frac{a_9}{a_8}\cdot\frac{a_8}{a_7}\cdot\frac{a_7}{a_6}=\frac{2\times9}{9+1}\times\frac{2\times8}{8+1}\times\frac{2\times7}{7+1}\times\frac{2\times6}{6+1}=\frac{48}{5}$.

5. $\frac1{1013}$ [解析]因为$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$,所以$\frac1{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac12+\frac1{a_n}$,所以$\frac1{a_{n+1}}-\frac1{a_n}=\frac12$,又$a_1=2$,所以$\frac1{a_1}=\frac12$,故数列$\left\{\frac1{a_n}\right\}$是以$\frac12$为首项,以$\frac12$为公差的等差数列,则$\frac1{a_n}=\frac12+\frac12(n-1)=\frac12n$,得$a_n=\frac2n$,所以$a_{2026}=\frac2{2026}=\frac1{1013}$.

第37讲 等差数列及其前n项和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 2 同一个常数d $a_{n+1}-a_n=d$ 公差

2. $a_{n+1}-a_n=d$　$\frac{a+b}{2}$
$a_n=a_1+(n-1)d$
$\frac{n(a_1+a_n)}{2}$　$na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$
3. (1)$(n-m)d$　(2)$a_p+a_q=a_s+a_t$
(3)md
4. (1)递增　递减　常　(2)大　小

【对点演练】

1. 6 [解析] 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$\begin{cases}a_1+3d+a_1+7d=20,\\a_1+6d=12,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=0,\\d=2,\end{cases}$ $\therefore a_4=a_1+3d=6$.
2. 1 [解析] $a_2+a_4=2a_3=6\Rightarrow a_3=3$，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=45\Rightarrow a_5=5$，故$d=\frac{5-3}{2}=1$.
3. 20 [解析] 设物体经过t秒降落到地面.物体在降落过程中，每一秒降落的距离依次构成首项为4.9，公差为9.8的等差数列，所以$4.9t+\frac{1}{2}t(t-1)\times 9.8=1960$，即$4.9t^2=1960$，可得$t=20$.
4. 5或6 [解析] 由$|a_3|=|a_9|$，得$|a_1+2d|=|a_1+8d|$，解得$a_1=-5d$或$d=0$(舍去)，则$a_1+5d=a_6=0$，又$d<0$，$\therefore a_5>0$，故使前n项和S_n取最大值的正整数n的值是5或6.
5. $\frac{8}{75}<d\leqslant\frac{3}{25}$ [解析] 由题意可得$\begin{cases}a_{10}>1,\\a_9\leqslant 1,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{1}{25}+9d>1,\\\frac{1}{25}+8d\leqslant 1,\end{cases}$所以$\frac{8}{75}<d\leqslant\frac{3}{25}$.
6. 14或15 [解析] 由$S_{11}=S_{18}$，得$11a_1+\frac{11\times 10}{2}d=18a_1+\frac{18\times 17}{2}d$，即$a_1=-14d$，$\therefore S_n=-14dn+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}\left(n-\frac{29}{2}\right)^2-\frac{841}{8}d$，由$n\in\mathbf{N}^*$，并结合$S_n$对应的二次函数图象知，当$n=14$或15时，$S_n$取得最大值.

● 课堂考点探究

例1 (1)D　(2)$\frac{5}{11}$ [解析] (1)由题意设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$\frac{S_5}{5}-\frac{S_2}{2}=\frac{1}{5}\left(5a_1+\frac{5\times 4}{2}d\right)-\frac{1}{2}(2a_1+d)=\frac{3}{2}d=6$，所以$d=4$，从而$a_7-a_4=3d=12$.故选D.
(2)因为$m,a,4m,b$为等差数列连续的四项，所以$2a=m+4m$，$8m=a+b$，所以$a=\frac{5m}{2}$，$b=\frac{11m}{2}$，所以$\frac{a}{b}=\frac{5}{11}$.

变式题 (1)C　(2)95 [解析] (1)因为等差数列$\{a_n\}$中，$a_{11}=a_1+a_2+a_3=a_1+10d$，所以$a_2+a_3=10d$，所以$a_1+d+a_1+2d=10d$，所以$2a_1=7d$，则$a_1=\frac{7}{2}d$.因为等差数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，所以公差$d$为正整数，因为$a_2<10$，所以$a_1+d=\frac{7}{2}d+d=\frac{9}{2}d<10$，所以$0<d<\frac{20}{9}$，因为公差$d$为正整数，所以$d=1$或$d=2$.当$d=1$时，$a_1=\frac{7}{2}d=\frac{7}{2}\times 1=\frac{7}{2}$，不合题意，舍去；当$d=2$时，$a_1=7$，符合题意，所以$d=2$.故选C.
(2)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_3+a_4=2a_1+5d=7$，$3a_2+a_5=4a_1+7d=5$，所以$a_1=-4$，$d=3$，所以$S_{10}=10a_1+45d=95$.

例2 解：(1)当$n=1$时，$2a_1=a_1+\frac{1}{a_1}$，又$a_n>0$，所以$a_1=1$，当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，即$2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}$，整理得$S_n^2-S_{n-1}^2=1$，又$S_1^2=a_1^2=1$，所以数列$\{S_n^2\}$是以1为首项，1为公差的等差数列，则$S_n^2=n$.因为$\{a_n\}$的各项都为正数，即$S_n>0$，所以$S_n=\sqrt{n}$.
当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，当$n=1$时，$a_1=1$也满足上式，所以$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.
(2)不存在，理由如下：由(1)可得$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$.
假设存在满足题意的连续三项a_k,a_{k+1},a_{k+2}，使得$\frac{1}{a_k},\frac{1}{a_{k+1}},\frac{1}{a_{k+2}}$构成等差数列，则$2(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})+(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})$，即$\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}$，等式两边平方，得$k+1+k+2\sqrt{k+1}\sqrt{k}=k-1+k+2+2\sqrt{k-1}\sqrt{k+2}$，即$(k+1)k=(k-1)(k+2)$，整理得$k^2+k=k^2+k-2$，显然等式不成立，因此假设错误，所以数列$\{a_n\}$中不存在连续的三项$a_k,a_{k+1},a_{k+2}$，使得$\frac{1}{a_k},\frac{1}{a_{k+1}},\frac{1}{a_{k+2}}$构成等差数列.

变式题 (1)C [解析] 方法一：若$\{a_n\}$为等差数列，设其公差为d，则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，所以$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$，因此$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则甲是乙的充分条件.反之，若$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$为常数，设$\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=t$，则$S_n=na_{n+1}-t\cdot n(n+1)$，所以$S_{n-1}=(n-1)a_n-t\cdot n(n-1)(n\geqslant 2)$，两式相减得$a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-2tn(n\geqslant 2)$，即$a_{n+1}-a_n=2t(n\geqslant 2)$，当$n=1$时，$S_1=a_1=a_2-2t$，满足上式，因此$\{a_n\}$为等差数列，则甲是乙的必要条件.所以甲是乙的充要条件.故选C.
方法二：若$\{a_n\}$为等差数列，则设数列$\{a_n\}$的公差为d，可得$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，则$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)}{2}d$，所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为首项为$a_1$，公差为$\frac{d}{2}$的等差数列，即甲是乙的充分条件.反之，若$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则可设$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$的公差为$D$，故$\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$，即$S_n=nS_1+n(n-1)D=na_1+n(n-1)D$，利用公式$a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant 2,\end{cases}$可得$a_n=a_1+2(n-1)D$，所以$a_{n+1}-a_n=2D$，即$\{a_n\}$为公差为$2D$的等差数列，所以甲是乙的必要条件.综上，甲是乙的充要条件.故选C.
(2)证明：因为$\frac{1}{2}a_{n+1}^2=S_{n+1}+S_n$①，所以当$n\geqslant 2$时，$\frac{1}{2}a_n^2=S_n+S_{n-1}$②，①－②得$\frac{1}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2)=a_{n+1}+a_n$，整理得$(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$，显然$a_{n+1}+a_n>0$，则$a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant 2)$，由$\frac{1}{2}a_2^2=S_2+S_1=2a_1+a_2$，整理得$a_2^2-2a_2-8=0$，又$a_2>0$，所以$a_2=4$，则$a_2-a_1=2$，满足$a_{n+1}-a_n=2$，所以$\{a_n\}$是以2为首项，2为公差的等差数列.

例3 (1)C　(2)2029 [解析] (1)因为$\frac{1}{2}a_3-a_5=2$，所以$a_3-2a_5=4$，又$2a_5=a_3+a_7$，所以$a_3-(a_3+a_7)=4$，解得$a_7=-4$，所以$a_5+a_{10}-a_8=a_7+a_8-a_8=a_7=-4$.故选C.
(2)因为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是等差数列，所以数列$\{a_n-3b_n\}$也为等差数列，设其公差为d，因为$a_1-3b_1=4$，$a_6-3b_6=9$，所以$5d=a_6-3b_6-(a_1-3b_1)=9-4=5$，解得$d=1$，故$a_{2026}-3b_{2026}=a_1-3b_1+2025d=2029$.

变式题 (1)C　(2)5或-5 [解析] (1)因为$\{a_n\}$为等差数列，所以$a_1+a_2+a_3=3a_2=15$，即$a_2=5$，又因为$\{a_n\}$的前10项和$S_{10}=\frac{10\times(a_1+a_{10})}{2}=5(a_2+a_9)=100$，即$5+a_9=20$，所以$a_9=15$.故选C.
(2)由题知$a_1a_3+a_2a_7+a_3a_9+a_7a_8=a_3(a_1+a_9)+a_7(a_2+a_8)=2a_5a_3+2a_5a_7=2a_5(a_3+a_7)=4a_5^2=100$，解得$a_5=\pm 5$.

例4 (1)C　(2)C [解析] (1)在等差数列$\{a_n\}$中，$S_4=1$，$S_8=4$，所以$S_4=1$，$S_8-S_4=3$，故$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,S_{16}-S_{12},S_{20}-S_{16}$构成公差为2的等差数列，所以$S_{20}-S_{16}=1+(5-1)\times 2=9$，即$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=9$.故选C.
(2)由等差数列的等和性可得，$\frac{a_3}{b_4+b_8}+\frac{a_9}{b_5+b_7}=\frac{a_3}{2b_6}+\frac{a_9}{2b_6}=\frac{a_3+a_9}{2b_6}=\frac{a_1+a_{11}}{b_1+b_{11}}=\frac{\frac{11}{2}(a_1+a_{11})}{\frac{11}{2}(b_1+b_{11})}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{2\times 11-3}{4\times 11-3}=\frac{19}{41}$.故选C.

变式题 B [解析] 设等差数列$\{a_n\}$共有$2n+1$项，则$S_{奇}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}$，$S_{偶}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$，中间项为$a_{n+1}$，故$S_{奇}-S_{偶}=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{2n+1}-a_{2n})=a_1+d+d+\cdots+d=a_1+nd=a_{n+1}$，所以$a_{n+1}=S_{奇}-S_{偶}=319-290=29$，故选B.

例5 (1)ACD　(2)(24,25)
[解析] (1)$\because S_5=S_9$，$\therefore 5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d$，$\therefore a_1=-\frac{13}{2}d>0$，$\therefore d<0$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=-\frac{13}{2}d+(n-1)d=\left(n-\frac{15}{2}\right)d$，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-\frac{13}{2}dn+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}(n^2-14n)$.对于A，$S_n=\frac{d}{2}(n^2-14n)=\frac{d}{2}[(n-7)^2-49]$，$\because d<0$，$\therefore$当$n=7$时，$S_n$取最大值，$\therefore S_7$是数列$\{S_n\}$中的最大项，故选项A正确；对于B，$\because a_1>0$，$d<0$，$\therefore$等差数列$\{a_n\}$是递减数列，$\therefore$数列$\{a_n\}$中的最大项为$a_1$，故选项B错误；对于C，$S_{14}=\frac{d}{2}(14^2-14\times 14)=0$，故选项C正确；对

于 D,∵ $d<0$,∴ $S_n=\frac{d}{2}(n^2-14n)=\frac{d}{2}n(n-14)>0$,解得 $0<n<14$,∵ $n\in\mathbf{N}^*$,∴满足 $S_n>0$ 的 n 的最大值为 13,故选项 D 正确.故选 ACD.

(2)由题意可得,$a_{30}<0$,$a_{31}>0$,即 $\begin{cases}-600+24d<0,\\-600+25d>0,\end{cases}$ 解得 $24<d<25$,故 d 的取值范围为(24,25).

变式题 ABD [解析] 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,依题意 $(S_7-S_3)(S_7-S_4)=(a_4+a_5+a_6+a_7)(a_5+a_6+a_7)=6(a_5+a_6)a_6<0$,所以 a_5+a_6,a_6 异号,又 $a_1<0$,所以 $d>0$,$a_5+a_6<0$,$a_6>0$,A 选项正确.因为 $S_7-S_3=2(a_5+a_6)<0$,$S_7-S_4=3a_6>0$,所以 $S_4<S_7<S_3$,B 选项正确.由于 $a_5+a_6<0$,$a_6>0$,则 $a_5<0$,所以等差数列$\{a_n\}$的前 5 项为负数,从第 6 项起为正数,所以当 $n=5$ 时,S_n 最小,所以 C 选项错误.$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times10=5(a_5+a_6)<0$,$S_{11}=\frac{a_1+a_{11}}{2}\times11=11a_6>0$,所以当 $S_n<0$ 时,n 的最大值为 10,所以 D 选项正确.故选 ABD.

第 38 讲 等比数列及其前 n 项和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 同一个常数 q $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ 公比
2. q $a_n=a_1q^{n-1}$ na_1 $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $\frac{a_1-a_nq}{1-q}$
3. (1)$a_m\cdot q^{n-m}$ (2)$a_p\cdot a_q$ a_k^2

【对点演练】

1. -3 或 $\frac{3}{2}$ [解析] 由 $S_3=a_1+a_2+a_3=a_3(q^{-2}+q^{-1}+1)$,得 $q^{-2}+q^{-1}+1=3$,即 $2q^2-q-1=0$,解得 $q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$,∴$a_2=\frac{a_3}{q}=\frac{3}{2}$或$-3$.
2. 2 -2 [解析] 依题意得 $q\neq1$,因为 $\begin{cases}8a_2+a_5=0,\\S_5=22,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}8a_1q+a_1q^4=0,\\\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=22,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a_1=2,\\q=-2.\end{cases}$
3. 3 [解析] ∵a_1,a_{13} 是方程 $x^2-13x+9=0$ 的两根,∴$a_1+a_{13}=13$,$a_1\cdot a_{13}=9$,∴$a_1>0$,$a_{13}>0$,$a_1\cdot a_{13}=a_2\cdot a_{12}=a_7^2=9$,又数列$\{a_n\}$为等比数列,等比数列奇数项的符号相同,∴$a_7=3$,∴$\frac{a_2a_{12}}{a_7}=\frac{9}{3}=3$.
4. 4 [解析] 设数列$\{a_n\}$的公比为 q,∵$a_5^2=a_3a_7=2\times8=16$,∴$a_5=\pm4$,又∵$a_5=a_3q^2>0$,∴$a_5=4$.
5. $\begin{cases}n,a=1,\\\frac{a(1-a^n)}{1-a},a\neq0,a\neq1\end{cases}$ [解析] 因为 $a\neq0$,$a_n=a^n$,所以$\{a_n\}$是以 a 为首项,a 为公比的等比数列.当 $a=1$ 时,$S_n=n$;当 $a\neq1$ 时,$S_n=\frac{a(1-a^n)}{1-a}$.
6. 216 [解析] 设这个等比数列为$\{a_n\}$,公比为 q,则 $a_1=\frac{8}{3}$,$a_5=\frac{27}{2}$,插入的三个数依次为 a_2,a_3,a_4,由题意知 a_3 是 $\frac{8}{3}$ 与 $\frac{27}{2}$ 的等比中项,所以 $a_3^2=\frac{8}{3}\times\frac{27}{2}=36$,又 $a_3=a_1q^2>0$,所以 $a_3=6$,所以 $a_2a_3a_4=a_3^3=216$.

● 课堂考点探究

例 1 (1)C (2)2 [解析] (1)方法一:设数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$,当 $q=1$ 时,$S_5=5$,$5S_3-4=11$,$S_5\neq5S_3-4$,不合题意;当 $q\neq1$ 时,由 $S_5=5S_3-4$,得 $\frac{1-q^5}{1-q}=5\cdot\frac{1-q^3}{1-q}-4$,即 $1-q^5=5-5q^3-4+4q$,即 $q^5-5q^3+4q=0$,即 $q^4-5q^2+4=0$,即 $(q^2-1)(q^2-4)=0$,解得 $q=\pm1$(舍去)或 $q=-2$(舍去)或 $q=2$,因此 $S_4=\frac{1-q^4}{1-q}=15$.故选 C.

方法二:由题知 $1+q+q^2+q^3+q^4=5(1+q+q^2)-4$,即 $q^3+q^4=4q+4q^2$,即 $q^3+q^2-4q-4=0$,即 $(q-2)(q+1)(q+2)=0$.由题知 $q>0$,所以 $q=2$,所以 $S_4=1+2+4+8=15$.

(2)由等比数列的性质知 $a_3a_6=a_4a_5$,由 $\begin{cases}a_4+a_5=24,\\a_4a_5=128,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_4=8,\\a_5=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_4=16,\\a_5=8,\end{cases}$ 因为$\{a_n\}$是递增的等比数列,所以 $\begin{cases}a_4=8,\\a_5=16,\end{cases}$ 即 $q=\frac{a_5}{a_4}=2$.

变式题 (1)C (2)B [解析] (1)由条件可知,数列$\{a_n\}$的公比 $q\neq1$,由题意得 $\begin{cases}\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=15,\\a_1(1+q^2)=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$ 所以 $S_7=\frac{1-2^7}{1-2}=127$.故选 C.

(2)设"衰分比"为 a,一等奖衰分得 b 万元,则 $b(1-a)^2=64$,$b(1-a)+b(1-a)^3=131.2$,$b+64+131.2=m$,解得 $b=100$,$a=20\%$,$m=295.2$.故选 B.

例 2 解:(1)证明:∵$a_{n+1}=\frac{4(n+1)}{2n-1}(S_n-1)$,∴$S_{n+1}-S_n=\frac{4(n+1)}{2n-1}(S_n-1)$,即 $(2n-1)S_{n+1}-(2n-1)S_n=4(n+1)(S_n-1)$,即 $(2n-1)(S_{n+1}-1)=(6n+3)S_n-(6n+3)$,即 $(2n-1)(S_{n+1}-1)=3(2n+1)(S_n-1)$,即 $\frac{S_{n+1}-1}{2n+1}=3\left(\frac{S_n-1}{2n-1}\right)$,又∵$\frac{S_1-1}{2\times1-1}=a_1-1=3$,∴数列$\left\{\frac{S_n-1}{2n-1}\right\}$是首项为 3,公比为 3 的等比数列.

(2)由(1)知 $\frac{S_n-1}{2n-1}=3^n$,即 $S_n=3^n(2n-1)+1$,当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=3^{n-1}(2n-3)+1$,则 $a_n=S_n-S_{n-1}=3^n(2n-1)+1-[3^{n-1}(2n-3)+1]=4n\cdot3^{n-1}$,又 $a_1=4$ 也适合上式,∴$a_n=4n\cdot3^{n-1}$,$n\in\mathbf{N}^*$.

变式题 解:因为 $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$,所以 $a_{n+1}-1=(a_n-1)^2$,则 $\ln(a_{n+1}-1)=\ln(a_n-1)^2=2\ln(a_n-1)$,又 $\ln(a_1-1)=\ln2$,所以数列$\{\ln(a_n-1)\}$是以 $\ln2$ 为首项,2 为公比的等比数列,则 $\ln(a_n-1)=2^{n-1}\cdot\ln2=\ln2^{2^{n-1}}$,所以 $a_n=2^{2^{n-1}}+1$.

例 3 (1)D (2)2 [解析] (1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,因为 $a_3a_6^2=\frac{a_5}{q^2}(a_5q)^2=a_5^3=4$,所以 $S_9=c_1+c_2+\cdots+c_8+c_9=\log_2a_1+\log_2a_2+\cdots+\log_2a_8+\log_2a_9=\log_2(a_1a_2\cdots a_8a_9)=\log_2a_5^9=\log_24^3=6$.故选 D.

(2)$a_4a_{6-m}a_{2+m}=a_4^3=512$,故 $a_4=8$,所以 $a_4=a_1q^3=q^3=8$,所以 $q=2$.

变式题 (1)A (2)$\frac{1}{3}$ [解析] (1)若 $a_6\cdot a_7>1$,则有 $T_{12}=a_1a_2\cdots a_{12}=(a_6a_7)^6>1$,故充分性成立;若 $T_{12}>1$,即 $a_1a_2\cdots a_{12}>1$,即 $(a_6a_7)^6>1$,则 $a_6a_7>1$ 或 $a_6a_7<-1$,故必要性不成立.所以"$a_6\cdot a_7>1$"是"$T_{12}>1$"的充分不必要条件.故选 A.

(2)易知 $\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_8}+\frac{1}{a_9}=\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_9}\right)+\left(\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_8}\right)+\frac{1}{a_6}=\frac{a_3+a_9}{a_3a_9}+\frac{a_4+a_8}{a_4a_8}+\frac{a_6}{a_6^2}$,由等比数列的性质可得 $a_3a_9=a_4a_8=a_6^2$,∴$\frac{a_3+a_9+a_4+a_6+a_8}{a_6^2}=18$,∴$a_6^2=\frac{1}{9}$,又 $a_6>0$,∴$a_6=\frac{1}{3}$.

例 4 (1)A (2)C [解析] (1)因为 $S_8+S_{24}=140$,且 $S_{24}=13S_8$,所以 $S_8=10$,$S_{24}=130$,故 $q\neq\pm1$,所以 $\frac{S_{24}}{S_8}=\frac{1-q^{24}}{1-q^8}=(q^8)^2+q^8+1=13$,即 $(q^8)^2+q^8-12=0$,解得 $q^8=3$ 或 $q^8=-4$(舍去).由等比数列前 n 项和的性质可知,S_8,$S_{16}-S_8$,$S_{24}-S_{16}$ 成等比数列,公比为 $q^8=3$,所以 $S_{16}-10=10\times q^8=30$,解得 $S_{16}=40$,故选 A.

(2)因为 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和,所以 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6,$S_{12}-S_9$,$S_{15}-S_{12}$,$S_{18}-S_{15}$ 成等比数列,由 $\frac{S_6}{S_3}=3$,得 $S_6=3S_3$,则 $\frac{S_6-S_3}{S_3}=2$,所以 $S_9-S_6=4S_3$,所以 $S_9=7S_3$,$S_{12}-S_9=8S_3$,所以 $S_{12}=15S_3$,$S_{15}-S_{12}=16S_3$,所以 $S_{15}=31S_3$,$S_{18}-S_{15}=32S_3$,所以 $S_{18}=63S_3$,所以 $\frac{S_{18}}{S_9}=\frac{63S_3}{7S_3}=9$.故选 C.

变式题 (1)D (2)13 [解析] (1)由题知,$S_3=3$,$S_6-S_3=9$,因为数列 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6,$S_{12}-S_9$ 成等比数列,所以 $S_9-S_6=27$,$S_{12}-S_9=81$,所以 $S_{12}=S_9+81=S_6+27+81=S_3+9+27+81=120$.故选 D.

(2)因为 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和且 $S_3\neq0$,所以 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 也成等比数列,则 $(S_6-S_3)^2=S_3\times(S_9-S_6)$.因为 $S_3=30$,$S_6=120$,所以 $(120-30)^2=30\times(S_9-120)$,解得 $S_9=390$,所以 $\frac{S_9}{S_3}=\frac{390}{30}=13$.

例 5 BC [解析] 当 $a_1>0$,$0<q<1$ 时,等比数列$\{a_n\}$递减,故$\{a_n\}$只有最大值 a_1,没有最小值;当 $a_1>0$,$-1<q<0$ 时,等比数列$\{a_n\}$为摆动数列,此时 a_1 为最大值,a_2 为最小值;当 $a_1<0$,$q=-1$ 时,奇数项都相等且小于零,偶数项都相等且大于零,所以等比数列$\{a_n\}$既有最大值又有最小值;当 $a_1<0$,$q<-1$ 时,因为 $|q|>1$,所以$\{a_n\}$的奇数项为负无最小值,偶数项为正无最大值.故选 BC.

变式题 6 [解析] 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_3=62$,$a_2+a_4=31$,所以公比 $q=\frac{a_2+a_4}{a_1+a_3}=\frac{1}{2}$,所以 $a_1+a_3=a_1+\frac{1}{4}a_1=62$,解得 $a_1=\frac{248}{5}$,故 $a_n=\frac{248}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.易知数列$\{a_n\}$递减,且 $a_n>0$,因为 $a_6=\frac{31}{20}>1$,$a_7=\frac{31}{40}<1$,所以当 $1\leqslant n\leqslant6$ 时,$a_n>1$,当 $n\geqslant7$ 时,$0<a_n<1$,所以当 $a_1a_2\cdots a_n$ 取得最大值时,$n=6$.

第 39 讲 数列求和

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ $na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

(2)$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $\frac{a_1-a_nq}{1-q}$

2. (1)若干个等差或等比或可求和

13322369480

(2)并项法
3. 同一个常数
4. 积
5. 两项之差

【对点演练】

1. 190 [解析] 由题意 $S_{19}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{18}+a_{19})=1+5+9+\cdots+37=\dfrac{10\times(1+37)}{2}=190$.

2. $\dfrac{2n}{n+1}$ [解析] 由题得 $a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,所以$\{a_n\}$的前 n 项和为 $2\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

3. $\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$ [解析] 设 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$,则 $\dfrac{1}{2}S_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$,两式相减得 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=1-\dfrac{1}{2^n}-n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^{n+1}}$,所以 $S_n=\dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$.

4. 100 [解析] 数列$\{(-1)^n(2n-1)\}$的前 100 项和等于$(-1)+3+(-5)+7+(-9)+11+\cdots+(-197)+199=[(-1)+(-5)+(-9)+\cdots+(-197)]+(3+7+11+\cdots+199)=\dfrac{50\times(-1-197)}{2}+\dfrac{50\times(3+199)}{2}=100$.

5. $\dfrac{2n}{n+1}$ [解析] ∵ $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$,且 $\dfrac{2}{n^2+n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\times\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,∴ $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}=2\times\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=2\times\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\times\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2n}{n+1}$.

6. $\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{2},a=1,\\ \dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\dfrac{na^{n+1}}{1-a},a\neq1\end{cases}$ [解析] 当 $a=1$ 时,$S_n=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;当 $a\neq1$ 时,$S_n=a+2a^2+3a^3+\cdots+na^n$ ①,则 $aS_n=a^2+2a^3+3a^4+\cdots+na^{n+1}$ ②,① − ② 得 $(1-a)S_n=a+a^2+a^3+a^4+\cdots+a^n-na^{n+1}$,整理得 $(1-a)S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-na^{n+1}$,即 $S_n=\dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\dfrac{na^{n+1}}{1-a}$. 综上可得,$S_n=\begin{cases}\dfrac{n(n+1)}{2},a=1,\\ \dfrac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\dfrac{na^{n+1}}{1-a},a\neq1.\end{cases}$

● 课堂考点探究

例 1 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d $(d\neq0)$,由题意可知 $\begin{cases}a_1+3d=5,\\ a_3^2=a_1\cdot a_7,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1+3d=5,\\ (a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+6d),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\ d=1,\end{cases}$ 所以 $a_n=n+1$.

(2)由(1)可知,$b_n=a_n\cos\dfrac{a_n\pi}{2}=(n+1)\cos\dfrac{(n+1)\pi}{2}$,对于任意的 $k\in\mathbf{N}^*$,有 $b_{4k-3}=-4k+2$,$b_{4k-2}=0$,$b_{4k-1}=4k$,$b_{4k}=0$,所以 $b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}=2$,故数列$\{b_n\}$的前 2024 项和为$(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+\cdots+(b_{2021}+b_{2022}+b_{2023}+b_{2024})=1012$.

变式题 解:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q $(q>0)$,则 $a_5^2=9a_4a_8=9a_6^2$,即 $q^2=\dfrac{1}{9}$,所以 $q=\dfrac{1}{3}$,所以 $2a_1+3a_2=3a_1=1$,解得 $a_1=\dfrac{1}{3}$,所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(2)由(1)得 $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=3^{-n}$,则 $b_n=a_n+\log_3a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\log_33^{-n}=-n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$,所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=-1+\dfrac{1}{3}-2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots-n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=-[1+2+3+\cdots+n]+\left[\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]=-\dfrac{(1+n)n}{2}+\dfrac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\cdot3^n}-\dfrac{n(n+1)}{2}$.

例 2 解:(1)在 $4S_n=3a_n+4$ 中取 $n=1$,得 $a_1=4$,由 $\begin{cases}4S_n=3a_n+4,\\ 4S_{n-1}=3a_{n-1}+4(n\geqslant2),\end{cases}$ 得 $4(S_n-S_{n-1})=3a_n-3a_{n-1}(n\geqslant2)$,即 $4a_n=3a_n-3a_{n-1}(n\geqslant2)$,∴ $a_n=-3a_{n-1}(n\geqslant2)$,∴$\{a_n\}$是以 4 为首项,−3 为公比的等比数列,∴$a_n=4\times(-3)^{n-1}$.

(2)由(1)知 $b_n=4n\cdot3^{n-1}$,则 $T_n=4\times(1+2\times3+3\times3^2+\cdots+n\times3^{n-1})$①,则 $3T_n=4\times[1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+(n-1)\times3^{n-1}+n\times3^n]$②,② − ① 得 $2T_n=4n\cdot3^n-4(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})=4n\cdot3^n-4\times\dfrac{3^n-1}{2}=(4n-2)\cdot3^n+2$,∴$T_n=(2n-1)\cdot3^n+1$.

变式题 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $\begin{cases}6a_1+15d=3(3a_1+3d),\\ a_1+(3n-1)d=3a_1+3(n-1)d-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $a_n=\dfrac{n+1}{2}$.

(2)由(1)知 $b_n=\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}$,所以 $T_n=1\times\dfrac{1}{3^0}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{2}\times\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{n}{2}\times\dfrac{1}{3^{n-2}}+\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}$①,$\dfrac{1}{3}T_n=1\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{2}\times\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2}\times\dfrac{1}{3^{n-2}}+\dfrac{n}{2}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}+\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{1}{3^n}$②,由① − ②得 $\dfrac{2}{3}T_n=1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)-\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{1}{3^n}=1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{n+1}{2}\times\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{2n+5}{4}\times\dfrac{1}{3^n}$,故 $T_n=\dfrac{15}{8}-\dfrac{2n+5}{8}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}$.

例 3 解:(1)根据题意,数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=a_n+3$,即 $a_{n+1}-a_n=3$,由等差数列的定义可得,数列$\{a_n\}$是以 3 为公差的等差数列,因为 $a_2=4$,所以 $a_1=a_2-3=4-3=1$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=1+3(n-1)=3n-2$.

(2)由(1)知 $a_n=3n-2$,可得 $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$,所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{1}{3}\left[\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{n}{3n+1}$.

变式题 解:(1)因为 $S_{n+1}=2S_n+n$,所以 $a_{n+1}=S_n+n$. 令 $n=1$,可得 $a_2=S_1+1=1$,即 $S_1=a_1=0$.

由 $S_{n+1}=2S_n+n$ 可得 $S_{n+1}+(n+1)+1=2(S_n+n+1)$,且 $S_1+1+1=2\neq0$,可知数列$\{S_n+n+1\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列,则 $S_n+n+1=2\times2^{n-1}=2^n$,可得 $S_n+n=2^n-1$,即 $a_{n+1}=2^n-1$,则 $a_n=2^{n-1}-1$,$n\geqslant2$,

又 $a_1=0$ 符合上式,所以 $a_n=2^{n-1}-1$.

(2)由(1)可得 $b_n=\log_2(a_n+1)=\log_22^{n-1}=n-1$,则 $b_{n+1}-b_n=n-(n-1)=1$,可知$\{b_n\}$是首项 $b_1=0$,公差为 1 的等差数列,可得 $T_n=\dfrac{n(0+n-1)}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 当 $n\geqslant2$ 时,$\dfrac{1}{T_n}=\dfrac{2}{n(n-1)}=2\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$,所以 $\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_3}+\dfrac{1}{T_4}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}=2\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

例 4 A [解析] 因为数列$\{a_n\}$是等方差数列,且公方差为 3,所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=3$,又 $a_1^2=1$,所以 $a_n^2=a_1^2+(n-1)\cdot3=3n-2$,又数列$\{a_n\}$的各项均为正数,所以 $a_n=\sqrt{3n-2}$,所以 $\dfrac{1}{a_n+a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}=\dfrac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{(\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1})(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})}=\dfrac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$,所以 $\dfrac{1}{a_1+a_2}+\dfrac{1}{a_2+a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{33}+a_{34}}=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{3}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{3}+\cdots+\dfrac{\sqrt{3\times33+1}-\sqrt{3\times33-2}}{3}=3$,故选 A.

变式题 B [解析] 设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d>0)$，∵$a_1+a_6=4a_2$，∴$a_1+a_1+5d=4(a_1+d)$，∴$d=2a_1$，∴$a_n=a_1+(n-1)2a_1=a_1(2n-1)$，∴$\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2a_1}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$，∴$\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{1}{2a_1}(-\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{25}})=\frac{1}{2a_1}(-\sqrt{a_1}+\sqrt{49a_1})=\frac{3\sqrt{a_1}}{a_1}=\frac{3}{\sqrt{a_1}}=6$，解得$a_1=\frac{1}{4}$，∴$a_5=9a_1=\frac{9}{4}$. 故选B.

例5 解:(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，由$4a_2,2a_3,a_4$成等差数列，可得$4a_2+a_4=4a_3$，故$4+q^2=4q$，解得$q=2$，由$S_4=8a_2-2$，可得$\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=16a_1-2$，解得$a_1=2$，故$a_n=2^n$，即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)可得$b_n=\frac{a_n}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}=\frac{2^n}{(2^n+2)(2^{n+1}+2)}=\frac{1}{2^n+2}-\frac{1}{2^{n+1}+2}$，故$T_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{2^n+2}-\frac{1}{2^{n+1}+2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n+1}+2}$，

又$\{T_n\}$为递增数列，所以$T_n\geqslant T_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$，又当$n\to+\infty$时，$\frac{1}{2^{n+1}+2}\to0$，所以$T_n<\frac{1}{4}$，故$\frac{1}{12}\leqslant T_n<\frac{1}{4}$.

变式题 A [解析] 由$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$，可得$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，即数列$\{a_n+1\}$是以$a_1+1=3$为首项，公比$q=3$的等比数列，可得$a_n+1=3\cdot3^{n-1}=3^n$，即$a_n=3^n-1$，所以$\frac{a_n+1}{(a_n+3)(a_{n+1}+3)}=\frac{3^n}{(3^n+2)(3^{n+1}+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n+2}-\frac{1}{3^{n+1}+2}\right)$，因此$T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^1+2}-\frac{1}{3^2+2}+\frac{1}{3^2+2}-\frac{1}{3^3+2}+\cdots+\frac{1}{3^n+2}-\frac{1}{3^{n+1}+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+2}-\frac{1}{3^{n+1}+2}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{2(3^{n+1}+2)}<\frac{1}{10}$，所以实数$k$的取值范围为$\left[\frac{1}{10},+\infty\right)$. 故选A.

第40讲 数列的综合问题

● **课堂考点探究**

例1 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_1+a_2+3a_4=25$，得$5a_1+10d=25$，则$a_1+2d=a_3=5$，又a_3+2,a_4,a_5-2成等比数列，∴$7,5+d,3+2d$成等比数列，得$(5+d)^2=7(3+2d)$，即$(d-2)^2=0$，得$d=2$，∴$a_n=a_3+(n-3)d=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$，∴数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$. ∵$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

∴$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

(2)若存在正整数$m,n(1<m<n)$，使得T_1,T_m,T_n成等比数列，则$T_m^2=T_1\cdot T_n$，即$\left(\frac{m}{2m+1}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{2n+1}$，化简得$n=\frac{3m^2}{-2m^2+4m+1}>0$，解得$1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$. 又$m>1$且$m\in\mathbf{N}^*$，∴$m=2$，$n=12$，故存在正整数$m=2$，$n=12$，使得$T_1,T_m,T_n$成等比数列.

变式题 解:(1)由题意可得$a_n=4+(n-1)\times1=n+3$，故$a_n=n+3$，$n\in\mathbf{N}^*$.

∵数列$\{a_n+b_n\}$是公比为2的等比数列，且$a_1+b_1=4-2=2$，∴$a_n+b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$，∴$b_n=2^n-a_n=2^n-n-3$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)得$b_n=2^n-(n+3)$，则$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(2^1-4)+(2^2-5)+(2^3-6)+\cdots+[2^n-(n+3)]=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-[4+5+6+\cdots+(n+3)]=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-\frac{(n+7)n}{2}=2^{n+1}-\frac{n^2}{2}-\frac{7n}{2}-2$.

例2 解:(1)由$a_3=2$，得$a_1=0$，∴$a_n=n-1$. ∵点$(a_n,b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$在函数$f(x)=3^x$的图象上，∴$b_n=3^{a_n}=3^{n-1}$.

(2)证明:由(1)知$b_n=3^{n-1}$，显然数列$\{b_n\}$为等比数列，其首项为1，公比为3，则$S_n=\frac{3^n-1}{2}$，∴$c_n=\frac{b_n}{4S_nS_{n+1}}=\frac{3^{n-1}}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$，∴$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{26}+\frac{1}{26}-\frac{1}{80}+\cdots+\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{6(3^{n+1}-1)}<\frac{1}{12}$，

∴$T_n<\frac{1}{12}$.

变式题 解:(1)由$T_n^2=a_n^{n+1}$，得$T_{n+1}^2=a_{n+1}^{n+2}$，所以$\frac{T_{n+1}^2}{T_n^2}=a_{n+1}^2=\frac{a_{n+1}^{n+2}}{a_n^{n+1}}$，即$a_{n+1}^n=a_n^{n+1}$，两边取常用对数得$\lg a_{n+1}^n=\lg a_n^{n+1}$，即$n\lg a_{n+1}=(n+1)\lg a_n$，所以$\frac{\lg a_{n+1}}{n+1}=\frac{\lg a_n}{n}=\cdots=\frac{\lg a_1}{1}=\lg3$，所以数列$\left\{\frac{\lg a_n}{n}\right\}$为常数列，所以$\lg a_n=n\lg3=\lg3^n$，所以$a_n=3^n$.

(2)证明:由(1)知$a_n=3^n$，所以$b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{3^n-1}{3^n+1}=1-\frac{2}{3^n+1}$，则$S_n=\left(1-\frac{2}{3^1+1}\right)+\left(1-\frac{2}{3^2+1}\right)+\cdots+\left(1-\frac{2}{3^n+1}\right)=n-2\left(\frac{1}{3^1+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}\right)$，又因为$\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3^n}$，所以$\frac{1}{3^1+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}$，故$S_n=n-2\left(\frac{1}{3^1+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}\right)>n-1$.

例3 解:由题知，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$，由等比数列的前n项和公式得$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

因为不等式$(-1)^n\cdot tS_n-14\leqslant S_n^2$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，$S_n>0$且$S_n$随着$n$的增大而增大，所以$(-1)^n\cdot t\leqslant S_n+\frac{14}{S_n}$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$恒成立. 令$g(x)=x+\frac{14}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则$g'(x)=1-\frac{14}{x^2}=\frac{x^2-14}{x^2}$，当$x\in(0,\sqrt{14})$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x\in(\sqrt{14},+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，又$2=S_1<\sqrt{14}<S_2=6$，且$g(2)=9$，$g(6)=\frac{25}{3}$，所以$g(S_2)<g(S_1)$. 当$n$为偶数时，不等式化为$t\leqslant S_n+\frac{14}{S_n}$，所以$t\leqslant\frac{25}{3}$；

当n为奇数时，不等式化为$-t\leqslant S_n+\frac{14}{S_n}$，所以$-t\leqslant9$，所以$t\geqslant-9$.

综上可知，$-9\leqslant t\leqslant\frac{25}{3}$.

变式题 解:(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，$q>0$，因为$b_n=2\log_2a_n+1$，$b_1=1$，$b_4=7$，所以$b_1=1=2\log_2a_1+1$，则$a_1=1$，$b_4=7=2\log_2a_4+1$，则$a_4=8$，所以$q^3=\frac{a_4}{a_1}=8$，则$q=2$，所以$a_n=2^{n-1}$，$b_n=2\log_2a_n+1=2(n-1)+1=2n-1$.

(2)因为$2\lambda a_n\geqslant b_n-2$恒成立，$a_n>0$，所以$\lambda\geqslant\frac{b_n-2}{2a_n}=\frac{2n-3}{2^n}$恒成立. 设$f(n)=\frac{2n-3}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则$f(n+1)-f(n)=\frac{2n-1}{2^{n+1}}-\frac{2n-3}{2^n}=\frac{5-2n}{2^{n+1}}$，当$n\leqslant2$时，$f(n+1)-f(n)>0$，则$f(3)>f(2)>f(1)$，当$n\geqslant3$时，$f(n+1)-f(n)<0$，则$f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$，所以$f(n)_{\max}=f(3)=\frac{3}{8}$，所以$\lambda$的取值范围为$\left[\frac{3}{8},+\infty\right)$.

例4 C [解析] 设从今年1月份起，每月的产量和产品的合格率都按题中的标准增长，该工厂每月的产量、不合格率分别用a_n,b_n表示，月份用$n(n\in\mathbf{N}^*)$表示，则$a_n=1\times(1+4\%)^n=1.04^n$，$b_n=1-(87\%+n\cdot0.4\%)=-0.004n+0.13$，其中$n\leqslant24$，$n\in\mathbf{N}^*$，则从今年1月份起，各月不合格产品的数量为$a_nb_n=1.04^n\times(0.13-0.004n)$. 易知$a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n=1.04^{n+1}\times[0.13-0.004(n+1)]-1.04^n\times(0.13-0.004n)=1.04^n[1.04\times0.13-1.04\times0.004(n+1)-0.13+0.004n]=1.04^n(0.001\,04-0.000\,16n)=\frac{1.04^n}{10^5}(104-16n)=\frac{8\times1.04^n}{10^5}(13-2n)$，当$1\leqslant n\leqslant6$时，$a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n>0$，即$a_{n+1}b_{n+1}>a_nb_n$，此时数列$\{a_nb_n\}$递增，即$a_1b_1<a_2b_2<\cdots<a_7b_7$；当$7\leqslant n\leqslant23$时，$a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n<0$，即$a_{n+1}b_{n+1}<a_nb_n$，此时数列$\{a_nb_n\}$递减，即$a_7b_7>a_8b_8>\cdots>a_{24}b_{24}$，因此当$n=7$时，$a_nb_n$最大，故该工厂的月不合格产品数量达到最大是今年的7月份. 故选C.

变式题 ABC [解析] 对于A，利息和为$(120\,000+110\,000+100\,000+\cdots+10\,000)\times0.003=2340$(元)，故A正确；对于B，倒数第二个月还款后，剩余本金10 000元，一个月利息为30元，本息和应为10 030元，故B正确；对于C，设第n个月贷款利息为a_n，偿还本金为b_n，p为贷款总额，则$a_1=0.3\%p$，$a_2=0.3\%(p-b_1)$，则$b_2=(a_1+b_1)-a_2=0.3\%p+b_1-0.3\%(p-b_1)=b_1(1+0.3\%)$，$a_3=0.3\%(p-b_1-b_2)$，则$b_3=(a_2+b_2)-a_3=0.3\%(p-b_1)+b_2-0.3\%(p-$

$b_1-b_2)=b_2(1+0.3\%)=b_1(1+0.3\%)^2$，同理得 $b_4=b_1(1+0.3\%)^3$，$b_5=b_1(1+0.3\%)^4$，…，$b_{12}=b_1(1+0.3\%)^{11}$，所以数列$\{b_n\}$是以 $1+0.3\%$ 为公比的递增等比数列，故C正确；对于D，由选项C可知，$\frac{b_1[1-(1+0.3\%)^{12}]}{1-(1+0.3\%)}=120\ 000$，得 $b_1=\frac{120\ 000\times0.3\%}{(1+0.3\%)^{12}-1}$，所以每月还款的本息和为 $a_1+b_1=120\ 000\times0.3\%+\frac{120\ 000\times0.3\%}{(1+0.3\%)^{12}-1}$，所以等额本息还款利息和为 $12(a_1+b_1)-120\ 000=12\times\left[120\ 000\times0.3\%+\frac{120\ 000\times0.3\%}{(1+0.3\%)^{12}-1}\right]-120\ 000=12\times120\ 000\times0.3\%\times\left[1+\frac{1}{(1+0.3\%)^{12}-1}\right]-120\ 000\approx2\ 352.85$，比等额本金的利息和高，但等额本金方案起初还款金额高，还款压力大，还款金额逐年递减，等额本息每月还款金额相同，低于等额本金方案前半段时间还款额，高于后半段时间还款额，还有通货膨胀等诸多经济因素影响两种方案的收益，故不能简单认为某种贷款方案优于另一种方案，故D错误．故选ABC．

第41讲　双数列问题

● 课堂考点探究

例1　解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，∵ $T_3=b_1+b_2+b_3=a_1-6+2a_2+a_3-6=4a_2-12=16$，∴ $a_2=a_1+d=7$，又 $S_4=4a_1+\frac{4\times3}{2}d=32$，即 $a_1+\frac{3}{2}d=8$，

∴ $a_1=5,d=2$，

∴ $a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$．

(2)证明：方法一：由(1)知 $S_n=\frac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，$b_n=\begin{cases}2n-3,n=2k-1,\\4n+6,n=2k,\end{cases}$ $k\in\mathbf{N}^*$．当 n 为偶数时，$b_{n-1}+b_n=2(n-1)-3+4n+6=6n+1$，$T_n=\frac{13+(6n+1)}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$，当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n\right)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n(n-1)>0$，因此 $T_n>S_n$；当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{7}{2}(n+1)-[4(n+1)+6]=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5$，当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5\right)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此 $T_n>S_n$．

所以当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$．

方法二：由(1)可得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2+4n$．

当 n 为偶数时，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=(a_1-6+a_3-6+\cdots+a_{n-1}-6)+(2a_2+2a_4+\cdots+2a_n)=(5+9+\cdots+2n+1-3n)+2\times(7+11+\cdots+2n+3)=\frac{(5+2n+1)\cdot\frac{n}{2}}{2}-3n+2\times\frac{(7+2n+3)\cdot\frac{n}{2}}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$，当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}n(n-1)>0$，即 $T_n>S_n$；当 n 为奇数时，$T_n=T_{n-1}+b_n=\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{7}{2}(n-1)+2n+3-6=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5(n\geqslant3)$，当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n^2-\frac{3}{2}n-5=\frac{1}{2}(n^2-3n-10)=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，即 $T_n>S_n$．

综上，当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$．

变式题1　2　[解析] 因为 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=(-1)^n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$，所以 $S_8=a_1+a_2+\cdots+a_8=-(\sqrt{2}+\sqrt{1})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\cdots-(\sqrt{8}+\sqrt{7})+(\sqrt{9}+\sqrt{8})=\sqrt{9}-1=2$．

变式题2　解：(1)由 $2S_n=a_n(a_n+1)$ 知，当 $n=1$ 时，$2a_1=a_1(a_1+1)$，解得 $a_1=1$ 或 $a_1=0$(舍去)，当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}(a_{n-1}+1)$，两式相减得 $2a_n=a_n^2+a_n-a_{n-1}^2-a_{n-1}(n\geqslant2)$，即 $a_n^2-a_{n-1}^2-(a_n+a_{n-1})=0(n\geqslant2)$，即 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-1)=0(n\geqslant2)$，由于 $a_n+a_{n-1}>0(n\geqslant2)$，所以 $a_n-a_{n-1}-1=0(n\geqslant2)$，即 $a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant2)$，所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为1的等差数列，所以 $a_n=n$．

(2)由(1)得 $b_n=\begin{cases}n,n\text{ 为奇数},\\ \frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right),n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

当 n 为偶数时，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=[1+3+\cdots+(n-1)]+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1+(n-1)}{2}\times\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+2)}=\frac{n^2+1}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$；

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{(n+1)^2+1}{4}-\frac{1}{2(n+3)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{n^2+2n+2}{4}-\frac{1}{2(n+3)}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+3)}=\frac{n^2+2n+2}{4}-\frac{1}{2(n+1)}$．

综上，$T_n=\begin{cases}\frac{n^2+2n+2}{4}-\frac{1}{2(n+1)},n\text{ 为奇数},\\ \frac{n^2+1}{4}-\frac{1}{2(n+2)},n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

例2　解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，因为 a_1,a_3 是方程 $x^2-10x+16=0$ 的两根，所以 $a_1=2,a_3=8$ 或 $a_1=8,a_3=2$，又因为$\{a_n\}$为递增的等比数列，所以 $a_1=2,a_3=8$，则 $q=2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}=2^n$．

(2)因为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$，$45+9=54<60$，$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$，$55+10=65>60$，所以数列$\{c_n\}$的前60项中含有$\{a_n\}$的前10项，含有$\{b_n\}$的前50项，所以数列$\{c_n\}$的前60项和为 $\frac{2\times(1-2^{10})}{1-2}+3\times50+\frac{50\times49\times2}{2}=4646$．

变式题　$a_n=\frac{3^n+1}{2}$　[解析] 因为 $a_n=\log_3(1\times x_1\times x_2\times\cdots\times x_{2^n-1}\times3)$，所以 $a_{n+1}=\log_3[1\times(1\times x_1)x_1(x_1x_2)x_2\cdots x_{2^n-1}(x_{2^n-1}\times3)\times3]=\log_3(1^2\times x_1^3x_2^3\cdots x_{2^n-2}^3x_{2^n-1}^3\times3^2)=3a_n-1$，所以 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$，又 $a_1=\log_3(1\times3\times3)=2$，所以 $a_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$是以 $\frac{3}{2}$ 为首项，3为公比的等比数列，所以 $a_n-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\times3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$，所以 $a_n=\frac{3^n+1}{2}$．

例3　解：(1)由题意可得，$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．因为 $b_1=4,b_{n+1}=3b_n-2n+1$，所以 $b_{n+1}-(n+1)=3b_n-3n=3(b_n-n)$，又 $b_1-1=3$，故$\{b_n-n\}$是首项为3，公比为3的等比数列，所以 $b_n-n=3^n$，即 $b_n=3^n+n(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2)由题意可得 $3k-1=3^m+m$，$k,m\in\mathbf{N}^*$，令 $m=3n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $3k-1=3^{3n-1}+3n-1=3(3^{3n-2}+n)-1$，此时满足条件，即当 $m=2,5,8,\cdots,3n-1$ 时为公共项，所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=b_2+b_5+\cdots+b_{3n-1}=3^2+3^5+\cdots+3^{3n-1}+(2+5+\cdots+3n-1)=\frac{9(27^n-1)}{26}+\frac{n(3n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$．

变式题　解：(1)当 $n=1$ 时，$a_2+a_1=12$，所以 $a_2=8$；当 $n\geqslant2$ 时，$a_n+a_{n-1}=8n-4$，所以 $a_{n+1}-a_{n-1}=8$．当 n 为偶数时，$a_n=8+\frac{n-2}{2}\times8=4n$；当 n 为奇数时，$a_n=4+\frac{n-1}{2}\times8=4n$．综上所述，$a_n=4n$．

(2)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 H_n，由(1)可知 $a_{200}=800$，$b_9=2^9=512$，当 $n\leqslant200$ 时，可知$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公共项为4,8,16,…,512，共8项，所以数列$\{c_n\}$的前192项和 $T_{192}=S_{200}-(H_9-2)=\frac{200\times(4+800)}{2}-\left[\frac{2\times(1-2^9)}{1-2}-2\right]=80\ 400-1020=79\ 380$．

例4　解：(1)证明：由题设得 $4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即 $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，又因为 $a_1+b_1=1$，所以$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列．由题设得 $4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，即 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$，又因为 $a_1-b_1=1$，所以$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列．

(2)由(1)知，$a_n+b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$，所以 $a_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2}$，$b_n=\frac{1}{2}[(a_n+b_n)-(a_n-b_n)]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}$．

变式题　解：(1)证明：由题知 $a_{n+2}=2b_{n+1}=2a_n+4$，则 $a_{n+2}+4=2(a_n+4)$，则 $a_{2n+1}+4=2(a_{2n-1}+4)$，又 $a_1+4=8$，故数列$\{a_{2n-1}+4\}$是首项为8，公比为2的等比数列．

(2)由(1)知 $a_{2n-1}+4=8\cdot2^{n-1}$，即 $a_{2n-1}=8\cdot2^{n-1}-4$．同理有数列$\{a_{2n}+4\}$为等比数列，其首项为 $a_2+4=2b_1+4=8$，公比为2，则 $a_{2n}+4=8\cdot2^{n-1}$，即 $a_{2n}=8\cdot2^{n-1}-4$．故 $b_{2n}=a_{2n-1}+2=8\cdot$

$2^{n-1}-2$，$b_{2n-1}=\frac{1}{2}a_{2n}=8\cdot 2^{n-2}-2$，故数列$\{b_{2n}\}$的前$n$项和为$8(1+2^1+\cdots+2^{n-1})-2n=8(2^n-1)-2n=2^{n+3}-2n-8$，数列$\{b_{2n-1}\}$的前$n$项和为$2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-2n=2^{n+2}-4-2n$，故$S_{2n}=2^{n+3}-2n-8+2^{n+2}-4-2n=3\cdot 2^{n+2}-4n-12$.

培优专题（四） 数列中的交汇与创新问题

例1 A ［解析］$a_n=1+2+3+\cdots+C_{n-1}^1+C_n^1=\frac{n(n+1)}{2}$. 对于选项A，$a_n+a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+2)(n+1)}{2}=(n+1)^2$，A正确；易知B错误；对于选项C，当$n=3$时，$a_1+a_2+a_3=10\neq C_3^3=1$，C错误；对于选项D，当$n=3$时，$a_1+a_2+a_3=10\neq C_4^2=6$，D错误. 故选A.

【自测题】

C ［解析］用(s,t)表示每一项，可知第一行的数对应$(0,1)$；第二行从左至右的数分别对应$(0,2)$，$(1,2)$；第三行从左至右的数分别对应$(0,3)$，$(1,3)$，$(2,3)$；依次类推，可知第n行从左至右第k个数对应$(k-1,n)$，且第n行共有n个数. 对于A，第四行从左至右的数分别对应$(0,4)$，$(1,4)$，$(2,4)$，$(3,4)$，即第四行的数为17，18，20，24，A中结论正确；对于B，$a_{\frac{n(n+1)}{2}}$对应第n行从左至右第n个数，即对应$(n-1,n)$，故$a_{\frac{n(n+1)}{2}}=2^{n-1}+2^n=3\times 2^{n-1}$，B中结论正确；对于C，$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}$对应第$n$行从左至右第1个数，即对应$(0,n)$，故$a_{\frac{n(n-1)}{2}+1}=2^0+2^n=2^n+1$，C中结论错误；对于D，$a_{100}$对应第14行从左至右第9个数，即对应$(8,14)$，故$a_{100}=2^8+2^{14}=16\,640$，D中结论正确. 故选C.

例2 解：(1)由题得$x_n=-\frac{5}{2}+(n-1)\times(-1)=-n-\frac{3}{2}$，

因为点$P_n(x_n,y_n)$在函数$y=3x+\frac{13}{4}$的图象上，

所以$y_n=3\cdot x_n+\frac{13}{4}=-3n-\frac{5}{4}$，

所以$P_n\left(-n-\frac{3}{2},-3n-\frac{5}{4}\right)$.

(2)因为抛物线c_n的对称轴垂直于x轴，且顶点为P_n，所以设c_n的方程为$y=a\left(x+\frac{2n+3}{2}\right)^2-\frac{12n+5}{4}$，把$D_n(0,n^2+1)$的坐标代入抛物线$c_n$的方程，得$a=1$，所以抛物线$c_n$的方程为$y=x^2+(2n+3)x+n^2+1$，则$k_n=2n+3$.

因为$\frac{1}{k_{n-1}k_n}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$，所以$\frac{1}{k_1k_2}+\frac{1}{k_2k_3}+\cdots+\frac{1}{k_{n-1}k_n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{4n+6}$.

(3)由(1)得$S=\{x|x=-(2n+3),n\in\mathbf{N}^*\}$，$T=\{y|y=-[2(6n+1)+3],n\in\mathbf{N}^*\}$，所以$a_1=-17$.

设$\{a_n\}$的公差为d，则$a_{10}=-17+9d\in(-265,-125)$，可得$-\frac{248}{9}<d<-12$，

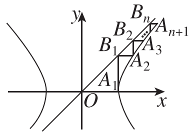
又$a_n\in T$，所以$d=-12m(m\in\mathbf{N}^*)$，则$d=-24$，所以$a_n=7-24n(n\in\mathbf{N}^*)$.

【自测题】

解：(1)双曲线$C:x^2-y^2=1$的渐近线方程为$y=\pm x$，不妨令直线$l:y=x$. 由已知可得$y_n=x_{n-1}(n\geq 2)$，

又点$A_n(x_n,y_n)$在双曲线上，所以$x_n^2-y_n^2=1$，

即$x_n^2-x_{n-1}^2=1(n\geq 2)$，所以$\{x_n^2\}$是以$x_1^2=1$为首项，1为公差的等差数列，所以$x_n^2=n$，即$x_n=\sqrt{n}$.



(2)证明：由题知$A_i(x_i,y_i)$，则有$x_i^2-y_i^2=1$，当切线斜率存在时，设斜率为k，则切线方程为$y=k(x-x_i)+y_i$，代入双曲线C的方程，得$(1-k^2)x^2-2k(y_i-kx_i)x-(y_i-kx_i)^2-1=0$，由$\Delta=0$，得$y_i^2k^2-2x_iy_ik+x_i^2=0$，解得$k=\frac{x_i}{y_i}$，即切线方程为$x_ix-y_iy=1$，

当切线斜率不存在时，切点为$A_1(1,0)$，切线方程为$x=1$，也满足上式.

由$\begin{cases}x_ix-y_iy=1,\\y=x,\end{cases}$可得$x=y=\frac{1}{x_i-y_i}=\frac{1}{\sqrt{i}-\sqrt{i-1}}=\sqrt{i}+\sqrt{i-1}$，

不妨取$M_i(\sqrt{i}+\sqrt{i-1},\sqrt{i}+\sqrt{i-1})$.

由$\begin{cases}x_ix-y_iy=1,\\y=-x,\end{cases}$可得$x=-y=\frac{1}{x_i+y_i}=\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i-1}}=\sqrt{i}-\sqrt{i-1}$，

则$N_i(\sqrt{i}-\sqrt{i-1},\sqrt{i-1}-\sqrt{i})$，所以$|M_iN_i|=\sqrt{(2\sqrt{i-1})^2+(2\sqrt{i})^2}=2\sqrt{2i-1}$，所以$a_i=\frac{1}{|M_iN_i|}=\frac{1}{2\sqrt{2i-1}}$，$b_i=\frac{1}{2\sqrt{2i+1}}$.

先证右边：$b_i=\frac{1}{2\sqrt{2i+1}}=\frac{1}{\sqrt{2i+1}+\sqrt{2i+1}}<\frac{1}{\sqrt{2i+1}+\sqrt{2i-1}}=\frac{\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1}}{2}$，所以$\sum_{i=1}^{n}b_i=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{2n+1}}<\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$，右边得证.

下面证左边：先证$x>\ln(1+x)(x>0)$，令$f(x)=x-\ln(x+1)(x>0)$，则$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$f(x)>f(0)=0$，即当$x>0$时，$x>\ln(1+x)$，所以$b_i=\frac{1}{2\sqrt{2i+1}}>\ln\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2i+1}}\right)=\ln\left(\frac{2\sqrt{2i+1}+1}{2\sqrt{2i+1}}\right)$.

当$i\geq 2$时，$2\sqrt{2i+1}+1\geq 2\sqrt{2i+3}$，

证明如下：$(2\sqrt{2i+1}+1)^2-(2\sqrt{2i+3})^2=4(2i+1)+4\sqrt{2i+1}+1-4(2i+3)=4\sqrt{2i+1}-7\geq 4\sqrt{5}-7>0$，所以$\ln\frac{2\sqrt{2i+1}+1}{2\sqrt{2i+1}}>\ln\frac{2\sqrt{2i+3}}{2\sqrt{2i+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{2i+3}{2i+1}$，所以当$n\geq 2$时，$\sum_{i=1}^{n}b_i=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{2\sqrt{2n+1}}>\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}+\cdots+\frac{1}{2}\ln\frac{2n+3}{2n+1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\frac{2n+3}{5}$，当$n=1$时，$b_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}$，所以$\sum_{i=1}^{n}b_i\geq\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\frac{2n+3}{5}$，左边得证. 所以命题得证.

例3 解：(1)证明：∵$\{a_n\}$是等差数列，∴设$a_n=a_1+(n-1)d=[a_1-1+(n-1)d]+1$，令$b_n=a_1-1+(n-1)d$，$c_n=1$，则$\{b_n\}$是等差数列，$\{c_n\}$是等比数列，∴数列$\{a_n\}$是“优分解”的.

(2)证明：数列$\{a_n\}$是“优分解”的，设$a_n=b_n+c_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中$b_n=b_1+(n-1)d$，$c_n=c_1q^{n-1}(c_1\neq 0,q\neq 0)$，则$\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=d+c_1q^{n-1}(q-1)$，则$\Delta^2 a_n=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=c_1q^{n-1}(q-1)^2$.

当$q=1$时，$\Delta^2 a_n=0(n\in\mathbf{N}^*)$；

当$q\neq 1$时，$\{\Delta^2 a_n\}$是首项为$c_1(q-1)^2$，公比为q的等比数列.

(3)一方面，数列$\{S_n\}$是“优分解”的，设$S_n=B_n+C_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中$B_n=B_1+(n-1)D$，$C_n=C_1Q^{n-1}(C_1\neq 0,Q\neq 0)$，由(2)知$\Delta^2 S_n=C_1Q^{n-1}(Q-1)^2$.

∵$\Delta S_1=S_2-S_1=a_2=4$，$\Delta S_2=S_3-S_2=a_3=6$，∴$\Delta^2 S_1=\Delta S_2-\Delta S_1=2$，∴$C_1(Q-1)^2=2$，∴$Q\neq 1$，∴$\{\Delta^2 S_n\}$是首项为2，公比为$Q(Q\neq 1)$的等比数列.

另一方面，数列$\{a_n\}$是“优分解”的，设$a_n=b_n+c_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中$b_n=b_1+(n-1)d$，$c_n=c_1q^{n-1}(c_1\neq 0,q\neq 0)$，$\Delta S_n=S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，$\Delta^2 S_n=\Delta S_{n+1}-\Delta S_n=a_{n+2}-a_{n+1}=d+c_1q^n(q-1)$.

∵$\{\Delta^2 S_n\}$是首项为2，公比为$Q(Q\neq 1)$的等比数列，∴$q\neq 0,q\neq 1$，且$(\Delta^2 S_2)^2=(\Delta^2 S_1)\cdot(\Delta^2 S_3)$，∴$[d+c_1q^2(q-1)]^2=[d+c_1q(q-1)]\cdot[d+c_1q^3(q-1)]$，化简得$c_1dq(q-1)^3=0$，∵$c_1\neq 0$，$q\neq 0,q\neq 1$，∴$d=0$，∴$\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=c_1q^{n-1}(q-1)$，即数列$\{\Delta a_n\}$是首项为$\Delta a_1=a_2-a_1=1$，公比为$q$的等比数列.

又∵$\Delta a_2=a_3-a_2=2$，∴$q=2$. ∵$\Delta^2 S_1=2$，∴$d+c_1q(q-1)=2$，又∵$d=0,q=2$，∴$c_1=1$，∴$b_1=a_1-c_1=3-1=2$. 综上所述，$a_n=b_1+(n-1)d+c_1q^{n-1}=2+2^{n-1}$.

【自测题】

C ［解析］对于选项A，B，取$a_n=1$，可知$\{a_n\}$既为等差数列也为等比数列，则$a_1+a_2=2$，不存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$a_m=2$，所以$\{a_n\}$不为内和数列，故A，B错误；对于选项C，$a_n>0$，对任意$n_1,n_2\in\mathbf{N}^*$，$n_1<n_2$，可知存在$m_1,m_2\in\mathbf{N}^*$，使得$a_{m_1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n_1}$，$a_{m_2}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n_2}$，则$a_{m_2}-a_{m_1}=a_{n_1+1}+a_{n_1+2}+\cdots+a_{n_2}>0$，即$a_{m_2}>a_{m_1}$，又内和数列$\{a_n\}$为递增数列，可知$m_2>m_1$，所以其伴随数列$\{b_n\}$为递增数列，故C正确；对于选项D，例如数列$\{a_n\}$为2，1，3，4，5，…，显然$\{a_n\}$是所有正整数的排列，可知$\{a_n\}$为内和数列，且$\{a_n\}$的伴随数列为递增数列，但$\{a_n\}$不是递增数列，故D错误. 故选C.

第42讲　空间几何体

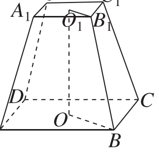
● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. (1)平行　全等　平行　相似
平行且相等　一点　一点　平行四边形
三角形　梯形　(2)垂直　一点　一点
矩形　等腰三角形　等腰梯形　圆
矩形　扇形　扇环
2. (1)①45°(或135°)　②平行(或重合)
不变　平行(或重合)　原来长度的一半
(2)②平行(或重合)　不变
3. $2\pi rl$　πrl　$\pi(r+r')l$
4. $S_{底}h$　$\frac{1}{3}S_{底}h$　$4\pi R^2$　$\frac{4}{3}\pi R^3$

【对点演练】

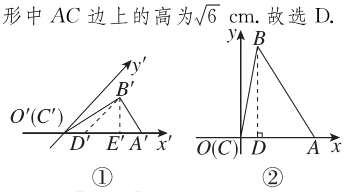
1. ④　[解析] 对于①,经过不共面的四点的球,即为由这四个点组成的四面体的外接球,有且仅有一个,故①中说法正确;对于②,平行六面体的每个面都是平行四边形,故②中说法正确;对于③,正棱柱的每条侧棱均与上下底面垂直,故③中说法正确;对于④,棱台的每条侧棱延长后交于一点,侧棱有可能与底面垂直,故④中说法错误.
2. 4　16　[解析] 根据题意,原图形$\triangle AOB$的底边OB的长为4,高为16.
3. 2　[解析] 设圆锥的底面半径为r,母线长为l,由条件得$\begin{cases}\pi rl+\pi r^2=12\pi,\\ \frac{2\pi r}{l}=\pi,\end{cases}$
$\therefore 3r^2=12,\therefore r=2$.
4. $\frac{28\sqrt{14}}{3}$　[解析] 由题意知,正四棱台上底面边长为2 cm,侧棱和下底面边长都是4 cm,如图,设正四棱台上、下底面中心分别为O_1,O,连接O_1O,O_1B_1,OB,结合正四棱台性质可知四边形O_1OBB_1为直角梯形,且$OB=2\sqrt{2},O_1B_1=\sqrt{2}$,故$O_1O=\sqrt{(B_1B)^2-(OB-O_1B_1)^2}=\sqrt{16-2}=\sqrt{14}$,即正四棱台的高为$\sqrt{14}$,故正四棱台的体积为$\frac{1}{3}\times(2^2+2\times4+4^2)\times\sqrt{14}=\frac{28\sqrt{14}}{3}$.



5. 1∶47　[解析] 设长方体的过同一顶点的三条棱的长分别为a,b,c,则截出的棱锥的体积$V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}b\times\frac{1}{2}c=\frac{1}{48}abc$,剩下的几何体的体积$V_2=abc-\frac{1}{48}abc=\frac{47}{48}abc$,所以$V_1:V_2=1:47$.
6. $24\pi^2$或$36\pi^2$　[解析] 设圆柱的底面半径为r.若圆柱的母线长是6π,则$4\pi=2\pi r$,所以$r=2$,所以圆柱的体积为$\pi\times2^2\times6\pi=24\pi^2$.若圆柱的母线长是$4\pi$,则$6\pi=2\pi r$,所以$r=3$,所以圆柱的体积为$\pi\times3^2\times4\pi=36\pi^2$.故圆柱的体积是$24\pi^2$或$36\pi^2$.

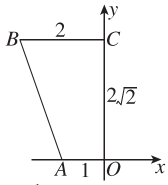
● **课堂考点探究**

例1　D　[解析] 画出平面直角坐标系xOy(图②),在x轴上取$OA=O'A'$,即$CA=C'A'$,在图①中,过B'作$B'D'/\!/y'$轴,交x'轴于D',在x轴上取$OD=O'D'$,过点D作$DB/\!/y$轴,并使$DB=2D'B'$,连接AB,BC,则$\triangle ABC$即为原图形,如图②所示.原图形中,$BD\perp AC$于点D,则BD为原图形中AC边上的高,且$BD=2B'D'$.在图①中作$B'E'\perp A'C'$于点E',则$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'C'\times B'E'=B'E'=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以在直角三角形$B'E'D'$中,$B'D'=\sqrt{2}B'E'=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以$BD=2B'D'=\sqrt{6}$,故原图形中$AC$边上的高为$\sqrt{6}$ cm.故选D.



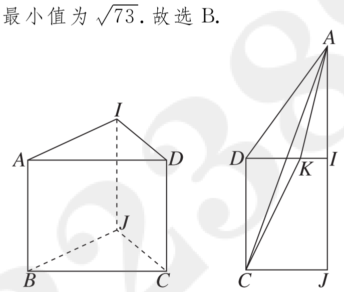
①　　②

变式题　B　[解析] 方法一:由已知求得$O'C'=\sqrt{2}$,把直观图还原为原图形如图,可得原图形为直角梯形,$OA/\!/CB$,$OA\perp OC$,且$OA=1$,$BC=2,OC=2\sqrt{2}$,则原四边形$OABC$的面积为$\frac{1}{2}\times(1+2)\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.



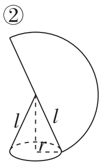
方法二:由题意知$A'B'=1$,$\therefore S_{直观图}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=\frac{3}{2}$,$\therefore S_{原图形}=2\sqrt{2}S_{直观图}=3\sqrt{2}$.

例2　(1)B　(2)1　[解析] (1)将展开图还原成立体图形得到三棱柱$ADI\text{-}BCJ$,如图①.由已知可得,$AI=4,DI=3,AD=5$,易知$\triangle ADI$为直角三角形且$\angle AID=90°$.将三棱柱的上底面ADI沿DI翻折至平面$IDCJ$上,A,C在DI两侧,连接AC,如图②所示.因为$AJ=8,CJ=3$,所以$AC=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$,则$AK+CK$的最小值为$\sqrt{73}$.故选B.

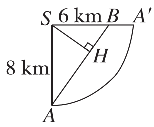


①　　②

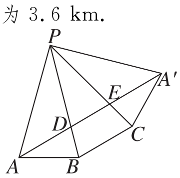
(2)如图,设圆锥的母线长为l,底面半径为r,则圆锥的侧面积$S_{侧}=\pi rl=2\pi$,即$r\cdot l=2$.由侧面展开图为半圆,可知$\frac{1}{2}\pi l^2=2\pi$,可得$l=2$,因此$r=1$.



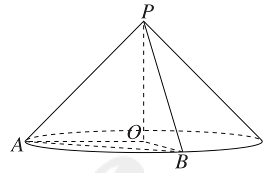
变式题　(1)3.6 km
(2)$2\sqrt{2}$　[解析] (1)由题意,半径为2 km,山高为$2\sqrt{15}$ km,则母线长$SA=\sqrt{2^2+(2\sqrt{15})^2}=8$(km),底面圆周长为$2\pi\times2=4\pi$(km),所以展开图的圆心角$\alpha=\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$.如图是圆锥侧面展开图,结合题意,$AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$(km),由点$S$向$AB$引垂线,垂足为$H$,此时$SH$为点$S$和线段$AB$上的点连线的最小值,即点$H$为公路的最高点,$HB$即为下坡路段,则$SB^2=BH\cdot AB$,即$36=10\cdot BH$,得$BH=3.6$ km,故下坡路段长为3.6 km.



(2)由题意可得此三棱锥的侧面展开图如图所示,连接AA',$\triangle AED$的周长为$AD+DE+EA'$,因为两点之间线段最短,所以当A,D,E,A'在一条直线上时,截面三角形AED的周长最小,最小值为AA'的长.因为$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA'=30°$,所以$\angle APA'=90°$,因为$PA=PA'=2$,所以$AA'=\sqrt{PA^2+PA'^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$,所以截面三角形$AED$周长的最小值为$2\sqrt{2}$.



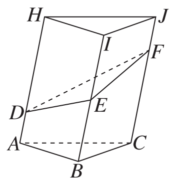
例3　(1)$\sqrt{2}\pi$　(2)12　[解析] (1)如图所示,因为三棱锥$O\text{-}PAB$为正三棱锥,所以$PA=PB=AB=\sqrt{2},OA=OB=OP$.因为$PO\perp AO,PO\perp OB$,所以由勾股定理得$OA=OB=OP=1$,则圆锥的底面半径$r=1$,母线长$l=\sqrt{2}$,则该圆锥的侧面积为$\pi rl=\sqrt{2}\pi$.



(2)设正六边形的边长为a,根据题意得$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2$,解得$a^2=\frac{8}{6\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$,由题意可知原正四面体的棱长为$3a$,故原正四面体的表面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3a)^2\times4=12$.

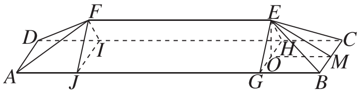
变式题　(1)D　(2)26π　[解析] (1)设圆台的母线长为l,因为该圆台的侧面积为$3\sqrt{5}\pi$,所以由圆台的侧面积公式可得$\pi l(1+2)=3\pi l=3\sqrt{5}\pi$,所以$l=\sqrt{5}$.设截去的小圆锥的母线长为$l'$,则由三角形相似可得$\frac{l'}{l'+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$,解得$l'=\sqrt{5}$,所以原圆锥的母线长为$l'+l=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$,故选D.
(2)设上底面的半径为r,则下底面的半径是$3r$,故轴截面的周长为$16=4+4+2r+6r$,解得$r=1$,所以上、下底面的面积分别为$\pi,9\pi$,圆台侧面积$S_{侧}=\pi(1+3)\times4=16\pi$,所以圆台的表面积为$\pi+9\pi+16\pi=26\pi$.

例4　(1)B　(2)C　[解析] (1)设底面半径均为R,圆锥的母线长为l,则$l=\sqrt{3+R^2}$.由题可知$2\pi R\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times2\pi Rl$,解得$l=2\sqrt{3}$,则$\sqrt{3+R^2}=2\sqrt{3}$,$\therefore R=3$,$\therefore$圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{3}\pi$.故选B.
(2)用一个完全相同的五面体$HIJ\text{-}LMN$与五面体$ABC\text{-}DEF$组合在一起,使得D与L重合,E与M重合,F与N重合,因为$AD/\!/BE/\!/CF$,且两两之间的距离为1,$AD=1$,$BE=2,CF=3$,所以构成的新组合体为一个三棱柱,该三棱柱的与侧棱垂直的截面(与三条侧棱都相交)是边长为1的等边三角形,侧棱长为$1+3=2+2=3+1=4$,则$V_{ABC\text{-}DEF}=\frac{1}{2}V_{ABC\text{-}HIJ}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选C.



变式题　(1)D　(2)C　(3)28
[解析] (1)设半球的半径为r,圆锥的高为h,由题意知$\frac{\pi r\sqrt{r^2+h^2}}{2\pi r^2}=2$,解得$h=\sqrt{15}r$.故圆锥的体积与半球体的体积的比值为$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2h}{\frac{2}{3}\pi r^3}=\frac{h}{2r}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.故选D.
(2)过E作$EO\perp$平面$ABCD$于O,过O作$GH/\!/BC$分别交AB,CD于G,H,连

接 EG, EH, 记 BC 的中点为 M, 连接 EM, OM, 同理作出 FJ, FI, IJ, 如图. 由题意可知 $\angle EMO$, $\angle EGO$ 分别为相应面与底面所成的角, 即 $\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{3}{5}$, $\therefore OG=OM=5$, $\therefore OE=3$, $JG=15$, $\therefore$ 五面体的体积 $V=V_{F\text{-}ADIJ}+V_{FIJ\text{-}EHG}+V_{E\text{-}BCHG}=S_{\triangle EHG}\cdot JG+2\times\frac{1}{3}S_{四边形BCHG}\cdot OE=225+100=325$. 故选 C.



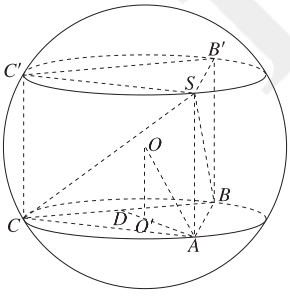
(3) 方法一: 依题意可知, 原正四棱锥的高为 6, 故棱台的体积 $V=V_{大正四棱锥}-V_{小正四棱锥}=\frac{1}{3}\times4^2\times6-\frac{1}{3}\times2^2\times3=28$.

方法二: 由题可知所得棱台的高为 3, 上底面是边长为 2 的正方形, 下底面是边长为 4 的正方形, 由棱台的体积公式可得棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(4^2+2^2+\sqrt{4^2\times2^2})\times3=28$.

增分微课 6　与球有关的切、接问题

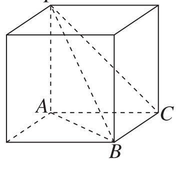
例 1　(1) A　(2) 2　[解析] (1) 由题意, 设球的球心为 O, 半径为 R, 正三棱台的上、下底面分别为 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 均为正三棱台的棱, 则 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 都是等边三角形. 设 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 的外接圆圆心分别为 O_1, O_2, 连接 O_1O_2, 则 $O_1O_2=1$. 连接 O_1A_1, O_2A_2, $\because$ 等边三角形 $A_1B_1C_1$ 和等边三角形 $A_2B_2C_2$ 的边长分别为 $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$, $\therefore O_1A_1=3$, $O_2A_2=4$. 连接 OA_1, OA_2, 若点 O 在线段 O_1O_2 上, 则 $R^2=O_1A_1^2+OO_1^2=O_2A_2^2+(1-OO_1)^2$, 即 $3^2+OO_1^2=4^2+(1-OO_1)^2$, 可得 $OO_1=4>O_1O_2$, 矛盾, 故点 O 在线段 O_1O_2 的延长线上. 由题意得 $R^2=O_1A_1^2+(OO_2+1)^2=O_2A_2^2+OO_2^2$, 可得 $OO_2=3$, $R=5$, $\therefore$ 该球的表面积 $S=4\pi R^2=100\pi$.

(2) 连接 SB, SC, 形成三棱锥 $S\text{-}ABC$, 并将三棱锥 $S\text{-}ABC$ 补成正三棱柱 $SB'C'\text{-}ABC$, 如图, 则三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的外接球也是正三棱柱 $SB'C'\text{-}ABC$ 的外接球, 显然球心 O 到底面 ABC 的距离即为三棱柱的高 SA 的一半. 设 O' 为 $\triangle ABC$ 的中心, 连接 AO, OO', 则 $OO'\perp$ 平面 ABC, 连接 AO' 并延长, 使之交 BC 于点 D, 则 $AD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $AO'=\frac{2}{3}AD=\sqrt{3}$, 所以 $OO'=\sqrt{OA^2-O'A^2}=\sqrt{4-3}=1$, 则 $SA=2OO'=2$.



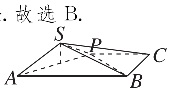
变式题　(1) B　(2) 4π　(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

[解析] (1) 如图, 将四面体 $P\text{-}ABC$ 补形成长方体, 长方体的长、宽、高分别为 2, 1, 2, 四面体 $P\text{-}ABC$ 的外接球即为长方体的外接球, 而长方体的外接球的直径等于长方体的体对角线长. 设外接球的半径为 R,

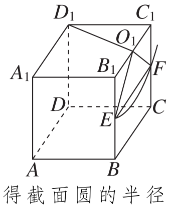


则 $2R=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$, 所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=9\pi$. 故选 B.

(2) 如图, 因为 $AB=2$, $AD=1$, P 为 DC 的中点, 所以 $AP=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $BP=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, 所以 $AP^2+BP^2=AB^2$, 所以 $BP\perp AP$, 又平面 $SAP\perp$ 平面 $ABCP$, 平面 $SAP\cap$ 平面 $ABCP=AP$, $BP\subset$ 平面 $ABCP$, 所以 $BP\perp$ 平面 SAP. 又 $\triangle SAP$ 为等腰直角三角形, 所以其外接圆的半径 $r=\frac{1}{2}AP=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 设三棱锥 $S\text{-}ABP$ 的外接球的半径为 R, 则 $R^2=r^2+\left(\frac{PB}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$, 所以 $R=1$, 所以三棱锥 $S\text{-}ABP$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi$.



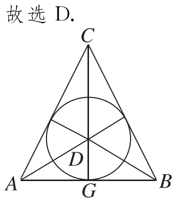
(3) 如图, 取 B_1C_1 的中点 O_1, 连接 D_1O_1. $\because$ 四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是各棱长均为 2 的直四棱柱, 且 $\angle BAD=60°$, $\therefore D_1O_1\perp$ 平面 B_1C_1CB, 且 $D_1O_1=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$. 由球的截面圆的性质可得截面圆的半径为 $\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$. 在平面 B_1C_1CB 上作以 O_1 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆弧, 与棱 BB_1, CC_1 的交点分别为 E, F, 易得 E, F 均为所在棱的中点. 连接 O_1F, O_1E, EF. $\because O_1E=O_1F=\sqrt{2}$, $EF=2$, $\therefore\angle EO_1F=\frac{\pi}{2}$, $\therefore$ 球面与侧面 B_1C_1CB 的交线长为 $\frac{1}{4}\times2\pi\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.



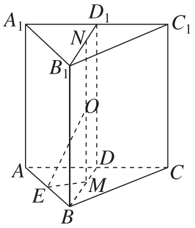
例 2　D　[解析] 设该正三棱锥为 $P\text{-}ABC$, 内切球的半径为 r, 过点 P 作 $PD\perp$ 平面 ABC 于点 D, 连接 AD 并延长, 交 BC 于点 E, 连接 PE. $\because\triangle ABC$ 是正三角形, $\therefore E$ 是 BC 的中点, D 为 $\triangle ABC$ 的中心. $\because AB=2\sqrt{3}$, $\therefore S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$, $DE=1$, $PE=\sqrt{2}$, $\therefore$ 该正三棱锥的表面积 $S_表=3\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+3\sqrt{3}=3\sqrt{6}+3\sqrt{3}$. 该正三棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$, 则 $\frac{1}{3}S_表\cdot r=V$, 即 $\frac{1}{3}\times(3\sqrt{6}+3\sqrt{3})\cdot r=\sqrt{3}$, 解得 $r=\sqrt{2}-1$. 故选 D.

变式题　$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

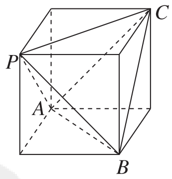
[解析] 圆锥的轴截面如图所示, 设内切球的球心为 D, 半径为 R, 则 $AB=2$, $CG=2$, 所以 $AC=BC=\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2+CG^2}=\sqrt{5}$, 又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BDC}$, 即 $\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{1}{2}\times2R+\frac{1}{2}\times\sqrt{5}R+\frac{1}{2}\times\sqrt{5}R$, 解得 $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即内切球的半径为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



例 3　$\frac{32\pi}{3}$　[解析] 如图, 由题意知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 是正三棱柱, 分别取 AC, A_1C_1 的中点 D, D_1, 连接 DD_1, B_1D_1, BD, 设 M, N 分别是三棱柱下底面和上底面的中心, 连接 MN, 则 $M\in BD$, $N\in B_1D_1$, 由对称性知 MN 的中点为球 O 的球心, 取 AB 的中点 E (切点), 连接 OE, EM, 则 $OE=MB$ (MB 等于球心 O 到棱 BB_1 的距离). 设球 O 的半径为 R, 由正三角形的性质知 $EM=DM=\frac{1}{2}BM=\frac{1}{2}R$, MN 与底面垂直, 则必与直线 EM 垂直, 因此在 $\mathrm{Rt}\triangle EOM$ 中, 可得 $R^2-\left(\frac{1}{2}R\right)^2=OM^2=(\sqrt{3})^2$, 可得 $R=2$, 所以球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\times2^3=\frac{32\pi}{3}$.

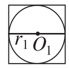


变式题　(1) B　(2) 1 ∶ 2 ∶ 3　[解析] (1) 将正四面体 $P\text{-}ABC$ 补成一个正方体, 如图, 球 O 与正四面体的棱都相切, 则球 O 为正方体的内切球. 设正方体的棱长为 a, 则 $a^2+a^2=16$, 得 $a=2\sqrt{2}$, 则球 O 的半径 $r=\sqrt{2}$, 故球 O 的表面积 $S=4\pi r^2=8\pi$, 故选 B.

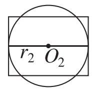


(2) 设正方体的棱长为 a.

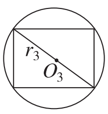
①球 O_1 为正方体的内切球, 球心 O_1 是正方体的中心, 切点是正方体六个面的中心, 经过四个切点及球心作截面, 如图所示, 设球 O_1 的半径为 r_1, 表面积为 S_1, 则 $2r_1=a$, 即 $r_1=\frac{a}{2}$, 所以 $S_1=4\pi r_1^2=\pi a^2$.



②球 O_2 与正方体各棱的切点为各棱的中点, 过正方体的两个相对面的面对角线作截面, 如图所示, 设球 O_2 的半径为 r_2, 表面积为 S_2, 则 $2r_2=\sqrt{2}a$, 即 $r_2=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, 所以 $S_2=4\pi r_2^2=2\pi a^2$.

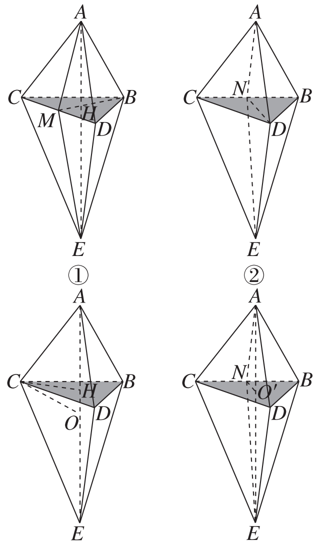


③球 O_3 过正方体的各个顶点, 即正方体的各个顶点都在球面上, 过正方体的体对角线作截面, 如图所示, 设球 O_3 的半径为 r_3, 表面积为 S_3, 则 $2r_3=\sqrt{3}a$, 即 $r_3=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 所以 $S_3=4\pi r_3^2=3\pi a^2$. 故这三个球的表面积之比为 $S_1:S_2:S_3=\pi a^2:2\pi a^2:3\pi a^2=1:2:3$.



例 4　BD　[解析] 对于 A, 如图①, 连接 AE 交平面 BCD 于 H, 连接 BH 并延长交 CD 于 M, 连接 EM, AM, 易知 A, B, E, M 共面, 若 $AB\parallel$ 平面 DCE, 平面 $ABEM\cap$ 平面 $CDE=EM$, 所以 $AB\parallel EM$, 从而 $\frac{BH}{MH}=\frac{AH}{EH}=2$, 这与三棱锥 $E\text{-}BCD$ 的高 (EH) 大于三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的高 (AH) 矛盾, 所以 AB 不平行于平面 DCE, 故 A 错误; 对于 B, 如图②, 取 BC 的中点 N, 连接 AN, EN, 易知 $\angle ANE$ 为二面角 $A\text{-}BC\text{-}E$ 的平面角, 连接 DN, 则 $AN=DN=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AD=1$, 所以 $\cos\angle AND=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$, 又由于三棱锥 $E\text{-}BCD$ 的高大于三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的高, 所以 $\angle ANE>2\angle AND>\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos\angle ANE<\cos2\angle AND=2\cos^2\angle AND-1=-\frac{7}{9}$, 故 B 正确; 对于 C, 如图③, 连接 AE 交平面 BCD 于 H, 连接 CH, 假设该六面体存在外接球, 则球心 O 位于 AE 的中点, 连接 OC, 设外接球的半径为 R, $EH=x$, 则

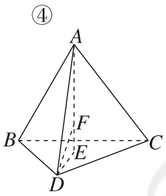
$R=\frac{AH+EH}{2}=\frac{\frac{\sqrt6}{3}+x}{2}$，$OH=x-R=\frac{x-\frac{\sqrt6}{3}}{2}$，结合 $OH^2+CH^2=R^2$，得 $\left(\frac{x-\frac{\sqrt6}{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^2=\left(\frac{\frac{\sqrt6}{3}+x}{2}\right)^2$，解得 $x=\frac{\sqrt6}{6}$，这与 $x>\frac{\sqrt6}{3}$ 矛盾，故C错误；对于D，如图④，连接 AE，易知 AE 上的点到三棱锥 $A\text{-}BCD$ 各侧面的距离相等，记为 d_1，到三棱锥 $E\text{-}BCD$ 各侧面的距离也相等，记为 d_2，取 BC 的中点 N，连接 AN，EN，作 $\angle ANE$ 的平分线交 AE 于 O'，此时 $d_1=d_2$，O' 即为内切球的球心，故D正确．故选BD．



① ② ③ ④

变式题　$6\sqrt3$　27

[解析] 该组合体一共有24个面，每一个面都是全等的边长为1的等边三角形，则其表面积为 $24\times\frac12\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt3$．该组合体的外接球也是任意一个正四面体的外接球，可用一个正四面体来看，正四面体 $A\text{-}BCD$ 如图所示，设 E 是 $\triangle BCD$ 的中心，F 是外接球球心，则 $2DE\cos\frac{\pi}{6}=DC$，则 $DE=\frac{2\sqrt3}{3}$，$AE=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt3}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt6}{3}$．设外接球的半径为 R，则 $AF=DF=R$，又 $AF+EF=AE$，$DF^2=EF^2+DE^2$，解得 $R=\frac{\sqrt6}{2}$．两正交四面体公共部分一共有8个面，且每一个面都是全等的边长为1的等边三角形，则其表面积为 $8\times\frac12\times1\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt3$，大正四面体的体积为 $\frac13\times\frac12\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\times\frac{2\sqrt6}{3}=\frac{2\sqrt2}{3}$，则每个小正四面体的体积为 $\frac{2\sqrt2}{3}\times\left(\frac12\right)^3=\frac{\sqrt2}{12}$，则中间公共部分的体积为 $\frac{2\sqrt2}{3}-4\times\frac{\sqrt2}{12}=\frac{\sqrt2}{3}$．设其内切球的半径为 r，则中间公共部分的体积也可表示为 $\frac13\times2\sqrt3r=\frac{\sqrt2}{3}$，解得 $r=\frac{\sqrt6}{6}$，故外接球和内切球的体积的比值为 $\left(\frac{R}{r}\right)^3=27$．

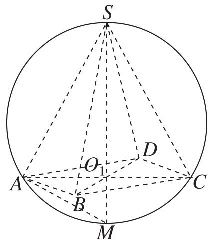


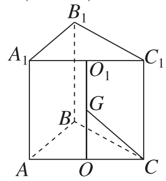
例5　(1)C　(2)$4\sqrt3\pi$

[解析](1)方法一(导数法)：如图，连接 AC，BD 交于点 O_1，连接 SO_1．设正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的高 $SO_1=h$，底面边长为 a，则 $AO_1=\frac{\sqrt2}{2}a$，设正四棱锥外接球的半径为 R，则由 $\frac43\pi R^3=36\pi$，得 $R=3$．延长 SO_1，交球面于点 M，连接 AM，则 SM 为球的直径，易知 $AO_1\perp SM$，在 $\mathrm{Rt}\triangle SAM$ 中，由射影定理知，$l^2=6h$，$\frac12a^2=h(6-h)$，所以 $a^2=2h(6-h)$，$h=\frac{l^2}{6}\in\left[\frac32,\frac92\right]$，所以正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的体积为 $\frac13a^2h=\frac23h^2(6-h)=\frac23(-h^3+6h^2)$．记 $V(h)=\frac23(-h^3+6h^2)$，$h\in\left[\frac32,\frac92\right]$，则 $V'(h)=2(-h^2+4h)$，$h\in\left[\frac32,\frac92\right]$，当 $h\in\left[\frac32,4\right)$ 时，$V'(h)>0$，$V(h)$ 单调递增，当 $h\in\left(4,\frac92\right]$ 时，$V'(h)<0$，$V(h)$ 单调递减，所以 $V(h)_{\max}=V(4)=\frac{64}{3}$，$V(h)_{\min}=\min\left\{V\left(\frac32\right),V\left(\frac92\right)\right\}=\min\left\{\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right\}=\frac{27}{4}$，所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$．

方法二(均值不等式法)：同方法一得正四棱锥的体积 $V=\frac13a^2h=\frac13(12-2h)h\times h\leqslant\frac13\times\left[\frac{(12-2h)+h+h}{3}\right]^3=\frac{64}{3}$(当且仅当 $h=4$ 时取等号)．当 $l=3$ 时，$h=\frac32$，$a=\frac{3\sqrt3}{\sqrt2}$，则 $V=\frac13a^2h=\frac13\times\left(\frac{3\sqrt3}{\sqrt2}\right)^2\times\frac32=\frac{27}{4}$．当 $l=3\sqrt3$ 时，$h=\frac92$，$a=\frac{3\sqrt3}{\sqrt2}$，则 $V=\frac13a^2h=\frac13\times\left(\frac{3\sqrt3}{\sqrt2}\right)^2\times\frac92=\frac{81}{4}$．因为 $\frac{27}{4}<\frac{81}{4}<\frac{64}{3}$，所以该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$．

(2)设正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高为 h，$AC=BC=AB=a$，则 $3a\times h=9$，所以 $h=\frac3a$．设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r，则 $2r=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}$，解得 $r=\frac{\sqrt3a}{3}$．设球 O 的半径为 R，则 $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{a^2}{3}+\frac{9}{4a^2}\geqslant\sqrt3$，当且仅当 $a^2=\frac{3\sqrt3}{2}$ 时，等号成立，所以球 O 的表面积的最小值为 $4\pi\times\sqrt3=4\sqrt3\pi$．





变式题　C　[解析]在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为斜边 AC 的中点，同理 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆的圆心为斜边 A_1C_1 的中点，如图．因为直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 外接球的直径为6，所以外接球的半径 $R=3$．由图知，上、下底面的中心分别为 O_1，O，连接 O_1O，则外接球的球心 G 为 O_1O 的中点，连接 GC，则 $GC=3$，设 $AB=x(0<x<6)$，则 $AC=\sqrt{x^2+4}$，则 $OC=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$．在 $\mathrm{Rt}\triangle COG$ 中，$OG=\sqrt{9-\frac{x^2+4}{4}}$，则 $OO_1=2\sqrt{9-\frac{x^2+4}{4}}=\sqrt{32-x^2}$，故该三棱柱的体积 $V=\frac12\times2x\times\sqrt{32-x^2}=\sqrt{x^2(32-x^2)}\leqslant\sqrt{\left(\frac{x^2+32-x^2}{2}\right)^2}=16$，当且仅当 $x^2=32-x^2$，即 $x=4$ 时等号成立．故选C．

第43讲　空间点、直线、平面之间的位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

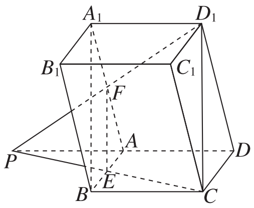
1. 不在一条直线上　两个点
   有且只有一条
2. 直线外一点　相交　平行
3. 相交　平行　任何
4. 1　0　无数　0　无数

【对点演练】

1. ④　[解析] 对于①，共线的三点不能确定一个平面，故①错误；对于②，若两个平面有一个公共点，则这两个平面有一条经过该点的公共直线，该交线上有无数个公共点，故②错误；对于③，三条平行直线可能共面，也可能有一条直线在另外两条平行直线确定的平面外，故③错误；对于④，当三条直线两两相交且三个交点不重合时，三条直线共面，当三条直线两两相交于一个点时，这三条直线可能在同一个平面内，也可能不共面，此时其中任意两条直线都可以确定一个平面，共可以确定3个平面，故④正确．故填④．
2. 直线 CD　[解析] 由题意知，$D\in l$，$l\subset\beta$，所以 $D\in\beta$，又因为 $D\in AB$，所以 $D\in$ 平面 ABC，所以点 D 在平面 ABC 与平面 β 的交线上．又因为 $C\in$ 平面 ABC，$C\in\beta$，所以点 C 在平面 β 与平面 ABC 的交线上，所以平面 $ABC\cap$ 平面 $\beta=CD$．
3. ④　[解析] 依题意，$m\cap\alpha=A$，$n\subset\alpha$，$\therefore m$ 与 n 可能异面、相交(垂直是相交的特例)，m 与 n 一定不平行．故填④．
4. 异面或平行　[解析] 如果两条直线 a 和 b 没有公共点，那么 a 与 b 的位置关系是异面或平行．
5. (1)$AC=BD$　(2)$AC=BD$ 且 $AC\perp BD$
   [解析](1)由题意知，$EF\parallel AC$，$EH\parallel BD$，且 $EF=\frac12AC$，$EH=\frac12BD$，$\because$ 四边形 $EFGH$ 为菱形，$\therefore EF=EH$，$\therefore AC=BD$．
   (2)$\because$ 四边形 $EFGH$ 为正方形，$\therefore EF=EH$ 且 $EF\perp EH$，$\therefore AC=BD$ 且 $AC\perp BD$．

● 课堂考点探究

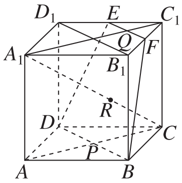
例1　证明：(1)如图，连接 EF，CD_1，A_1B．
由平行六面体的性质得 $A_1B\parallel D_1C$，
$\because E$，F 分别是 AB，AA_1 的中点，
$\therefore EF\parallel BA_1$，
又 $A_1B\parallel D_1C$，$\therefore EF\parallel CD_1$，
$\therefore E$，C，D_1，F 四点共面．



(2)∵$EF\parallel CD_1$，$EF<CD_1$，

∴CE与D_1F必相交，延长CE，D_1F，设交点为P，如图所示．由$P\in CE$，$CE\subset$平面$ABCD$，得$P\in$平面$ABCD$．同理可得$P\in$平面ADD_1A_1．延长DA，∵平面$ABCD\cap$平面$ADD_1A_1=DA$，∴$P\in$直线DA，∴CE，D_1F，DA三线共点．

变式题 证明：(1)如图所示，连接B_1D_1．因为EF是$\triangle C_1D_1B_1$的中位线，所以$EF\parallel B_1D_1$．在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$B_1D_1\parallel BD$，所以$EF\parallel BD$，所以EF，BD确定一个平面，即D，B，F，E四点共面．

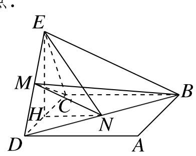


(2)在正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，连接A_1C，设平面ACC_1A_1为α，平面$BDEF$为β．因为$Q\in A_1C_1$，所以$Q\in\alpha$．又$Q\in EF$，所以$Q\in\beta$，所以Q是α与β的公共点，同理，P是α与β的公共点，所以$\alpha\cap\beta=PQ$．又$A_1C\cap\beta=R$，所以$R\in A_1C$，$R\in\alpha$，且$R\in\beta$，则$R\in PQ$，故P，Q，R三点共线．

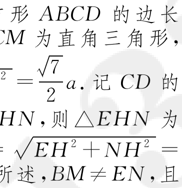
(3)因为$EF\parallel BD$且$EF<BD$，所以DE与BF相交，设交点为M，则由$M\in DE$，$DE\subset$平面D_1DCC_1，得$M\in$平面D_1DCC_1，同理，$M\in$平面B_1BCC_1．又平面$D_1DCC_1\cap$平面$B_1BCC_1=CC_1$，所以$M\in CC_1$，所以DE，BF，CC_1三线交于一点．

例2 (1)B (2)D

[解析](1)连接BD，则N为BD的中点，连接MN，CM，BE．如图所示，在$\triangle EDB$中，M，N分别是ED，BD的中点，所以$MN\parallel BE$，$MN=\frac{1}{2}BE$，则四边形$MNBE$是梯形，BM，EN是梯形的两条对角线，所以直线BM，EN相交．设正方形$ABCD$的边长为a，由题意可得$\triangle BCM$为直角三角形，则$BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$．记$CD$的中点为$H$，连接$EH$，$HN$，则$\triangle EHN$为直角三角形，则$EN=\sqrt{EH^2+NH^2}=a$，故$BM\neq EN$．综上所述，$BM\neq EN$，且直线$BM$，$EN$是相交直线．



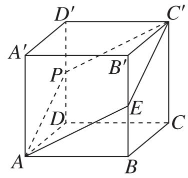
(2)如图，在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中．①若直线AA_1记为直线a，直线BC记为直线b，直线B_1A_1记为直线c，此时a和c相交；②若直线AA_1记为直线a，直线BC记为直线b，直线DD_1记为直线c，此时a和c平行；③若直线AA_1记为直线a，直线BC记为直线b，直线C_1D_1记为直线c，此时a和c异面．故选D．



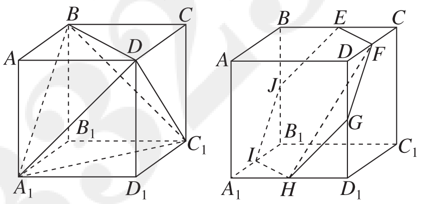
变式题 (1)C (2)CD [解析](1)若$\alpha\cap\beta=a$，因为$m\perp$平面α，$a\subset\alpha$，所以$m\perp a$，同理$n\perp a$，过m上一点作直线n的平行线n_1，则$n_1\perp a$，设由m和n_1确定的平面为γ，则$a\perp\gamma$，而$l\perp m$，$l\perp n$，同上可知$l\perp\gamma$，故$a\parallel l$，选项C正确；有可能$l\subset\alpha$，所以选项A错误；由上可知$a\parallel l$，且$a\subset\beta$，所以$l\parallel\beta$或$l\subset\beta$，选项B错误；$\alpha\perp\beta$不一定成立，选项D错误．故选C．

(2)因为点A在平面CDD_1C_1外，点M在平面CDD_1C_1内，直线CC_1在平面CDD_1C_1内，CC_1不过点M，所以直线AM与CC_1是异面直线，故A错误；取DD_1的中点E，连接AE，则$BN\parallel AE$，但AE与AM相交，所以AM与BN不平行，故B错误；因为点B_1与直线BN都在平面BCC_1B_1内，点M在平面BCC_1B_1外，BN不过点B_1，所以BN与MB_1是异面直线，故C正确；同理D正确．故选CD．

例3 A [解析]取DD'的中点P，连接AP，PC'，由正方体的性质可知$AP\parallel EC'$，$AP=EC'$，可得四边形$APC'E$为平行四边形，又$AP=AE=\sqrt{5}$，则四边形$APC'E$为菱形，所以截面是边长为$\sqrt{5}$的菱形，两对角线长分别为$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{3}$，所以该截面的面积$S=\frac{2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$．故选A．



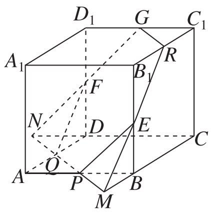
例4 ABD [解析]对于A，正方体内切球的直径为1 m，故A正确；对于B，如图①，在正方体中作出正四面体A_1BDC_1，该正四面体的棱长为$BA_1=\sqrt{2}$ m，而$\sqrt{2}>1.4$，故B正确；对于C，圆柱体的底面直径为0.01 m，可以忽略不计，正方体的体对角线的长为$\sqrt{3}$ m，而$1.8>\sqrt{3}$，故C不正确；对于D，圆柱体的高为0.01 m，可忽略不计，如图②，取E，F，G，H，I，J分别为所在棱的中点，并顺次连接，所得六边形$EFGHIJ$为正六边形，其边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ m，连接FH，易知FH为正六边形$EFGHIJ$的内切圆直径，因为$\angle GFH=\angle GHF=30°$，所以$FH=\sqrt{3}FG=\sqrt{3}GH=\frac{\sqrt{6}}{2}$ m，而$\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}>1.2^2=1.44$，故D正确．故选ABD．



① ②

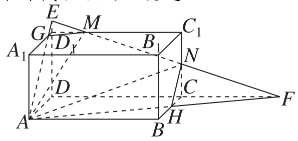
【应用演练】

1. D [解析]如图所示，连接QP并延长，与CB的延长线交于M，且QP的反向延长线与CD的延长线交于N，连接MR，交BB_1于E，连接PE，则PQ，PE，RE为截面与正方体的交线，作$RG\parallel PQ$，交C_1D_1于点G，连接NG，交DD_1于点F，连接QF，则RG，QF，FG为截面与正方体的交线，故截面为六边形$PQFGRE$．

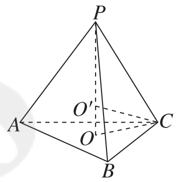


2. D [解析]当该平面过圆柱上、下底面中心时，截面图形为(1)；当不过上、下底面的中心时，截面图形为(5)．所以只有(1)(5)正确．故选D．

3. C [解析]延长MN交DC的延长线于点F，连接AF交BC于点H，连接NH，延长NM交DD_1的延长线于点E，连接AE交A_1D_1于点G，连接GM，则五边形$AHNMG$为平面AMN截该长方体所得的截面图形．不妨设$AB=2AD=2AA_1=4$，又点M是C_1D_1上靠近D_1的四等分点，点N是CC_1的中点，所以$C_1M=3$，$D_1M=1$，$C_1N=NC=1$，所以$CF=3$，又$CF\parallel AB$，所以$\frac{AB}{CF}=\frac{BH}{CH}=\frac{4}{3}$，又$BH+CH=2$，所以$CH=\frac{6}{7}$，又$\frac{D_1M}{DF}=\frac{ED_1}{ED}$，即$\frac{1}{7}=\frac{ED_1}{ED_1+2}$，解得$ED_1=\frac{1}{3}$，又$\frac{GD_1}{AD}=\frac{ED_1}{ED}$，即$\frac{GD_1}{2}=\frac{\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}}$，解得$GD_1=\frac{2}{7}$，符合题意，即五边形$AHNMG$为平面$AMN$截该长方体所得的截面图形．故选C．



4. C [解析]根据题意，当正四面体在正方体的内切球内时，正四面体可以在正方体内任意转动，故当该正四面体内接于球时，其棱长最长．正方体的棱长为6，则其内切球的半径为3，如图，记内接于球的正四面体为$P\text{-}ABC$，设其棱长为a，O为底面ABC的中心，四面体外接球的球心为O'，连接PO，OC，$O'C$，则O'在OP上，$PO\perp$底面ABC，所以$CO=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$PO=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$O'P=O'C=3$，在$\mathrm{Rt}\triangle OO'C$中，$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a-3\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2=9$，可得$a=2\sqrt{6}$，故$m$的最大值为$2\sqrt{6}$．故选C．



第44讲 直线、平面平行的判定与性质

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 平面内 交线
2. 相交直线 相交 交线

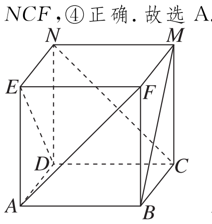
【对点演练】

1. 1 [解析]过点P与直线a作平面β，设$\beta\cap\alpha=b$，则$a\parallel b$，由作图的过程可知满足条件的直线b只有1条．
2. ④ [解析]因为$a\parallel$平面α，所以直线a与平面α无交点，因此直线a和平面α内的任意一条直线都不相交，反之也成立．
3. $\frac{5}{2}$ [解析]因为$\alpha\parallel\beta$，$\triangle PAB$所在的平面与α，β分别交于CD，AB，所以$CD\parallel AB$，所以$\frac{PC}{PA}=\frac{CD}{AB}$，又因为$PC=2$，$CA=3$，$CD=1$，所以$AB=\frac{5}{2}$．
4. ④ [解析]由两个平面平行的判定定理可知，如果一个平面内的两条相交直线分别与另一个平面平行，那么这两个平面平行，故①②不能判断两个平面平行；当平面$\alpha\cap$平面$\beta=$直线l时，α内有无数条与交线l平行的直线与β平行，故③不能判断两个平面平行；根据面面平行的定义可知④能判断两个平面平行．故填④．
5. 平行四边形 [解析]∵平面$ABFE\parallel$平面$DCGH$，平面$EFGH\cap$平面$ABFE=EF$，平面$EFGH\cap$平面$DCGH=HG$，∴$EF\parallel HG$．同理$EH\parallel FG$，∴四边形$EFGH$是平行四边形．

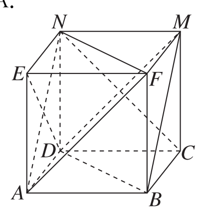
● 课堂考点探究

例1 (1)D (2)A [解析](1)对于选项A，若存在一条直线a，$a\parallel\alpha$，$a\parallel\beta$，则$\alpha\parallel\beta$或α与β相交，故A错误；对于选项B，若存在一条直线a，$a\subset\alpha$，$a\parallel\beta$，则$\alpha\parallel\beta$或α与β相交，故B错误；对于选项C，若存在两条平行直线a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\parallel\beta$，$b\parallel\alpha$，则$\alpha\parallel\beta$或α与β相交，故C错误．故选D．

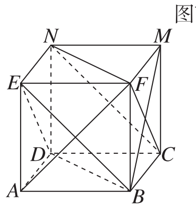
(2)把正方体的平面展开图还原成正方体 $ABCD$-$EFMN$,如图 a 所示. 对于①,平面 $BCMF\parallel$平面 $ADNE$,$BM\subset$平面 $BCMF$,所以 $BM\parallel$平面 $ADNE$,①正确. 对于②,平面 $DCMN\parallel$平面 $ABFE$,$CN\subset$平面 $DCMN$,所以 $CN\parallel$平面 $ABFE$,②正确. 对于③,如图 b 所示,易知 $DN=BF$,$DN\parallel BF$,则四边形 $BDNF$ 为平行四边形,则 $BD\parallel FN$,又 $BD\not\subset$平面 AFN,$FN\subset$平面 AFN,所以 $BD\parallel$平面 AFN;同理可得四边形 $ABMN$ 为平行四边形,则 $BM\parallel AN$,因为 $BM\not\subset$平面 AFN,$AN\subset$平面 AFN,所以 $BM\parallel$平面 AFN,又 $BD\cap BM=B$,$BD,BM\subset$平面 BDM,所以平面 $BDM\parallel$平面 AFN,③正确. 对于④,如图 c 所示,由③知 $BD\parallel FN$,因为 $BD\not\subset$平面 NCF,$FN\subset$平面 NCF,所以 $BD\parallel$平面 NCF;因为 $BC\parallel EN$,$BC=EN$,所以四边形 $BCNE$ 为平行四边形,所以 $BE\parallel CN$,因为 $BE\not\subset$平面 NCF,$CN\subset$平面 NCF,所以 $BE\parallel$平面 NCF. 又因为 $BD\cap BE=B$,且 $BD,BE\subset$平面 BDE,所以平面 $BDE\parallel$平面 NCF,④正确. 故选 A.



图a

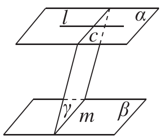


图b

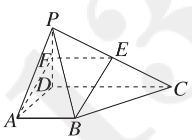


图c

变式题 AB [解析] 对于A,过 m 作平面 γ 与平面 α 交于直线 c,如图,因为 l,m 是异面直线,所以 l,c 相交,又 $m\parallel\alpha$,所以 $m\parallel c$,由 $c\not\subset\beta$,$m\subset\beta$ 得 $c\parallel\beta$,又 $l\parallel\beta$,l,c 是 α 内的两条相交直线,所以 $\alpha\parallel\beta$,A正确;对于B,由线面平行的性质定理,可得 $l\parallel m$,所以B正确;对于C,如果 $\alpha\perp\beta$,$l\perp\alpha$,那么 $l\parallel\beta$ 或 $l\subset\beta$,所以C不正确;对于D,如果 $l\perp m$,$l\perp\alpha$,那么 $m\parallel\alpha$ 或 $m\subset\alpha$,所以D不正确. 故选AB.

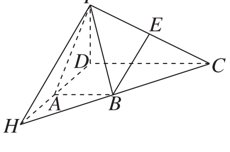


例2 证明:方法一:如图,取 PD 的中点 F,连接 EF,FA. 由题意知 EF 为△PDC 的中位线,∴$EF\parallel CD$,且 $EF=\frac{1}{2}CD=2$. 又

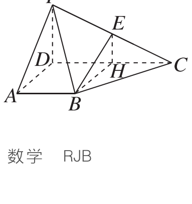


∵$AB\parallel CD$,$AB=2$,∴$AB\underline{\parallel}EF$,∴四边形 $ABEF$ 为平行四边形,∴$BE\parallel AF$. 又 $AF\subset$平面 PAD,$BE\not\subset$平面 PAD,∴$BE\parallel$平面 PAD.

方法二:如图,延长 DA,CB 相交于 H,连接 PH. ∵ $AB\parallel CD$,$AB=2$,$CD=4$,∴$\frac{HB}{HC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{2}$,即 B 为 HC 的中点,又 E 为 PC 的中点,∴$BE\parallel PH$,又 $BE\not\subset$平面 PAD,$PH\subset$平面 PAD,∴$BE\parallel$平面 PAD.

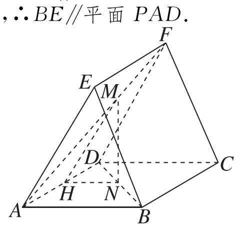


方法三:如图,取 CD 的中点 H,连接 BH,HE. ∵E 为 PC 的中点,∴$EH\parallel PD$,又 $EH\not\subset$平面 PAD,



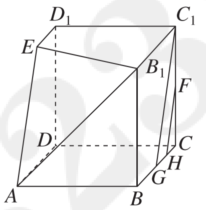
$PD\subset$平面 PAD,∴$EH\parallel$平面 PAD.
由题意知 $AB\underline{\parallel}DH$,∴四边形 $ABHD$ 为平行四边形,∴$BH\parallel AD$,又 $AD\subset$平面 PAD,$BH\not\subset$平面 PAD,∴$BH\parallel$平面 PAD. 又 $BH\cap EH=H$,$BH,EH\subset$平面 BHE,∴平面 $BHE\parallel$平面 PAD,又 $BE\subset$平面 BHE,∴$BE\parallel$平面 PAD.

变式题 证明:在 AD 上取一点 H,使得 $\frac{AH}{AD}=\frac{AM}{AF}=\frac{BN}{BD}=\lambda$ $(0<\lambda<1)$,连接 HM,HN,如图.



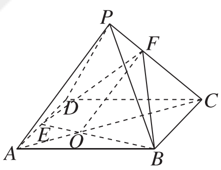
因为 $\frac{AH}{AD}=\frac{AM}{AF}$,所以 $HM\parallel DF$. 因为 $DF\subset$平面 CDF,$HM\not\subset$平面 CDF,所以 $HM\parallel$平面 CDF. 因为 $\frac{AH}{AD}=\frac{BN}{BD}$,所以 $HN\parallel AB$,又 $CD\parallel AB$,所以 $HN\parallel CD$. 因为 $CD\subset$平面 CDF,$HN\not\subset$平面 CDF,所以 $HN\parallel$平面 CDF. 因为 $HM\cap HN=H$,且 $HM\subset$平面 HMN,$HN\subset$平面 HMN,所以平面 $HMN\parallel$平面 CDF. 因为 $MN\subset$平面 HMN,所以 $MN\parallel$平面 CDF.

例3 证明:设平面 BCC_1B_1 与平面 AEB_1 的交线为 l,因为 $FH\parallel$平面 AEB_1,平面 $BCC_1B_1\cap$平面 $AEB_1=l$,$FH\subset$平面 BCC_1B_1,所以 $FH\parallel l$.
因为平面 $ADD_1E\parallel$平面 BCC_1B_1,平面 $ADD_1E\cap$平面 $AEB_1=AE$,平面 $BCC_1B_1\cap$平面 $AEB_1=l$,所以 $AE\parallel l$,所以 $AE\parallel FH$. 取 BC 的中点 G,连接 C_1G,易知 $AE\parallel GC_1$,所以 $GC_1\parallel FH$,又 H 为 CG 的中点,所以 F 为 CC_1 的中点.

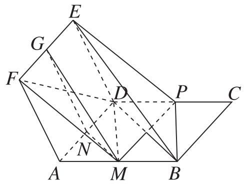


变式题 $\frac{1}{2}$

[解析] 如图,连接 AC 交 BE 于点 O,连接 OF. 因为 $AD\parallel BC$,E 为 AD 的中点,所以 $\frac{AO}{OC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$,又因为 $PA\parallel$平面 EBF,平面 $EBF\cap$平面 $PAC=OF$,$PA\subset$平面 PAC,所以 $PA\parallel OF$,所以 $\frac{PF}{FC}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{2}$.



例4 证明:(1)如图,取 DC 的中点 P,连接 PE,PB,PM. 因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形,M 是 AB 的中点,

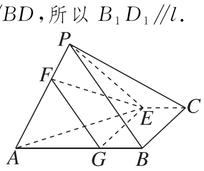


所以 $DP\parallel MB$ 且 $DP=MB$,所以四边形 $MBPD$ 为平行四边形,所以 $PB\parallel DM$. 又 $PB\subset$平面 BPE,$DM\not\subset$平面 BPE,所以 $DM\parallel$平面 BPE. 因为 $PM\parallel AD$ 且 $PM=AD$,$AD\parallel FE$ 且 $AD=FE$,所以 $PM\parallel FE$ 且 $PM=FE$,所以四边形 $FEPM$ 为平行四边形,所以 $FM\parallel PE$,又 $FM\not\subset$平面 BPE,$PE\subset$平面 BPE,所以 $FM\parallel$平面 BPE. 因为 $FM\cap DM=M$,$FM,DM\subset$平面 DMF,所以平面 $DMF\parallel$平面 BPE. 因为 $BE\subset$平面 BPE,所以 $BE\parallel$平面 DMF.
(2)因为 M,N 分别是 AB,AD 的中点,所以 $MN\parallel BD$,又 $MN\not\subset$平面 BDE,$BD\subset$平面 BDE,所以 $MN\parallel$平面 BDE. 同理可证 $GN\parallel$平面 BDE. 又 $MN\cap GN=N$,$MN,GN\subset$平面 MNG,所以平面 $BDE\parallel$平面 MNG.

变式题 解:(1)证明:因为 $AB\parallel DC$,$DC\subset$平面 DCC_1D_1,$AB\not\subset$平面 DCC_1D_1,所以 $AB\parallel$平面 DCC_1D_1. 在直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1\parallel DD_1$,
又因为 $DD_1\subset$平面 DCC_1D_1,$AA_1\not\subset$平面 DCC_1D_1,所以 $AA_1\parallel$平面 DCC_1D_1.
因为 $AB\cap AA_1=A$,$AB,AA_1\subset$平面 ABB_1A_1,所以平面 $ABB_1A_1\parallel$平面 DCC_1D_1. 因为 $A_1B\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $A_1B\parallel$平面 DCC_1D_1.
(2)设直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h,在直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1\perp$平面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $AA_1\perp AB$,同理可得,$CC_1\perp BC$.
连接 AC,因为 $AB\parallel DC$,$AB\perp AD$,$AB=2$,$AD=3$,$DC=4$,所以 $AC=5$,$BC=\sqrt{13}$. 因为 $AA_1=CC_1=h$,所以 $BA_1=\sqrt{h^2+4}$,$BC_1=\sqrt{h^2+13}$. 在直四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,$AA_1\parallel CC_1$,$AA_1=CC_1$,所以四边形 ACC_1A_1 是平行四边形,所以 $A_1C_1=AC=5$. 因为 $BA_1=\sqrt{h^2+4}<BC_1=\sqrt{h^2+13}$,△$A_1BC_1$ 为直角三角形,所以 $(\sqrt{h^2+4})^2+(\sqrt{h^2+13})^2=5^2$ 或 $(\sqrt{h^2+4})^2+5^2=(\sqrt{h^2+13})^2$,可得 $h=2$.
因为直四棱柱的底面积 $S=\frac{(2+4)\times3}{2}=9$,所以直四棱柱的体积为 $9\times2=18$.

例5 证明:(1)由题知 $BB_1\parallel DD_1$ 且 $BB_1=DD_1$,所以四边形 BB_1D_1D 是平行四边形,所以 $BD\parallel B_1D_1$. 又 $BD\not\subset$平面 CD_1B_1,$B_1D_1\subset$平面 CD_1B_1,所以 $BD\parallel$平面 CD_1B_1. 因为 $A_1D_1\parallel B_1C_1\parallel BC$,且 $A_1D_1=B_1C_1=BC$,所以四边形 A_1BCD_1 是平行四边形,所以 $A_1B\parallel D_1C$. 又 $A_1B\not\subset$平面 CD_1B_1,$D_1C\subset$平面 CD_1B_1,所以 $A_1B\parallel$平面 CD_1B_1. 因为 $BD\cap A_1B=B$,所以平面 $A_1BD\parallel$平面 CD_1B_1.
(2)由(1)知,平面 $A_1BD\parallel$平面 CD_1B_1,又平面 $ABCD\cap$平面 $B_1D_1C=l$,平面 $ABCD\cap$平面 $A_1BD=BD$,所以直线 $l\parallel$直线 BD,又 $B_1D_1\parallel BD$,所以 $B_1D_1\parallel l$.

变式题 解:点 F 为 AP 上靠近点 P 的三等分点,证明如下:在 AB 上取点 G,使得 $BG=CE=\frac{\sqrt{2}}{2}$,连接 FG,GE,



如图. 因为 $BG\parallel CE$,$BG=CE$,所以四边形 $BGEC$ 为平行四边形,所以 $BC\parallel GE$,又 $GE\not\subset$平面 PBC,$BC\subset$平面 PBC,所以 $GE\parallel$平面 PBC. 因为 $EF\parallel$平面 PBC,$EF\cap GE=E$,$EF,GE\subset$平面 EFG,所以平面 $PBC\parallel$平面 EFG,又平面 $EFG\cap$平面 $PAB=FG$,平面 $PBC\cap$平面 $PAB=PB$,所以 $FG\parallel PB$,所以在△PAB 中,$\frac{AF}{FP}=\frac{AG}{GB}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$,所以 $FP=\frac{1}{3}AP$,所以点 F 为 AP 上靠近点 P 的三等分点.

第 45 讲 直线、平面垂直的判定与性质

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

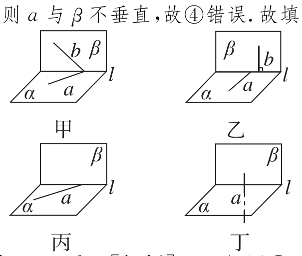
1. (1)任意 $l\perp m$ (2)两条相交直线 $m\subset\alpha$ $n\subset\alpha$ $m\cap n=P$ $l\perp m$ $l\perp n$ 同一个平面
2. (2)垂线 $a\subset\alpha$ $a\perp\beta$ 交线 垂直 $\alpha\perp\beta$ $\alpha\cap\beta=a$ $l\perp a$ $l\subset\beta$

【对点演练】

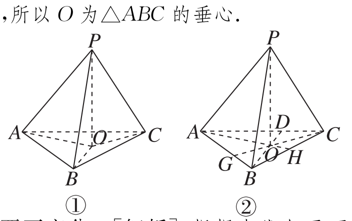
1. 4 3 [解析] 由 $PD\perp$平面 $ABCD$,得

平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PDB\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$.因为 $AC\perp BD$,$AC\perp PD$,$BD\cap PD=D$,所以 $AC\perp$ 平面 PDB,所以平面 $PAC\perp$ 平面 PDB,故互相垂直的平面有 4 对.与 AC 垂直的直线有 PD,BD,PB,共 3 条.

2. ② [解析] 在①中,如图甲,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,且 a,b 与 l 都不垂直,则 a,b 不一定垂直,故①错误;在②中,如图乙,$a\subset\alpha$,$b\subset\beta$,$b\perp l$,则 $b\perp\alpha$,所以 β 内所有与 b 平行的直线都与 a 垂直,故②正确;在③中,如图丙,$a\subset\alpha$,但 a 与 l 不垂直,则 a 与 β 不垂直,故③错误;在④中,如图丁,若 a 不在 α 内,则 a 与 β 不垂直,故④错误.故填②.



3. (1)外 (2)垂 [解析] (1)如图①,连接 OA,OB,OC,在 $\mathrm{Rt}\triangle POA$,$\mathrm{Rt}\triangle POB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle POC$ 中,$PA=PB=PC$,所以 $OA=OB=OC$,即 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.
(2)如图②,延长 AO,BO,CO,分别交 BC,AC,AB 于点 H,D,G.因为 $PC\perp PA$,$PB\perp PC$,$PA\cap PB=P$,PA,$PB\subset$ 平面 PAB,所以 $PC\perp$ 平面 PAB,又 $AB\subset$ 平面 PAB,所以 $PC\perp AB$,因为 $AB\perp PO$,$PO\cap PC=P$,PO,$PC\subset$ 平面 POC,所以 $AB\perp$ 平面 POC,又 $CG\subset$ 平面 POC,所以 $AB\perp CG$,即 CG 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高.同理可得 BD,AH 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AC,BC 上的高,所以 O 为 $\triangle ABC$ 的垂心.



4. 必要不充分 [解析] 根据直线与平面垂直的定义知,"直线 a 与平面 α 内的无数条直线都垂直"不能推出"直线 a 与平面 α 垂直",反之则可以,所以应填必要不充分.

5. ②③ [解析] 在①中,若 $\alpha\parallel\beta$,$n\subset\alpha$,$m\subset\beta$,则 m 与 n 平行或异面,故①错误;在②中,若 $m\perp\alpha$,$m\perp\beta$,则 $\alpha\parallel\beta$,又 $n\perp\alpha$,所以 $n\perp\beta$,故②正确;在③中,若 $m\perp n$,$m\perp\alpha$,则 $n\parallel\alpha$ 或 $n\subset\alpha$,又 $n\perp\beta$,所以 $\alpha\perp\beta$,故③正确;在④中,若 $m\parallel\alpha$,$n\parallel\beta$,$\alpha\perp\beta$,则 m 与 n 平行、相交或异面,故④错误;在⑤中,若 $\alpha\perp\beta$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,则 m,n 平行、相交或异面,所以⑤错误.故填②③.

6. 5 [解析] 由底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形,$PA=a$,$PB=PD=\sqrt{2}a$,得 $PA\perp AB$,$PA\perp AD$,又 $AB\cap AD=A$,所以 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,由 $PA\subset$ 平面 PAB,$PA\subset$ 平面 PAD,可得平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.又 $AB\perp AD$,$PA\cap AD=A$,所以 $AB\perp$ 平面 PAD,又 $AB\subset$ 平面 PAB,所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAD.由 $BC\perp AB$,$BC\perp PA$,$AB\cap PA=A$,得 $BC\perp$ 平面 PAB,又 $BC\subset$ 平面 PBC,所以平面 $PAB\perp$ 平面 PBC.由 $CD\parallel AB$,得 $CD\perp$ 平面 PAD,又 $CD\subset$ 平面 PDC,所以平面 $PAD\perp$ 平面 PDC.故共有 5 对互相垂直的面.

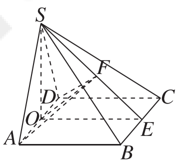
7. 一定 [解析] 因为 $PA=PB=PC$,所以点 P 在平面 ABC 内的射影 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,因为 $\angle BAC=90°$,所以 O 为 BC 的中点,所以 PO 在平面 PBC 内,所以平面 $PBC\perp$ 平面 ABC.

● **课堂考点探究**

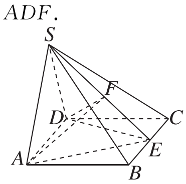
例 1 (1)C (2)B [解析] (1)若 $m\perp n$,$n\perp l$,则 $m\parallel l$ 或 m,l 相交或 m,l 异面,所以 A 为假命题;若 $\alpha\perp\beta$,$\beta\perp\gamma$,则 $\alpha\parallel\gamma$ 或 α,γ 相交,所以 B 为假命题;若 $m\perp\alpha$,$m\parallel n$,则 $n\perp\alpha$,又 $n\parallel\beta$,则 $\alpha\perp\beta$,所以 C 为真命题;若 $m\parallel n$,$m\parallel\alpha$,则 $n\subset\alpha$ 或 $n\parallel\alpha$,所以 D 为假命题.故选 C.
(2)∵$PA\perp$ 平面 ABC,$PA\subset$ 平面 PAC,∴平面 $ABC\perp$ 平面 PAC,故 D 中说法正确.∵$BC\subset$ 平面 ABC,∴$PA\perp BC$,又 $AB\perp BC$,$PA\cap AB=A$,∴$BC\perp$ 平面 PAB,又 $BC\subset$ 平面 PBC,∴平面 $PBC\perp$ 平面 PAB,故 C 中说法正确.∵$AN\subset$ 平面 PAB,∴$BC\perp AN$,∵$AN\perp PB$,$BC\cap PB=B$,∴$AN\perp$ 平面 PBC,又 $AN\subset$ 平面 ANS,∴平面 $ANS\perp$ 平面 PBC,故 A 中说法正确.对于 B,假设平面 $ANS\perp$ 平面 PAB,∵$AN\perp$ 平面 PBC,$NS\subset$ 平面 PBC,∴$AN\perp NS$,∵平面 $PAB\perp$ 平面 ANS,平面 $PAB\cap$ 平面 $ANS=AN$,∴$NS\perp$ 平面 PAB,∴$NS\perp PB$,∵$AN\perp PB$,$AN\cap NS=N$,∴$PB\perp$ 平面 ANS,又 $AS\subset$ 平面 ANS,∴$PB\perp AS$,∵$AS\perp PC$,$PB\cap PC=P$,∴$AS\perp$ 平面 PBC,与 $AN\perp$ 平面 PBC 矛盾,故 B 中说法不正确.故选 B.

变式题 (1)C (2)BC [解析] (1)对于选项 A,若 $l\parallel\alpha$,且 $m\parallel\alpha$,则 l,m 可能平行、相交或异面,不一定垂直,故 A 错误;对于选项 B,若 $\alpha\perp\beta$,$m\parallel\alpha$,$n\perp\beta$,则 m,n 可能平行、相交或异面,不一定平行,故 B 错误;对于选项 C,若 $m\parallel l$,且 $m\perp\alpha$,则 $l\perp\alpha$,故 C 正确;对于选项 D,若 $m\perp n$,$m\perp\alpha$,$n\parallel\beta$,则 α 与 β 相交或平行,不一定垂直,故 D 错误.故选 C.
(2)折叠前后得到 $AH\perp HE$,$AH\perp HF$ 不变,又 $EH\cap FH=H$,所以根据线面垂直的判定定理,可得 $AH\perp$ 平面 EFH,故 B 正确;过点 A 只有一条直线与平面 EFH 垂直,且 $AH\perp$ 平面 EFH,点 G 与 H 不重合,故 A 不正确;$AG\perp EF$,$EF\perp HG$,又 $AG\cap HG=G$,所以根据线面垂直的判定定理,可得 $EF\perp$ 平面 AGH,故 C 正确;因为 HG 与 AG 不垂直,所以 HG 与平面 AEF 不垂直,故 D 不正确.故选 BC.

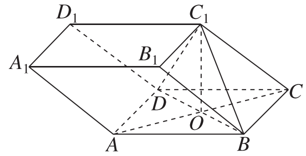
例 2 证明:方法一:取 AD 的中点 O,连接 SO,OE,OF,如图.因为四边形 $ABCD$ 是矩形,O,E 分别是 AD,BC 的中点,所以 $EO\mathrel{\underline{\parallel}}AB$,所以 $EO\perp AD$.因为 $\triangle SAD$ 是等边三角形,所以 $SO\perp AD$.因为 $SO\cap OE=O$,所以 $AD\perp$ 平面 SOE.因为 $SE\subset$ 平面 SOE,所以 $AD\perp SE$.因为 $\sqrt{3}SA=2AB$,所以 $OS=SA\sin\angle SAD=\frac{\sqrt{3}}{2}SA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}AB=AB=OE$,所以 $\triangle SOE$ 是等腰三角形.因为 F 是 SE 的中点,所以 $OF\perp SE$.因为 $OF\cap AD=O$,OF,$AD\subset$ 平面 ADF,所以 $SE\perp$ 平面 ADF.



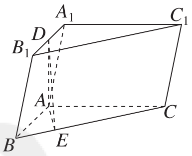
方法二:不妨设 $AB=\sqrt{3}$,则 $SA=AD=SD=2$.如图,连接 AE,DE,因为 E 为 BC 的中点,所以 $AE=DE=2$,所以 $SD=DE$,$SA=AE$.又 F 为 SE 的中点,所以 $DF\perp SE$,$AF\perp SE$.因为 $DF\cap AF=F$,DF,$AF\subset$ 平面 ADF,所以 $SE\perp$ 平面 ADF.



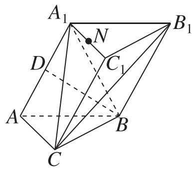
变式题 证明:∵底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,∴$CO=\sqrt{2}$,$CD=CB$.平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$C_1C=A_1A=2$.在 $\triangle C_1OC$ 中,$\angle C_1CO=45°$,$C_1C=2$,$CO=\sqrt{2}$,由余弦定理得 $\cos\angle C_1CO=\frac{C_1C^2+CO^2-C_1O^2}{2\cdot C_1C\cdot CO}=\frac{2^2+2-C_1O^2}{2\times2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,可得 $C_1O=\sqrt{2}$,∴$C_1O^2+CO^2=CC_1^2$,∴$C_1O\perp CO$.如图,连接 C_1D,C_1B,在 $\triangle C_1CD$ 与 $\triangle C_1CB$ 中,∵$CD=CB$,$\angle C_1CD=\angle C_1CB$,$C_1C=C_1C$,∴$\triangle C_1CD\cong\triangle C_1CB$,∴$C_1B=C_1D$,即 $\triangle BC_1D$ 为等腰三角形,又 O 为 BD 的中点,∴$C_1O\perp BD$.
∵$CO\subset$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,$CO\cap BD=O$,∴$C_1O\perp$ 平面 $ABCD$.



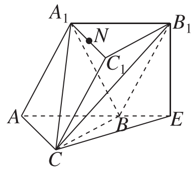
例 3 证明:连接 DA,EA,如图,$DA_1=1$,$AA_1=2$,$\angle DA_1A=60°$,由余弦定理可得 $DA=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos60°}=\sqrt{3}$,满足 $DA^2+DA_1^2=AA_1^2$,所以 $DA\perp DA_1$,即 $DA\perp AB$.因为平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC,且交线为 AB,$DA\perp AB$,$DA\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $DA\perp$ 平面 ABC.又 BC,$AC\subset$ 平面 ABC,所以 $DA\perp BC$,$DA\perp AC$.因为 $DE\perp BC$,$DA\cap DE=D$,且 DA,$DE\subset$ 平面 DAE,所以 $BC\perp$ 平面 DAE.又 $AE\subset$ 平面 DAE,所以 $BC\perp AE$.设 $BE=t$,$CE=3t$,则 $BA^2-t^2=AC^2-(3t)^2$,可得 $t=1$,即 $BE=1$,所以 $BC=4$,满足 $BA^2+AC^2=BC^2$,即 $AC\perp AB$.又因为 $DA\perp AC$,$DA\cap AB=A$,且 DA,$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1.因为 $BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $AC\perp BB_1$.



变式题 解:(1)证明:取棱 A_1A 的中点 D,连接 BD,如图,因为 $AB=A_1B$,所以 $BD\perp AA_1$.在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中,$AA_1\parallel BB_1$,所以 $BD\perp BB_1$,所以 $BD=\sqrt{3}$.
因为 $AB=2$,所以 $AD=1$,$AA_1=2$.
因为 $AC=2$,$A_1C=2\sqrt{2}$,所以 $AC^2+AA_1^2=A_1C^2$,所以 $AC\perp AA_1$,同理 $AC\perp AB$.因为 $AA_1\cap AB=A$,且 AA_1,$AB\subset$ 平面 A_1ABB_1,所以 $AC\perp$ 平面 A_1ABB_1.因为 $AC\subset$ 平面 ABC,所以平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC.

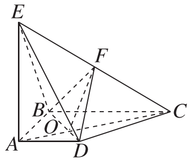


(2)过 B_1 作 $B_1E\perp AB$,垂足为 E,连接 CE,如图,由(1)可知平面 $A_1ABB_1\perp$ 平面 ABC,且平面 $A_1ABB_1\cap$ 平面 $ABC=AB$,所以 $B_1E\perp$ 平面 ABC,因为 $CE\subset$ 平面 ABC,所以 $B_1E\perp CE$.
由(1)可知,$\triangle ABA_1$ 是等边三角形,可得 $B_1E=\sqrt{3}$,$CE=\sqrt{13}$,$B_1C=4$.
在 $\triangle A_1CB_1$ 中,$A_1C=2\sqrt{2}$,$A_1B_1=2$,$B_1C=4$,由余弦定理得 $\cos\angle B_1A_1C=\frac{2^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times2\times2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$,则 $\sin\angle B_1A_1C=\frac{\sqrt{14}}{4}$,可得 $\triangle A_1B_1C$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\sqrt{7}$.$V_{C_1\text{-}A_1B_1C}=V_{C\text{-}A_1C_1B_1}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,设点 N 到平



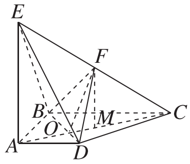
面 A_1B_1C 的距离为 h，则 $V_{C_1\text{-}A_1B_1C}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1C}\cdot 2h$，可得 $h=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

例 4 解：(1)证明：设 AC 与 BD 的交点为 O，连接 OF，如图，因为 $AD/\!/BC$，且 $AB\perp AD$，所以 $AB\perp BC$.



因为 $2AD=2$，所以 $AD=1$，又 $AB=\sqrt{2}$，$AB\perp AD$，且 $BC=2$，$AB\perp BC$，所以 $\triangle ABD\backsim\triangle BCA$，所以 $\angle ABD=\angle BCA$，所以 $\angle BAC+\angle ABD=\angle BAC+\angle BCA$.
因为 $AB\perp BC$，所以 $\angle BAC+\angle BCA=90°$，所以 $\angle BAC+\angle ABD=90°$，即 $\angle BAO+\angle ABO=90°$，所以 $\angle AOB=90°$，所以 $AO\perp OB$，即 $AC\perp BD$. 因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EA\perp BD$. 因为 $EA\cap AC=A$，EA，$AC\subset$ 平面 EAC，所以 $BD\perp$ 平面 EAC，又因为平面 $\alpha\perp BD$，且 $B\notin$ 平面 EAC，所以平面 $\alpha/\!/$ 平面 EAC.

(2)如图，取 AC 的中点 M，连接 FM，因为 F 为棱 EC 的中点，所以 $FM=\frac{EA}{2}=1$，且 $FM/\!/EA$，又因为 $EA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $FM\perp$ 平面 $ABCD$.



因为 $OM\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FM\perp OM$.
因为 $AB\perp AD$，$AB\perp BC$，所以 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6}$. 易知 $\triangle OBC\backsim\triangle ODA$，所以 $\frac{OA}{OC}=\frac{DA}{BC}=\frac{1}{2}$，所以 $OA=\frac{OC}{2}$，即 $OA=\frac{AC}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 又 $AM=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $OM=AM-OA=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 因为 $FM=1$，且 $FM\perp OM$，所以 $OF=\sqrt{1+\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{7}{6}}$. 因为 $BD\perp$ 平面 EAC，$OF\subset$ 平面 EAC，所以 $BD\perp OF$，所以 $S_{\triangle FBD}=\frac{1}{2}\times BD\times OF=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{7}{6}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$. 因为 $AD=1$，$AB=\sqrt{2}$，且 $AB\perp AD$，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 设 h 为 A 到平面 BFD 的距离，因为 $V_{A\text{-}BFD}=V_{F\text{-}ABD}$，所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle BFD}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot FM$，即 $\frac{\sqrt{14}}{4}\times h=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1$，解得 $h=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. 记直线 AD 与平面 FBD 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{AD}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以直线 AD 与平面 FBD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

变式题 证明：(1)记 AF，CD 的中点分别为 I，J，连接 GI，IJ，JH，因为 $AG=GF=\sqrt{21}$，$AF=6$，所以 $GI\perp AF$，且 $GI=\sqrt{21-9}=2\sqrt{3}$. 因为平面 $AGF\perp$ 平面 $ABCDEF$，平面 $AGF\cap$ 平面 $ABCDEF=AF$，$GI\perp AF$，所以 $GI\perp$ 平面 $ABCDEF$.
因为平面 $AGF/\!/$ 平面 HCD，所以平面 $HCD\perp$ 平面 $ABCDEF$，同理可得 $HJ\perp$ 平面 $ABCDEF$，$HJ=2\sqrt{3}$，所以 $GI/\!/HJ$，且 $GI=HJ$，所以四边形 $GIJH$ 为平行四边形，所以 $GH/\!/IJ$. 因为 $GH\not\subset$ 平面 $ABCDEF$，$IJ\subset$ 平面 $ABCDEF$，所以 $GH/\!/$ 平面 $ABCDEF$.
(2)由正六边形的性质可知，$IJ\perp AF$，又平面 $AGF\perp$ 平面 $ABCDEF$，平面 $AGF\cap$ 平面 $ABCDEF=AF$，所以 $IJ\perp$ 平面 AGF，因为 $GH/\!/IJ$，所以 $GH\perp$ 平面 AGF.

第 46 讲　空间向量及其运算和空间位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 大小　方向　相同　相等　相等　相反　相反或者相同　同一平面内
2. (3) $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$
3. (1) $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　(3) $\boldsymbol{a}^2$
4. $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
$(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
$a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$
$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

【对点演练】

1. 1　[解析] ∵ $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面，∴①②④不正确.
2. $-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　[解析] $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.
3. 10　[解析] ∵ $l_1\perp l_2$，∴ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6-4+m=0$，解得 $m=10$.
4. ④　[解析] 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 所在的直线可能平行也可能重合，故①为假命题；三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中任意两个一定共面，但它们三个却不一定共面，故②为假命题；只有当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面时，空间任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 才一定能表示为 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，故③为假命题；根据向量的运算法则可知④为真命题. 故填④.
5. 17 或 -1　[解析] ∵ $\boldsymbol{a}=(-1,\lambda,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,1)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，∴ $\cos 120°=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-2-\lambda-2}{\sqrt{5+\lambda^2}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$，解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=17$.

● 课堂考点探究

例 1 $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　[解析] 因为 $\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}=\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{GD}=\frac{1}{2}$，所以 $EH/\!/BD$，且 $EH=\frac{1}{3}BD$，$FG/\!/BD$，且 $FG=\frac{1}{3}BD$，所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形，所以 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

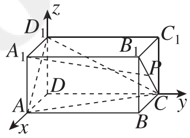
变式题 D　[解析] $\overrightarrow{B_1M}=\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{A_1D_1}\right)=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\left(-\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}\right)=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 故选 D.

例 2 解：(1)在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}$，因为 $k=\frac{3}{4}$，所以 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1F}-\overrightarrow{D_1E}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1}+\frac{3}{4}\overrightarrow{D_1B}-\frac{3}{4}\overrightarrow{D_1A}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD_1}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

(2)证明：连接 AC，EG，设 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$（$\lambda$，$\mu$ 不为 0），则 $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{D_1G}-\overrightarrow{D_1E}=k\overrightarrow{D_1C}-k\overrightarrow{D_1A}=k\overrightarrow{AC}=k(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD})=k\lambda\overrightarrow{AB}+k\mu\overrightarrow{AD}=k\lambda(\overrightarrow{D_1B}-\overrightarrow{D_1A})+k\mu(\overrightarrow{D_1D}-\overrightarrow{D_1A})=\lambda(\overrightarrow{D_1F}-\overrightarrow{D_1E})+\mu(\overrightarrow{D_1H}-\overrightarrow{D_1E})=\lambda\overrightarrow{EF}+\mu\overrightarrow{EH}$，则 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$，$\overrightarrow{EH}$ 共面且有公共点 E，则 E，F，G，H 四点共面.

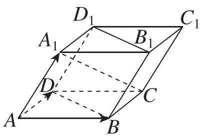
变式题 (1)D　(2) $\frac{2}{5}$　[解析] (1)由题可知 O，A，B，C 四点不共面，所以由 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$ 共面，得 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{7}{12}$. 故选 D.
(2) ∵ $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，∴ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=5\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，又 ∵ A，C，D 三点共线，∴ $\overrightarrow{AC}/\!/\overrightarrow{CD}$，∵ $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，∴ $\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{CD}$，∴ $2-5k=0$，∴ $k=\frac{2}{5}$.

例 3 解：(1)以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



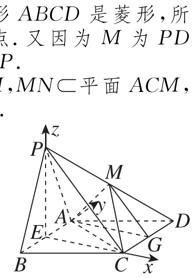
则 $A_1(3,0,2)$，$A(3,0,0)$，$B_1(3,4,2)$，$C(0,4,0)$，$D_1(0,0,2)$. 设 P 为线段 B_1C 的中点，则 $P\left(\frac{3}{2},4,1\right)$，设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{AC}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-3,0,2)$，得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-3x+4y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-3x+2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $x=\frac{4}{3}$，$z=2$，则 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{4}{3},1,2\right)$. $\overrightarrow{A_1P}=\left(-\frac{3}{2},4,-1\right)$，因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1\times 4+2\times(-1)=0$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1P}$，又 $A_1P\not\subset$ 平面 ACD_1，所以线段 B_1C 上存在中点 P，使得 $A_1P/\!/$ 平面 ACD_1.

(2)证明：设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底，则 $\overrightarrow{A_1C}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BB_1}=\boldsymbol{c}$.

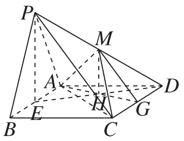


因为 $AB=AD=AA_1=1$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60°$，所以 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}$.
因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$，
$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$，$BD\cap BB_1=B$，所以 $\overrightarrow{A_1C}$ 是平面 BDD_1B_1 的一个法向量，
所以直线 $A_1C\perp$ 平面 BDD_1B_1.

变式题 解：(1)证明：连接 BD，交 AC 于 N，连接 MN，因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以点 N 为 BD 的中点. 又因为 M 为 PD 的中点，所以 $MN/\!/BP$.
因为 $BP\not\subset$ 平面 ACM，$MN\subset$ 平面 ACM，所以 $BP/\!/$ 平面 ACM.
(2)方法一：设底面边长为 2，E 为 AB 的中点，连接 EC，由于四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle ABC=60°$，



所以 $BE=1,BC=2,EC=\sqrt{BE^2+BC^2-2BE\cdot BC\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{3}$，所以 $BC^2=BE^2+EC^2$，即 $EC\perp AB$.
连接 PE，因为三角形 PAB 为正三角形，E 为 AB 的中点，所以 $PE\perp AB$.
又侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，$PE\subset$平面 PAB，所以 $PE\perp$平面 $ABCD$. 如图，以 E 为原点，$\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EP}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $A(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(\sqrt{3},2,0)$，$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 假设存在点 G 满足题意，设 $\frac{CG}{CD}=\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CD}=(0,2\lambda,0)$，则 $G(\sqrt{3},2\lambda,0)$，$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AG}=(\sqrt{3},2\lambda-1,0)$. 设平面 GAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+z=0,\\ \sqrt{3}x+(2\lambda-1)y=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $x=\frac{1-2\lambda}{\sqrt{3}}$，$z=\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1-2\lambda}{\sqrt{3}},1,\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}\right)$. 易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.
由题可知 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=0$，即 $\left|\frac{2\lambda-1}{\sqrt{3}}\right|=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，满足题意. 故在棱 CD 上存在点 G，使得平面 $GAM\perp$平面 $ABCD$，此时 $\frac{CG}{CD}=\frac{1}{2}$.
方法二：设 E 为 AB 的中点，连接 PE，因为 $\triangle PAB$ 为正三角形，E 是 AB 的中点，所以 $PE\perp AB$，



又侧面 $PAB\perp$底面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，$PE\subset$平面 PAB，所以 $PE\perp$平面 $ABCD$. 连接 DE，取 DE 的中点 H，连接 MH，如图，则 MH 是 $\triangle PDE$ 的中位线，所以 $MH\parallel PE$，又 $PE\perp$平面 $ABCD$，所以 $MH\perp$平面 $ABCD$. 连接 AH 并延长，交 CD 于 G，连接 MG，则平面 $AMG\perp$平面 $ABCD$. 因为 $AE\parallel GD$，所以 $\angle HAE=\angle HGD$，$\angle HEA=\angle HDG$，又因为 $EH=HD$，所以 $\triangle AEH\cong\triangle GDH$，则 $AE=GD=\frac{1}{2}CD$，故在棱 CD 上存在点 G，使得平面 $GAM\perp$平面 $ABCD$，此时 $\frac{CG}{CD}=\frac{1}{2}$.

第 47 讲　空间角

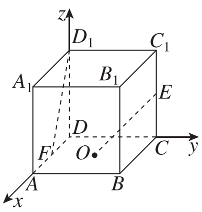
● 课前基础巩固

【知识聚焦】

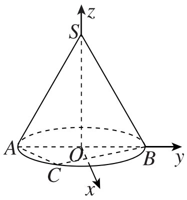
1. (1)平行或重合　(2)$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$
2. (1)射线　90°　0°　(2)$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
3. (1)两个半平面　(2)垂直于棱　(3)$[0,\pi]$　(4)②不大于 90°

【对点演练】

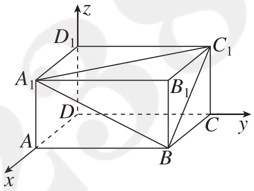
1. $\frac{2\sqrt{30}}{15}$　[解析] 设直线 a 与平面 α 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$.
2. 45°　[解析] ∵ $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴$\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=45°$，故这两个平面所成的角为 45°.
3. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　[解析] 以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(1,1,0)$，$E(0,2,1)$，$F(1,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，∴$\overrightarrow{FD_1}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{OE}=(-1,1,1)$，∴$\cos\langle\overrightarrow{FD_1},\overrightarrow{OE}\rangle=\frac{\overrightarrow{FD_1}\cdot\overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{FD_1}||\overrightarrow{OE}|}=\frac{1+0+2}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，故异面直线 OE 与 FD_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.



4. 30°　[解析] 设 l 与 α 所成的角为 θ，∵$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=-\frac{1}{2}$，∴$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{1}{2}$，又 $0°\leqslant\theta\leqslant 90°$，∴$\theta=30°$.
5. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　[解析] 以 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$S(0,0,\sqrt{3})$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，所以 $\overrightarrow{AS}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AS}||\overrightarrow{BC}|}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，则 SA 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

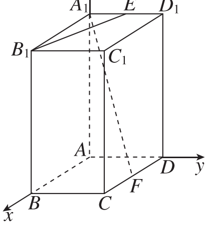


6. $\frac{1}{3}$　$-\frac{2}{3}$　[解析] 以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $D_1(0,0,1)$，$C_1(0,2,1)$，$A_1(1,0,1)$，$B(1,2,0)$，∴$\overrightarrow{D_1C_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-1)$. 设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ 2y-z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$. 设 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1C_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{D_1C_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{D_1C_1}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{2\times 3}=\frac{1}{3}$，即直线 D_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$. 易知平面 $A_1C_1D_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，∴$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{1\times 3}=\frac{2}{3}$. 由图可知，二面角 $B\text{-}A_1C_1\text{-}D_1$ 为钝角，故二面角 $B\text{-}A_1C_1\text{-}D_1$ 的余弦值为 $-\frac{2}{3}$.

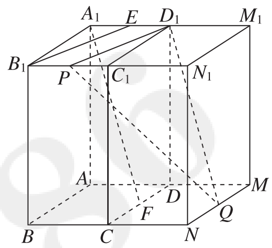


● 课堂考点探究

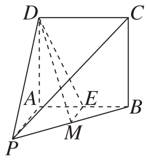
例1　(1)A　(2)$\sqrt{5}$
[解析] (1)方法一：以 A 为坐标原点，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,4)$，$F(2,2,0)$，$B_1(4,0,4)$，$E(0,1,4)$，所以 $\overrightarrow{A_1F}=(2,2,-4)$，$\overrightarrow{B_1E}=(-4,1,0)$. 设异面直线 A_1F 与 B_1E 所成的角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{A_1F}||\overrightarrow{B_1E}|}\right|=\left|\frac{-6}{2\sqrt{6}\times\sqrt{17}}\right|=\frac{\sqrt{102}}{34}$. 故选 A.



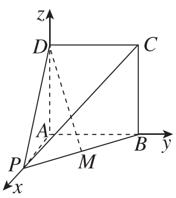
方法二：补充长方体 $CDMN\text{-}C_1D_1M_1N_1$，如图所示，其中 $C_1N_1=B_1C_1$，取 P 为 B_1C_1 的中点，Q 为 MN 的中点，连接 D_1Q，D_1P，PQ，则 $\angle PD_1Q$（或其补角）即为异面直线 A_1F 与 B_1E 所成的角. 由题知 $D_1P=B_1E=\sqrt{17}$，$D_1Q=A_1F=2\sqrt{6}$，$PQ=\sqrt{29}$，所以 $\cos\angle PD_1Q=\frac{D_1P^2+D_1Q^2-PQ^2}{2\cdot D_1P\cdot D_1Q}=\frac{\sqrt{102}}{34}$. 故选 A.



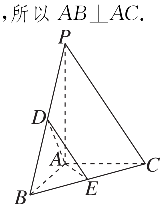
(2)方法一：过点 M 作 $ME\parallel PA$，交 AB 于点 E，连接 DE，则 E 为 AB 的中点，$\angle DME$（或其补角）为异面直线 DM 与 PA 所成的角. ∵$PA\perp$平面 $ABCD$，∴$ME\perp$平面 $ABCD$，∵四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $PA=AB=2$，E 为 AB 的中点，∴$ME=\frac{1}{2}PA=1$，$DE=\sqrt{DA^2+AE^2}=\sqrt{5}$，故 $\tan\angle DME=\frac{DE}{ME}=\sqrt{5}$.



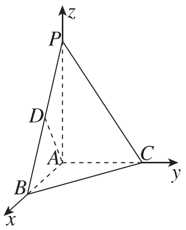
方法二：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$PA\perp$平面 $ABCD$，∴以 A 为坐标原点，建立空间直角坐标系，如图，则 $A(0,0,0)$，$D(0,0,2)$，$P(2,0,0)$，$M(1,1,0)$，∴$\overrightarrow{DM}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{AP}=(2,0,0)$，则 $\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{DM}\rangle=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{DM}|}=\frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 设异面直线 DM 与 PA 所成角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{DM}\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{6}$，∴$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{30}}{6}$，∴$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{5}$，∴异面直线 DM 与 PA 所成角的正切值为 $\sqrt{5}$.



变式题　D　[解析] 由 $AB=2$，$AC=2$，$BC=2\sqrt{2}$，得 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AB\perp AC$.
方法一：如图，取 BC 的中点 E，连接 AE，DE，则 $DE\parallel PC$，所以 $\angle ADE$ 或其补角即为异面直线 AD 与 PC 所成的角. 易知 $AE=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$，$DE=\frac{1}{2}PC=\frac{\sqrt{13}}{2}$，$PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$，所以 $DA=\frac{\sqrt{13}}{2}$，在 $\triangle ADE$ 中，根据余弦定理可得 $\cos\angle ADE=\frac{AD^2+DE^2-AE^2}{2AD\times DE}=$

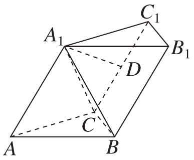


$\dfrac{\frac{13}{4}+\frac{13}{4}-2}{2\times\frac{13}{4}}=\dfrac{9}{13}$,所以异面直线 AD 与 PC 所成角的余弦值为 $\frac{9}{13}$.故选 D.

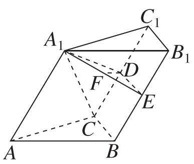


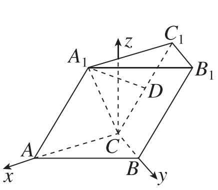
方法二:因为 $PA\perp$ 平面 ABC,$AB,AC\subset$ 平面 ABC,所以 $PA\perp AB$,$PA\perp AC$,故以 A 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$A(0,0,0)$,$P(0,0,3)$,$D\left(1,0,\frac{3}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{AD}=\left(1,0,\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{PC}=(0,2,-3)$.设 AD 与 PC 所成角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{\frac{9}{2}}{\sqrt{13}\times\frac{\sqrt{13}}{2}}=\dfrac{9}{13}$.故选 D.

例 2 解:(1)证明:如图,连接 A_1B,因为 $AB=AA_1=4$,$\angle A_1AB=60^\circ$,所以 $\triangle ABA_1$ 为等边三角形,所以 $A_1B=4$,又因为 $A_1C=2\sqrt{3}$,$BC=2$,所以 $A_1B^2=A_1C^2+BC^2$,所以 $BC\perp A_1C$.又 $BC\perp AC$,$AC\cap A_1C=C$,$AC,A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.



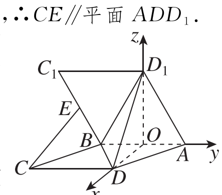
(2)方法一:如图,设 E 为 BB_1 的中点,连接 A_1E,DE,作 $DF\perp A_1E$ 于点 F.因为 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1,$DE/\!/BC$,所以 $DE\perp$ 平面 ACC_1A_1,又 $CC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $DE\perp CC_1$.在 $\triangle A_1CC_1$ 中,$A_1C=A_1C_1$,D 为 CC_1 的中点,所以 $A_1D\perp CC_1$,又 $A_1D\cap DE=D$,所以 $CC_1\perp$ 平面 A_1DE.因为 $BB_1/\!/CC_1$,所以 $BB_1\perp$ 平面 A_1DE,又 $DF\subset$ 平面 A_1DE,所以 $BB_1\perp DF$,又因为 $DF\perp A_1E$,$BB_1\cap A_1E=E$,$BB_1,A_1E\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $DF\perp$ 平面 ABB_1A_1,所以直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 $\angle DA_1E$.在 $\triangle DA_1E$ 中,$A_1D\perp DE$,$A_1D=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-2^2}=2\sqrt{2}$,$DE=BC=2$,所以 $A_1E=\sqrt{A_1D^2+DE^2}=2\sqrt{3}$,所以 $\sin\angle DA_1E=\dfrac{DE}{A_1E}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.故直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



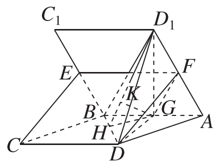


方法二:如图,以 C 为坐标原点,以 $\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CB}$ 的方向分别为 x,y 轴的正方向,建立空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$,$A(2\sqrt{3},0,0)$,$B(0,2,0)$,$A_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$,$C_1\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},0,\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$,$D\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,所以 $\overrightarrow{A_1D}=\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},0,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3},0,\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ x-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},\sqrt{6},1)$.设直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1D},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{A_1D}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1D}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.故直线 A_1D 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

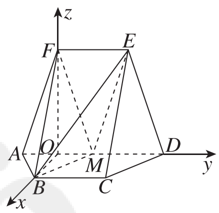
变式题 解:(1)证明:$\because BE/\!/AD_1$,$BE\not\subset$ 平面 ADD_1,$AD_1\subset$ 平面 ADD_1,$\therefore BE/\!/$ 平面 ADD_1.同理可得 $BC/\!/$ 平面 ADD_1.又 $\because BE\cap BC=B$,$BE,BC\subset$ 平面 BCE,$\therefore$ 平面 $BCE/\!/$ 平面 ADD_1.$\because CE\subset$ 平面 BCE,$\therefore CE/\!/$ 平面 ADD_1.



(2)方法一:取 AB 的中点 O,连接 OD,OD_1,易知 $OD\perp AB$,$OD_1\perp AB$.$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 ABC_1D_1,平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABC_1D_1=AB$,$OD_1\subset$ 平面 ABC_1D_1,$\therefore OD_1\perp$ 平面 $ABCD$.如图,以 O 为坐标原点,建立空间直角坐标系,则 $B(0,-1,0)$,$D(\sqrt{3},0,0)$,$C(\sqrt{3},-2,0)$,$D_1(0,0,\sqrt{3})$,$C_1(0,-2,\sqrt{3})$,从而 $E\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\therefore\overrightarrow{CE}=\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{DD_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$.设平面 BDD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DD_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ -\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$,设直线 CE 与平面 BDD_1 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{3+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\times\sqrt{1+3+1}}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$,$\therefore$ 直线 CE 与平面 BDD_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

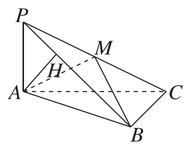


方法二:如图,取 AD_1 的中点 F,连接 EF,DF,易得四边形 $EFDC$ 是平行四边形,$\therefore CE/\!/DF$,则 CE 与平面 BDD_1 所成角即为 DF 与平面 BDD_1 所成角,设为 θ.过 D_1 作 $D_1G\perp AB$ 交 AB 于 G,过 G 作 $GH\perp BD$ 交 BD 于 H,连接 D_1H,过 G 作 $GK\perp D_1H$ 交 D_1H 于 K.$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 ABC_1D_1,平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABC_1D_1=AB$,$D_1G\subset$ 平面 ABC_1D_1,$D_1G\perp AB$,$\therefore D_1G\perp$ 平面 $ABCD$,又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore D_1G\perp BD$,又 $GH\perp BD$,$D_1G\cap GH=G$,D_1G,$GH\subset$ 平面 D_1GH,$\therefore BD\perp$ 平面 D_1GH,$\because GK\subset$ 平面 D_1GH,$\therefore BD\perp GK$,又 $GK\perp D_1H$,$BD\cap D_1H=H$,BD,$D_1H\subset$ 平面 BDD_1,$\therefore GK\perp$ 平面 BDD_1,$\therefore GK$ 的长即为 G 到平面 BDD_1 的距离.由 $D_1G=\sqrt{3}$,$GH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,可得 $D_1H=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$,则 $GK=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.连接 FG,DG,$\because GF/\!/BD_1$,$\therefore F$ 到平面 BDD_1 的距离即为 G 到平面 BDD_1 的距离,设为 h,则 $h=GK=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.又 $D_1G=DG=\sqrt{3}$,$\therefore DD_1=\sqrt{6}$.在 $\triangle ADD_1$ 中,$DD_1=\sqrt{6}$,$AD=AD_1=2$,$\therefore 4DF^2+AD_1^2=2(AD^2+DD_1^2)$,得 $DF=2$,$\therefore\sin\theta=\dfrac{h}{DF}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$,$\therefore$ 直线 CE 与平面 BDD_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

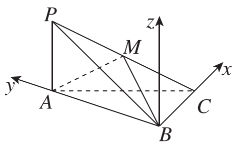


例 3 (1)解:①证明:由题意得 $BC/\!/AD$,$DM=\dfrac{1}{2}AD=BC$,所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形,所以 $BM/\!/CD$,又 $BM\not\subset$ 平面 CDE,$CD\subset$ 平面 CDE,所以 $BM/\!/$ 平面 CDE.

②取 AM 的中点 O,连接 OF,OB,则易知 $OF\perp AD$,$OB\perp AD$,$OF=3$,$OB=\sqrt{3}$,而 $FB=2\sqrt{3}$,所以 $OF^2+OB^2=FB^2$,故 $OF\perp OB$,故 OF,OB,AD 两两垂直.以 O 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $F(0,0,3)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$M(0,1,0)$,$E(0,2,3)$,可得 $\overrightarrow{FB}=(\sqrt{3},0,-3)$,$\overrightarrow{BM}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{ME}=(0,1,3)$.设平面 FBM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-3z=0,\\ -\sqrt{3}x+y=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},3,1)$.同理,可得平面 BEM 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},3,-1)$.因为 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{11}{13}$,所以 $\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$,故二面角 F-BM-E 的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$.



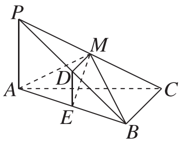
(2)①证明:如图,作 $AH\perp PB$,垂足为 H,因为平面 $PAB\perp$ 平面 PBC,平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$,$AH\subset$ 平面 PAB,所以 $AH\perp$ 平面 PBC,又 $BC\subset$ 平面 PBC,所以 $AH\perp BC$,因为 $PA\perp$ 平面 ABC,$BC\subset$ 平面 ABC,所以 $PA\perp BC$,因为 $PA\cap AH=A$,PA,$AH\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp$ 平面 PAB,又 $AB\subset$ 平面 PAB,所以 $BC\perp AB$.



②方法一(向量法):如图,以 B 为原点,BC,BA 所在直线分别为 x,y 轴,过点 B 平行于 AP 的直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(0,0,0)$,$A(0,\sqrt{3},0)$,$C(1,0,0)$,$P(0,\sqrt{3},1)$,$M\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以 $\overrightarrow{BA}=(0,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{BM}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.易知平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$,设平面 MAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}=\sqrt{3}y=0,\\ \overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$,所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以平面

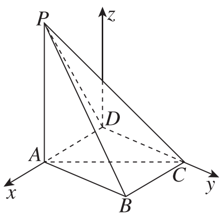
PAB 与平面 MAB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

方法二(几何法):取 AB 的中点 E,PB 的中点 D,连接 DM,DE,ME,如图.因为 $PA\perp$平面 ABC,$AB\subset$平面 ABC,

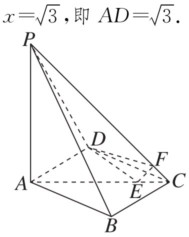


所以 $PA\perp AB$,又 $DE\parallel PA$,所以 $DE\perp AB$.由①知,$BC\perp$平面 PAB,$PB\subset$平面 PAB,所以 $BC\perp PB$,在 Rt$\triangle PBC$ 和 Rt$\triangle PAC$ 中,$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{PA^2+AB^2+BC^2}=\sqrt{5}$,$AM=\frac{1}{2}PC=BM=\frac{\sqrt{5}}{2}$,所以$\triangle MAB$ 是等腰三角形,所以 $ME\perp AB$,故$\angle DEM$ 即为平面 PAB 与平面 MAB 所成的角.由题知 $DE=\frac{1}{2}$,$DM=\frac{1}{2}$,$EM=\sqrt{BM^2-\frac{AB^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $DE^2+DM^2=EM^2$,所以$\triangle DEM$ 为等腰直角三角形,故$\angle DEM=\frac{\pi}{4}$,所以平面 PAB 与平面 MAB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$.

变式题 解:(1)证明:$\because PA\perp$平面 $ABCD$,$AD\subset$平面 $ABCD$,$\therefore PA\perp AD$.
又$\because AD\perp PB$,$PB\cap PA=P$,$PB,PA\subset$平面 PAB,$\therefore AD\perp$平面 PAB,$\because AB\subset$平面 PAB,$\therefore AD\perp AB$.在$\triangle ABC$ 中,$AB^2+BC^2=AC^2$,$\therefore AB\perp BC$.$\because A,B,C,D$ 四点共面,$\therefore AD\parallel BC$,
又$\because BC\subset$平面 PBC,$AD\not\subset$平面 PBC,$\therefore AD\parallel$平面 PBC.
(2)方法一:以 D 为原点,以 DA,DC 所在直线分别为 x,y 轴,以过点 D 且与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AD=t(0<t<2)$,则 $A(t,0,0)$,$P(t,0,2)$,$D(0,0,0)$,$DC=\sqrt{4-t^2}$,$C(0,\sqrt{4-t^2},0)$.
$\overrightarrow{AC}=(-t,\sqrt{4-t^2},0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$,设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$
即 $\begin{cases}-tx_1+\sqrt{4-t^2}\,y_1=0,\\ 2z_1=0,\end{cases}$ 不妨令 $x_1=\sqrt{4-t^2}$,则 $y_1=t$,$z_1=0$,故 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{4-t^2},t,0)$.$\overrightarrow{DP}=(t,0,2)$,$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{4-t^2},0)$,设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}tx_2+2z_2=0,\\ \sqrt{4-t^2}\,y_2=0,\end{cases}$ 不妨令 $z_2=t$,则 $x_2=-2$,$y_2=0$,故 $\boldsymbol{n}_2=(-2,0,t)$.$\because$二面角 A-CP-D 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$,$\therefore$平面 ACP 与平面 CPD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$,$\therefore \frac{\sqrt{7}}{7}=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2\sqrt{4-t^2}}{2\sqrt{t^2+4}}$,可得 $t=\sqrt{3}$.
$\therefore AD=\sqrt{3}$.
方法二:如图所示,过点 D 作 $DE\perp AC$ 于 E,过点 E 作 $EF\perp CP$ 于 F,连接 DF.$\because PA\perp$平面 $ABCD$,$PA\subset$平面 PAC,$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$,又平面 $PAC\cap$平面 $ABCD=AC$,$DE\perp AC$,$\therefore DE\perp$平面 PAC.又 $CP\subset$平面 PAC,$\therefore DE\perp CP$,又 $EF\perp CP$,$DE\cap EF=E$,$\therefore CP\perp$平面 DEF,得 $DF\perp CP$,根据二面角的定义可知,$\angle DFE$ 即为二面角 A-CP-D 的平面角,即 $\sin\angle DFE=\frac{\sqrt{42}}{7}$.又$\angle DFE$ 为锐角,$\therefore\tan\angle DFE=\sqrt{6}$.设 $AD=x(0<x<2)$,则 $CD=\sqrt{4-x^2}$,由等面积法可得,$DE=\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$,则 $CE=\sqrt{(4-x^2)-\frac{x^2(4-x^2)}{4}}=\frac{4-x^2}{2}$,又$\triangle EFC$ 为等腰直角三角形,$\therefore EF=\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}$,故 $\tan\angle DFE=\frac{DE}{EF}=\frac{\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}}{\frac{4-x^2}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{6}$,解得 $x=\sqrt{3}$,即 $AD=\sqrt{3}$.

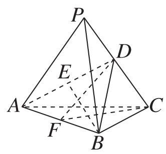


拓展应用3 最小角定理与最大角定理的应用

【典型例题】

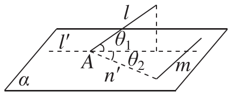
例1 解:(1)证明:$\because$平面 $ACFD\perp$平面 ABC,$\therefore\cos\angle BCD=\cos\angle ACB\cos\angle ACD=\cos45^\circ\cos45^\circ=\frac{1}{2}$,
$\therefore\angle BCD=60^\circ$,
又 $DC=2BC$,$\therefore\angle CBD=90^\circ$,$\therefore CD\perp BD$,又 $EF\parallel BC$,$\therefore EF\perp DB$.
(2)由$\angle ACB=\angle ACD=45^\circ$,可知 A 在平面 DBC 上的射影 G 在$\angle DCB$ 的平分线上.设直线 DF 与平面 DBC 所成的角为θ,则 AC 与平面 DBC 所成的角也为θ.由(1)知$\angle BCD=60^\circ$,由三余弦定理得 $\cos45^\circ=\cos30^\circ\cdot\cos\theta$,则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$,
$\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例2 $\left[0,\frac{\sqrt{14}}{7}\right]$ [解析]设二面角 D-AB-C 的平面角为α,取 AB 的中点 F,连接 DF,CF,如图,易知$\alpha=\angle DFC$,$DF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$DC=\frac{1}{2}$,$CF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.设直线 BE 与平面 ABC 所成的角为θ,由三正弦定理得 $\sin\theta=\sin\angle ABE\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\angle ABE$,因为 $AD=BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$AB=1$,所以由余弦定理得 $\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{6}}{3}$,易知 $\sin\angle ABE\in\left[0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$,所以 $\sin\theta\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$,所以 $\tan\theta\in\left[0,\frac{\sqrt{14}}{7}\right]$.



【巩固演练】

1. C [解析]因为θ_1是线面角,θ_2是线线角,所以由最小角定理知$\theta_1\leqslant\theta_2$,又 BC 不是 A_1P 在底面上的射影,所以$\theta_1<\theta_2$.故选 C.
2. A [解析]由最大角定理知$\theta\geqslant\theta_1$,故选 A.
3. $\frac{\pi}{3}$ [解析]如图,设 l'为直线 l 在平面α上的射影,则 $l'\subset\alpha$.$l\perp m$,由三垂线定理知 $l'\perp m$,且 $\cos\theta_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$.在平面$\alpha$内作 $n'\parallel n$,且 $n'\cap l=A$,设 l 与 n'所成的角为θ,则$\theta=\frac{\pi}{4}$.设 n'与 l'所成的角为θ_2,由三余弦定理得 $\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2$,解得 $\cos\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\theta_2=\frac{\pi}{6}$,所以 m 与 n 所成的角为 $\frac{\pi}{2}-\theta_2=\frac{\pi}{3}$.



4. 解:(1)证明:连接 BO,$\because AB=BC=2\sqrt{2}$,$AC=4$,$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$,$\therefore AB\perp BC$,又 O 是 AC 的中点,$\therefore BO\perp AC$,且 $BO=2$,$\because PA=PC=AC=4$,
$\therefore PO\perp AC$,$PO=2\sqrt{3}$,
$\because PB^2=PO^2+BO^2$,$\therefore PO\perp OB$,
又 $OB\cap AC=O$,$OB,AC\subset$平面 ABC,
$\therefore PO\perp$平面 ABC.
(2)设 PC 与平面 PAM 所成的角为α,由(1)可知,三角形 APC 为等边三角形,$\therefore$线棱角$\angle CPA=60^\circ$,又二面角 M-PA-C 的大小为 30°,$\therefore$由三正弦定理得 $\sin\alpha=\sin60^\circ\sin30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$,$\therefore PC$ 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

第48讲 空间距离及立体几何中的探索性问题

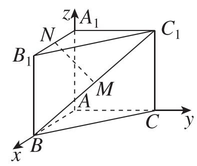
● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

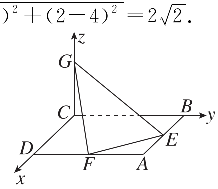
1. $\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}$ $\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$
2. $\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$ $\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$

【对点演练】

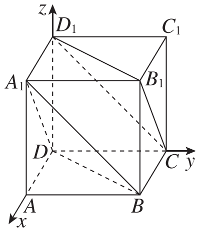
1. $2\sqrt{2}$ [解析]以 A 为原点,建立空间直角坐标系,如图所示,则 $M(2,2,2)$,$N(2,0,4)$,所以 $MN=\sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{2}$.



2. $\frac{6\sqrt{11}}{11}$ [解析]以 C 为原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$,$E(2,4,0)$,$F(4,2,0)$,$G(0,0,2)$,所以 $\overrightarrow{CG}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{EG}=(-2,-4,2)$,$\overrightarrow{EF}=(2,-2,0)$.设平面 GEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x-4y+2z=0,\\ 2x-2y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,1,3)$,所以点 C 到平面 GEF 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CG}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{6\sqrt{11}}{11}$.



3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ [解析]以 D 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $D(0,0,0)$,$A_1(1,0,1)$,$B(1,1,0)$,$D_1(0,0,1)$,所以 $\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$,$\overrightarrow{A_1D_1}=(-1,0,0)$.设平面



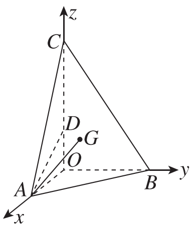
A_1BD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ -x-z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$，所以点 D_1 到平面 A_1BD 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{A_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 易证平面 A_1BD∥平面 B_1CD_1，所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 之间的距离等于点 D_1 到平面 A_1BD 的距离，所以平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ［解析］以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $A_1(2,0,2)$，$O(2,1,1)$，$E(1,2,0)$，所以 $\overrightarrow{A_1O}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1E}=(-1,2,-2)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1O}\cdot\overrightarrow{A_1E}}{|\overrightarrow{A_1O}||\overrightarrow{A_1E}|}=\frac{2+2}{\sqrt{2}\times3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 因为 $\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\sin\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle=\frac{1}{3}$，所以点 O 到直线 A_1E 的距离为 $|\overrightarrow{A_1O}|\sin\langle\overrightarrow{A_1O},\overrightarrow{A_1E}\rangle=\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

5. -1 或 -11 ［解析］由题可知 $\overrightarrow{PA}=(x+2,2,-4)$，$\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{3}$，则 $\frac{|-2(x+2)-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{10}{3}$，解得 $x=-1$ 或 $x=-11$.

● 课堂考点探究

例1 (1)A (2)$\sqrt{2}$

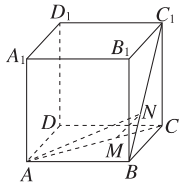


［解析］(1)四面体 $OABC$ 满足 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90°$，即 OA,OB,OC 两两垂直，以点 O 为原点，以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图. 因为 $OA=1$，$OB=2$，$OC=3$，$OC=3OD$，所以 $A(1,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,3)$，$D(0,0,1)$，则 $G\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$，所以 $\overrightarrow{AG}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$，则 $|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{17}}{3}$，$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\times(-1)+1=\frac{5}{3}$，所以点 G 到直线 AD 的距离 $d=\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{17}{9}-\left(\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

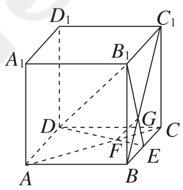
(2)方法一：过点 P 作 $PD\perp AC$，垂足为 D，作 $PE\perp BC$，垂足为 E，由题意知 $PD=PE=\sqrt{3}$. 过点 P 作 $PO\perp$ 平面 ABC，垂足为 O，则点 O 在 $\angle ACB$ 的平分线上，连接 OD,OC,OE，则 $OD\perp CD$，$OE\perp CE$. 在 Rt△PCE 中，$PC=2$，$PE=\sqrt{3}$，则 $EC=1$. 在 Rt△ECO 中，$\angle ECO=45°$，则 Rt△ECO 为等腰直角三角形，所以 $EO=EC=1$，所以 $CO=\sqrt{2}$. 在 Rt△PCO 中，$PO=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$，即点 P 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{2}$.

方法二：过点 P 作 $PD\perp AC$，垂足为 D，作 $PE\perp BC$，垂足为 E，由题意知 $PD=PE=\sqrt{3}$，所以 $CD=CE=1$. 以 C 为坐标原点，以 $\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 $C(0,0,0)$，$E(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，设 $P(x,y,z)$，则 $|\overrightarrow{CP}|=2$，$|\overrightarrow{EP}|=|\overrightarrow{DP}|=\sqrt{3}$，得 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\(x-1)^2+y^2+z^2=3,\\x^2+(y-1)^2+z^2=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=-\sqrt{2},\end{cases}$ 所以点 P 到平面 ABC 的距离为 $\sqrt{2}$.

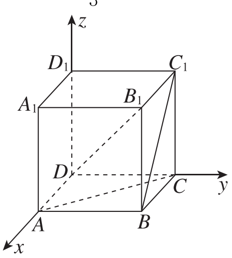
变式题1 (1)B (2)$\frac{\sqrt{3}}{3}$



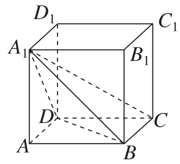
［解析］(1)方法一：设 M 为直线 AC 上任意一点，过 M 作 $MN\perp BC_1$，垂足为 N，连接 AN，如图，设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BC_1}=\mu\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$，则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{AM}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$. ∵$MN\perp BC_1$，∴$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，即$[(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}]\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=0$，∵$AB\perp AD$，$AB\perp AA_1$，$AD\perp AA_1$，∴$(\mu-\lambda)\overrightarrow{AD}^2+\mu\overrightarrow{AA_1}^2=0$，即 $\mu-\lambda+\mu=0$，∴$\lambda=2\mu$，∴$\overrightarrow{MN}=(1-2\mu)\overrightarrow{AB}-\mu\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$，∴$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(1-2\mu)^2+\mu^2+\mu^2}=\sqrt{6\mu^2-4\mu+1}=\sqrt{6\left(\mu-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}}$，∵$\mu\in\mathbf{R}$，∴当 $\mu=\frac{1}{3}$ 时，$|\overrightarrow{MN}|$ 取得最小值 $\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



方法二：如图，取 BC 的中点 E，连接 B_1E，DE，设 B_1E 交 BC_1 于点 G，DE 交 AC 于点 F，则 $\frac{B_1G}{GE}=\frac{B_1C_1}{BE}=2$，$\frac{DF}{FE}=\frac{DA}{EC}=2$. 连接 B_1D，FG，在△B_1DE 中，$\frac{B_1G}{GE}=\frac{DF}{FE}=2$，∴$FG$∥$DB_1$，$FG=\frac{1}{3}DB_1$. 在正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，易证 $B_1D\perp AC$，$B_1D\perp BC_1$，∴$FG\perp AC$，$FG\perp BC_1$，∴FG 为异面直线 AC 与 BC_1 的公垂线段. ∵$B_1D=\sqrt{3}$，∴$FG=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

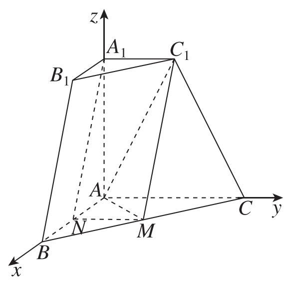


方法三：如图，以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，$C_1(0,1,1)$，$C(0,1,0)$，连接 DB_1，∴$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$，则 $\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0$，∴$DB_1\perp AC$，$DB_1\perp BC_1$，∴异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离为 $\left|\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{DB_1}|}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



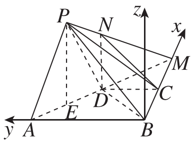
(2)如图，连接 A_1C，易知 $V_{A_1\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times A_1A=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$. 在△$A_1DB$ 中，$A_1D=A_1B=BD=\sqrt{2}$，所以△A_1DB 是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，则 $S_{\triangle A_1DB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设点 C 到平面 A_1DB 的距离为 h，则 $V_{C\text{-}A_1DB}=V_{A_1\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1DB}\times h=\frac{1}{6}$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times h=\frac{1}{6}$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以点 C 到平面 A_1DB 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

变式题2 解：(1)证明：连接 MN.
因为 N 为 AB 的中点，M 为 BC 的中点，所以线段 MN 是△ABC 的中位线，所以 MN∥AC，且 $MN=\frac{1}{2}AC$. 在三棱台 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AC=2$，$A_1C_1=1$，A_1C_1∥AC，且 $A_1C_1=\frac{1}{2}AC$，所以 $MN=A_1C_1$，且 MN∥A_1C_1，所以四边形 A_1C_1MN 是平行四边形，所以 A_1N∥C_1M. 又 $A_1N\not\subset$ 平面 C_1MA，$C_1M\subset$ 平面 C_1MA，所以 A_1N∥平面 C_1MA.
(2)因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC，且 $AB,AC\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1A\perp AB$，$A_1A\perp AC$. 又 $AB\perp AC$，所以 A_1A,AB,AC 两两垂直. 如图，以 A 为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系. 因为 $AB=AC=AA_1=2$，$A_1C_1=1$，所以 $A(0,0,0)$，$C_1(0,1,2)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$.
由 M 是 BC 的中点，可得 $M(1,1,0)$，
所以 $\overrightarrow{AC_1}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AM}=(1,1,0)$.
设平面 C_1MA 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{AC_1}\perp\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{AM}\perp\boldsymbol{m}$，即 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}=0$，$\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{m}=0$，由此可得 $\begin{cases}y+2z=0,\\x+y=0,\end{cases}$ 令 $y=2$，则 $x=-2$，$z=-1$，即 $\boldsymbol{m}=(-2,2,-1)$. 易知平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. 设平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3}$.
故平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.



(3)由(2)知，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，平面 C_1MA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(-2,2,-1)$，设点 C 到平面 C_1MA 的距离为 d，则 $d=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|(0,2,0)\cdot(-2,2,-1)|}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\frac{4}{3}$，所以点 C 到平面 C_1MA 的距离为 $\frac{4}{3}$.

例 2 解:(1)设四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的高为 h,则 $V_{B\text{-}PCD}=V_{P\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,∵$AB=2CD$,



∴$S_{\triangle ADB}=2S_{\triangle BCD}$,∴$S_{四边形ABCD}=3S_{\triangle BCD}$,∴$V_{P\text{-}ABCD}=3V_{P\text{-}BCD}=2\sqrt{2}$.如图,延长 BC,AD 交于点 M,连接 PM,则平面 PAD 与平面 PBC 的交线 l 为直线 PM.

(2)取 AD 的中点 E,连接 PE,∵$PA=PD$,E 是 AD 的中点,∴$PE\perp AD$.

∵平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,$PE\subset$ 平面 PAD,$PE\perp AD$,∴ $PE\perp$ 平面 $ABCD$,∴ $V_{B\text{-}PCD}=V_{P\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\cdot PE\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

又 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD=2$,∴$PE=\sqrt{2}$.

以点 B 为坐标原点,BM,BA 所在直线分别为 x,y 轴,过点 B 作平面 $ABCD$ 的垂线为 z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示,则 $P(1,3,\sqrt{2})$,$C(2,0,0)$,$D(2,2,0)$,$M(4,0,0)$,∴$\overrightarrow{CD}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{PD}=(1,-1,-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{PM}=(3,-3,-\sqrt{2})$,设 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PM}=(3\lambda,-3\lambda,-\sqrt{2}\lambda)$,

则 $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{PN}-\overrightarrow{PD}=(3\lambda-1,1-3\lambda,\sqrt{2}(1-\lambda))$,设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$

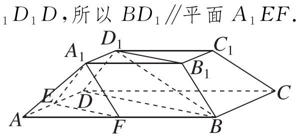
即 $\begin{cases}2y_1=0,\\ x_1-y_1-\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$,得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,1)$.设平面 CDN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DN}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2y_2=0,\\ (3\lambda-1)x_2+(1-3\lambda)y_2+\sqrt{2}(1-\lambda)z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=\sqrt{2}(1-\lambda)$,可得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}(1-\lambda),0,1-3\lambda)$.∵平面 PDC 与平面 DCN 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,∴$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\left|\frac{2(1-\lambda)+1-3\lambda}{\sqrt{3}\times\sqrt{2(1-\lambda)^2+(1-3\lambda)^2}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

整理得 $3\lambda^2-10\lambda+3=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=3$,即在直线 l 上存在点 N,使平面 PDC 与平面 DCN 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,此时 $\overrightarrow{PN}=\left(1,-1,-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ 或 $\overrightarrow{PN}=(9,-9,-3\sqrt{2})$,则 $PN=\sqrt{1+1+\frac{2}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 或 $PN=\sqrt{81+81+18}=6\sqrt{5}$.

变式题 解:(1)证明:如图,连接 BD,B_1D_1,由 E,F 分别为 AD,AB 的中点,得 $EF\parallel BD$,又 $EF\not\subset$ 平面 BB_1D_1D,$BD\subset$ 平面 BB_1D_1D,所以 $EF\parallel$ 平面 BB_1D_1D.在正四棱台 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$A_1B_1\parallel AB$ 且 $A_1B_1=\frac{1}{2}AB=BF$,则四边形 A_1FBB_1 为平行四边形,故 $A_1F\parallel BB_1$,又 $A_1F\not\subset$ 平面 BB_1D_1D,$BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,所以 $A_1F\parallel$ 平面 BB_1D_1D,又 $A_1F\cap EF=F$,且 $A_1F\subset$ 平面 A_1EF,$EF\subset$ 平面 A_1EF,所以平面 $A_1EF\parallel$ 平面 BB_1D_1D,又 $BD_1\subset$ 平面 BB_1D_1D,所以 $BD_1\parallel$ 平面 A_1EF.



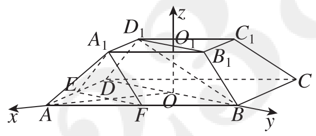
(2)取正方形 $ABCD$ 的中心 O,正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心 O_1,连接 OO_1,则 $OO_1\perp$ 平面 $ABCD$,连接 AO,因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $AO\perp BO$,以 O 为原点,OA,OB,OO_1 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,由 $AB=2A_1B_1=4$,二面角 $C_1\text{-}BC\text{-}D$ 的大小为 $45°$,得 $OO_1=\frac{AB-A_1B_1}{2}\times\tan 45°=1$,则 $A(2\sqrt{2},0,0)$,$B(0,2\sqrt{2},0)$,$A_1(\sqrt{2},0,1)$,$F(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$E(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$,$D_1(0,-\sqrt{2},1)$,假设在棱 AB 上存在点 $M(m,n,0)$ 满足题意,则 $\overrightarrow{AM}=(m-2\sqrt{2},n,0)$,$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$,设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$,则 $M(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda,2\sqrt{2}\lambda,0)$,

$\overrightarrow{D_1M}=(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda,2\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2},-1)$.

设平面 A_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,因为 $\overrightarrow{A_1E}=(0,-\sqrt{2},-1)$,$\overrightarrow{EF}=(0,2\sqrt{2},0)$,所以 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=-\sqrt{2}y-z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=2\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $x=1$,则 $y=0$,$z=0$,即 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$.

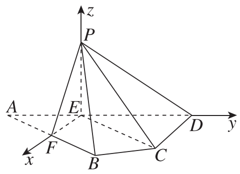
因为直线 D_1M 与平面 A_1EF 所成的角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$,所以 $|\cos\langle\overrightarrow{D_1M},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{D_1M}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{D_1M}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda|}{\sqrt{16\lambda^2-8\lambda+11}\times\sqrt{1}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$,整理得 $16\lambda^2-248\lambda+61=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{4}$ 或 $\lambda=\frac{61}{4}$(舍),故 $AM=\frac{1}{4}AB=1$,故棱 AB 上存在点 M,使得直线 D_1M 与平面 A_1EF 所成的角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$,此时线段 AM 的长为 1.



例 3 解:(1)证明:在 $\triangle AEF$ 中,$AE=\frac{2}{5}AD=2\sqrt{3}$,$AF=\frac{1}{2}AB=4$,$\angle EAF=30°$,∴$\cos\angle EAF=\frac{AE^2+AF^2-EF^2}{2AE\cdot AF}=\frac{12+16-EF^2}{2\times 2\sqrt{3}\times 4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$EF=2$.∵$EF^2+AE^2=AF^2$,∴$AE\perp EF$,得 $PE\perp EF$,$DE\perp EF$,又 $PE\cap DE=E$,PE,$DE\subset$ 平面 PDE,∴$EF\perp$ 平面 PDE,

又∵$PD\subset$ 平面 PDE,∴$EF\perp PD$.

(2)连接 CE,∵$DE=5\sqrt{3}-2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$,$CD=3$,$\angle CDE=90°$,∴$CE^2=36$,得 $CE=6$.



又 $PE=AE=2\sqrt{3}$,$PC=4\sqrt{3}$,∴$PE^2+CE^2=PC^2$,∴$PE\perp CE$.又 $PE\perp EF$,$EF\cap CE=E$,EF,$CE\subset$ 平面 DEC,∴$PE\perp$ 平面 DEC,∴$PE\perp ED$,即 EF,ED,EP 两两垂直.以 E 为原点,EF,ED,EP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,则 $P(0,0,2\sqrt{3})$,$D(0,3\sqrt{3},0)$,$F(2,0,0)$,$A(0,-2\sqrt{3},0)$,$C(3,3\sqrt{3},0)$,由 F 为 AB 的中点,得 $B(4,2\sqrt{3},0)$,得 $\overrightarrow{PD}=(0,3\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CD}=(-3,0,0)$,$\overrightarrow{PB}=(4,2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BF}=(-2,-2\sqrt{3},0)$.设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}3\sqrt{3}y_1-2\sqrt{3}z_1=0,\\ -3x_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=2$,则 $\boldsymbol{n}_1=(0,2,3)$.

设平面 PBF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$

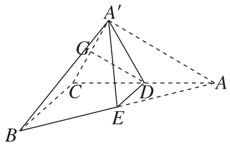
∴ $\begin{cases}4x_2+2\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0,\\ -2x_2-2\sqrt{3}y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},-1,1)$.

设平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角为 α,∵$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{65}}{65}$,

∴$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2}=\frac{8\sqrt{65}}{65}$.

变式题 解:(1)证明:方法一:如图,取 $A'C$ 的中点 G,连接 DG,因为 D,E 分别为 AC,AB 的中点,所以 $DE\parallel BC$,



因为 $\angle C=\frac{\pi}{2}$,所以 $DE\perp AC$.

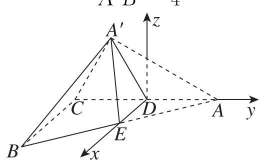
在立体图形中,$DE\perp CD$,$DE\perp A'D$,$A'D\cap CD=D$,$A'D$,$CD\subset$ 平面 $A'CD$,所以 $DE\perp$ 平面 $A'CD$,所以 $BC\perp$ 平面 $A'CD$.因为 $BC\subset$ 平面 $A'BC$,所以平面 $A'BC\perp$ 平面 $A'CD$,平面 $A'BC\cap$ 平面 $A'CD=A'C$.因为 G 为 $A'C$ 的中点,且 $CD=A'D$,所以 $DG\perp A'C$,因为 $DG\subset$ 平面 $A'CD$,所以 $DG\perp$ 平面 $A'BC$.又因为 $DG\parallel A'A$,所以 $A'A\perp$ 平面 $A'BC$.

因为 $BA'\subset$ 平面 $A'BC$,所以 $AA'\perp BA'$.

方法二:因为 $BE=EA'=EA$,所以 $\angle EA'A=\angle EAA'$ 且 $\angle EA'B=\angle EBA'$,故 $\angle BA'A=\angle EA'B+\angle EA'A=\angle EBA'+\angle EAA'$,所以 $\angle BA'A=90°$,即 $AA'\perp BA'$.

(2)方法一:因为 $DE\parallel BC$,且 $DE\not\subset$ 平面 $A'BC$,$BC\subset$ 平面 $A'BC$,所以 $DE\parallel$ 平面 $A'BC$.又 $DE\subset$ 平面 $A'ED$,若平面 $A'BC\cap$ 平面 $A'ED=l$,则 $l\parallel DE$,又 $DE\parallel BC$,所以 $l\parallel BC$.由(1)可知,$BC\perp A'C$,$DE\perp A'D$,所以 $l\perp A'C$,$l\perp A'D$,所以平面 $A'BC$ 与平面 $A'ED$ 所成的角为 $\angle CA'D$.因为 $\angle CA'D=\frac{\pi}{3}$,且 $CD=A'D$,所以 $\triangle A'CD$ 为正三角形.过点 B 作 $BH\perp$ 平面 $A'ED$,垂足为 H,连接 HA',则 $\angle BA'H$ 为直线 $A'B$ 与平面 $A'ED$ 所成的角.过点 C 作 $CF\perp A'D$ 于点 F,因为 $BC\parallel$ 平面 $A'ED$,所以 $BH=CF=\sqrt{3}$,又因为 $A'B=\sqrt{BC^2+CA'^2}=2\sqrt{2}$,所以 $\sin\angle BA'H=\frac{BH}{A'B}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

方法二:以 D 为原点,DE 所在直线为 x 轴,DA 所在直线为 y 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $\angle A'DA=\theta$,则 $D(0,0,0)$,$E(1,0,0)$,$B(2,-2,0)$,$C(0,-2,0)$,$A'(0,2\cos\theta,2\sin\theta)$,则 $\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{CA'}=(0,2\cos\theta+2,2\sin\theta)$,$\overrightarrow{DE}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{DA'}=(0,2\cos\theta,2\sin\theta)$.

设平面 $A'BC$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=2x_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA'}=(2\cos\theta+2)y_1+2\sin\theta\cdot z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=-\sin\theta$,则 $\boldsymbol{m}=(0,-\sin\theta,\cos\theta+1)$.设平面 $A'ED$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=x_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA'}=2\cos\theta\cdot y_2+2\sin\theta\cdot z_2=0,\end{cases}$

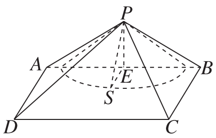
令 $y_2=\sin\theta$,则 $\boldsymbol{n}=(0,\sin\theta,-\cos\theta)$.

由题得$|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|1+\cos\theta|}{\sqrt{2+2\cos\theta}}=\dfrac{1}{2}$，可得$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，所以$A'(0,-1,\sqrt{3})$，则$\overrightarrow{BA'}=(-2,1,\sqrt{3})$，所以$\boldsymbol{n}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 设直线$A'B$与平面$A'ED$所成角为$\alpha$，则$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{BA'},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，故直线$A'B$与平面$A'ED$所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

增分微课 7　空间中的动态问题

例 1　A　[解析] 设二面角A-BC-D的平面角为θ，点P到平面BCD的距离为PH，点P到定直线CB的距离为d，则$PH=d\sin\theta$. ∵点P到平面BCD的距离与点P到点A的距离相等，∴$d\sin\theta=PA$，∴$\dfrac{PA}{d}=\sin\theta$，由四面体$ABCD$为正四面体，得$\sin\theta$为小于1的定值，即在平面ABC中，点P到定点A的距离与到定直线BC的距离的比值是一个小于1的定值，∴点P的轨迹为椭圆在$\triangle ABC$内的一部分. 故选A.

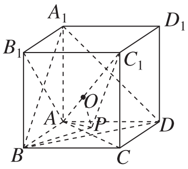
变式题　B



[解析] 取AB的中点E，连接PE,SE，如图. 因为$PA=PB=4\sqrt{3}$，E为AB的中点，所以$PE\perp AB$. 因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$PE\subset$平面PAB，所以$PE\perp$平面$ABCD$，又$SE\subset$平面$ABCD$，所以$PE\perp SE$. 因为四边形$ABCD$是边长为12的正方形，所以$AE=6$，所以$PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=\sqrt{48-36}=2\sqrt{3}$，$SE=\sqrt{PS^2-PE^2}\leqslant\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$，所以点$S$所在区域是以点$E$为圆心，$2\sqrt{6}$为半径的圆在四边形$ABCD$内的部分，所以动点$S$所在区域的面积为$\dfrac{1}{2}\pi\times(2\sqrt{6})^2=12\pi$. 故选B.

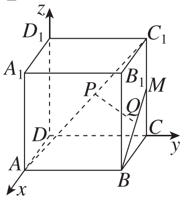
例 2　ACD　[解析] 对于A，由题可知，$A_1D\perp A_1E$，若存在某个位置使得$DA_1\perp EC$，则由$A_1E\cap EC=E$，$A_1E,EC\subset$平面A_1EC，得$A_1D\perp$平面A_1EC，又$A_1C\subset$平面A_1EC，所以$A_1D\perp A_1C$，又因为$AB=2AD=2$，所以$A_1C=\sqrt{3}$，由于在折叠过程中，$A_1C\in(1,\sqrt{5})$，所以存在某个位置，使得$A_1C=\sqrt{3}$，故存在某个位置，使得$DA_1\perp EC$，故A正确. 对于B，若存在某个位置，使得$A_1C\perp$平面A_1DE，则由$A_1D,A_1E\subset$平面A_1DE，得$A_1C\perp A_1D$，$A_1C\perp A_1E$，因为$DE=CE=\sqrt{2}$，$A_1D=A_1E=1$，$CD=2$，所以由$A_1C\perp A_1E$可得$A_1C=1$，由$A_1C\perp A_1D$可得$A_1C=\sqrt{3}$，$A_1C=1$与$A_1C=\sqrt{3}$不能同时成立，所以$A_1C\perp$平面A_1DE不成立，故B错误. 对于C，当四棱锥A_1-$DCBE$的体积最大时，平面$A_1DE\perp$平面$DCBE$，因为$\triangle A_1DE$是等腰直角三角形，所以点A_1到平面$DCBE$的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以四棱锥A_1-$DCBE$的体积的最大值为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(2+1)\times1\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故C正确. 对于D，取$DC$的中点$O$，连接$OM$，因为$M$为$A_1C$的中点，所以$OM\parallel A_1D$，且$OM=\dfrac{1}{2}A_1D=\dfrac{1}{2}$，为定值，所以$M$在以点$O$为球心的球面上，故D正确. 故选ACD.

例 3　$2\sqrt{6}$　[解析] 如图，连接AC_1，与平面A_1BD交于点O，连接AC,AB_1,OP，易知$BD\perp AC$，$BD\perp AA_1$，又$AC\cap AA_1=A$，$AC,AA_1\subset$平面ACC_1，所以$BD\perp$平面ACC_1，又$AC_1\subset$平面ACC_1，所以$BD\perp AC_1$. 因为$A_1B\perp AB_1$，$A_1B\perp B_1C_1$，$AB_1\cap B_1C_1=B_1$，$AB_1,B_1C_1\subset$平面AB_1C_1，所以$A_1B\perp$平面AB_1C_1，又$AC_1\subset$平面AB_1C_1，所以$A_1B\perp AC_1$. 因为$BD\cap A_1B=B$，$BD,A_1B\subset$平面A_1BD，所以$AC_1\perp$平面A_1BD，易知$AO=\dfrac{1}{3}AC_1=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，因为$AP=\sqrt{2}$，所以$OP=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. $\triangle A_1BD$是边长为$2\sqrt{2}$的正三角形，其内切圆的半径$r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以点P在$\triangle A_1BD$的内切圆上，因为$AC_1\perp$平面A_1BD，且点C_1到平面A_1BD的距离为$\dfrac{2}{3}AC_1=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$C_1P=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{6}$，当点$P$为$A_1D$的中点时$BP$最大，最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}A_1B=\sqrt{6}$，所以$BP+C_1P$的最大值为$2\sqrt{6}$.



例 4　$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$　[解析] 在正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，$AC\parallel A_1C_1$，所以D_1P与A_1C_1所成的角可以转化为D_1P与AC所成的角，根据动点变化的连续性，可知当P从点A向点C移动时，D_1P与AC所成角的整体变化趋势为先逐渐变大，再逐渐变小. 当P在点A或C处时，D_1P与AC所成的角最小，为$\dfrac{\pi}{3}$；当点P在AC的中点处时，D_1P与AC所成的角最大，为$\dfrac{\pi}{2}$. 故D_1P与A_1C_1所成角的取值范围为$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

变式题　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　[解析]

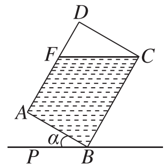


以D为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，所以$A(2,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，$B(2,2,0)$，$M(0,2,1)$，则$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$，$\overrightarrow{BM}=(-2,0,1)$，设$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AC_1}=(-2x,2x,2x)$，$\overrightarrow{BQ}=y\overrightarrow{BM}=(-2y,0,y)$，则$P(2-2x,2x,2x)$，$Q(2-2y,2,y)$，所以$\overrightarrow{PQ}=(2x-2y,2-2x,y-2x)$. 直线$AC_1$与$BM$为异面直线，要使$PQ$最小，则$PQ$是$AC_1$，$BM$的公垂线段，故$\begin{cases}\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=0,\\\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PQ}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2(2x-2y)+2(2-2x)+2(y-2x)=0,\\-2(2x-2y)+(y-2x)=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{6},\\y=1,\end{cases}$所以$\overrightarrow{PQ}=\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$，故$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

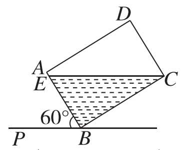
培优专题（五）　立体几何中的创新交汇问题

例 1　解：(1)椭圆的离心率为$\sin\alpha$.

证明：设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 由题意得圆柱母线与桌面所成的角为$90°-\alpha$，水面与地面平行，则椭圆的长轴与圆柱母线所成的角是$90°-\alpha$，所以$2a=\dfrac{20}{\cos\alpha}$，即$a=\dfrac{10}{\cos\alpha}$，易知$b=10$，则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\dfrac{100}{\cos^2\alpha}-100}=10\tan\alpha$，所以椭圆的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10\tan\alpha}{\dfrac{10}{\cos\alpha}}=\sin\alpha$.



(2)根据题意，画出截面图形，如图所示，过C作$CF\parallel BP$，交AD于点F，在$\text{Rt}\triangle CDF$中，$\angle FCD=\alpha$，$CD=20$ cm，所以$DF=20\tan\alpha$ cm，则$AF=(30-20\tan\alpha)$cm，此时容器内能容纳的溶液体积为$\pi\times10^2\times30-\dfrac{1}{2}\pi\times10^2\times20\tan\alpha=100\pi(30-10\tan\alpha)\text{cm}^3$，而容器内原有溶液的体积为$\pi\times10^2\times20=100\pi\times20(\text{cm}^3)$，令$100\pi(30-10\tan\alpha)\geqslant100\pi\times20$，解得$\tan\alpha\leqslant1$，所以$\alpha\leqslant45°$，故要使倾斜后容器内的液体不会溢出，角$\alpha$的最大值为$45°$.



(3)将该圆柱形容器放大为底面边长为20 cm，高为30 cm的正四棱柱，画出截面图形，如图所示，当$\alpha=60°$时，过C作$CE\parallel BP$，交AB于点E，在$\text{Rt}\triangle CBE$中，$BC=30$ cm，$\angle BCE=30°$，则$BE=10\sqrt{3}$ cm，则$S_{\triangle CBE}=\dfrac{1}{2}\times BC\times BE=150\sqrt{3}(\text{cm}^2)$，所以容器内溶液的体积为$150\sqrt{3}\times20=3000\sqrt{3}(\text{cm}^3)$，则倒出的溶液体积为$(20^3-3000\sqrt{3})\text{cm}^3$，因为$20^3-3000\sqrt{3}<3000$，所以放大后的正四棱柱形状容器不能满足要求，则圆柱形状容器也不能满足要求.

例 2　解：(1)坐标平面xOz的方程为$y=0$. 已知曲面C的方程为$\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{z^2}{4}=1$，当$y=0$时，平面$xOz$截曲面$C$所得交线上的点$M(x,0,z)$满足$x^2-\dfrac{z^2}{4}=1$，从而平面$xOz$截曲面$C$所得交线是平面$xOz$上以原点$O$为对称中心，焦点在$x$轴上，实轴长为2，虚轴长为4的双曲线.

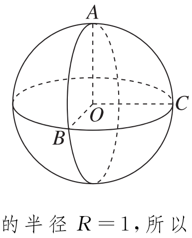
(2)证明：设$P(x_0,y_0,z_0)$是直线l上任意一点，由$\boldsymbol{d}=(1,0,2)$，$\overrightarrow{QP}=(x_0+1,y_0+1,z_0+2)$均为直线$l$的方向向量，得$\overrightarrow{QP}\parallel\boldsymbol{d}$，从而存在实数$\lambda$，使得$\overrightarrow{QP}=\lambda\boldsymbol{d}$，即$(x_0+1,y_0+1,z_0+2)=\lambda(1,0,2)$，则$\begin{cases}x_0+1=\lambda,\\y_0+1=0,\\z_0+2=2\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=\lambda-1,\\y_0=-1,\\z_0=2\lambda-2,\end{cases}$所以点$P$的坐标为$(\lambda-1,-1,2\lambda-2)$，于是$\dfrac{(\lambda-1)^2}{1}+\dfrac{(-1)^2}{1}-\dfrac{(2\lambda-2)^2}{4}=\lambda^2-2\lambda+1+1-(\lambda^2-2\lambda+1)=1$，因此点$P$的坐标总是满足曲面$C$的方程，从而直线$l$在曲面$C$上.

(3)直线l'在曲面C上，且过点$T(1,0,0)$，设$M(x_1,y_1,z_1)$是直线l'上任意一点，直线l'的方向向量为$\boldsymbol{d}'=(a,b,c)$，由$\boldsymbol{d}'$，$\overrightarrow{TM}$均为直线l'的方向向量，得$\overrightarrow{TM}\parallel\boldsymbol{d}'$，从而存在实数$t$，使得$\overrightarrow{TM}=t\boldsymbol{d}'$，即$(x_1-1,y_1,z_1)=t(a,b,c)$，则$\begin{cases}x_1-1=at,\\y_1=bt,\\z_1=ct,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=1+at,\\y_1=bt,\\z_1=ct,\end{cases}$所以点

M 的坐标为$(1+at,bt,ct)$.
因为 $M(x_1,y_1,z_1)$ 在曲面 C 上，所以 $\frac{(1+at)^2}{1}+\frac{(bt)^2}{1}-\frac{(ct)^2}{4}=1$，整理得 $\left(a^2+b^2-\frac{c^2}{4}\right)t^2+2at=0$，由题意，对任意的 t，有 $\left(a^2+b^2-\frac{c^2}{4}\right)t^2+2at=0$ 成立，所以 $a^2+b^2-\frac{c^2}{4}=0$，且 $2a=0$，所以 $c=2b$ 或 $c=-2b$，不妨取 $b=1$，则 $c=2$ 或 $c=-2$，所以 $\boldsymbol{d}'=(0,1,2)$ 或 $\boldsymbol{d}'=(0,1,-2)$，又直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{d}=(1,0,2)$，所以异面直线 l 与 l' 所成角的余弦值为 $\frac{|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}'|}{|\boldsymbol{d}||\boldsymbol{d}'|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$.

【自测题】

解：(1)如图，设单位球的球心为 O，球面三角形的三个顶点分别为 A,B,C，因为单位球面有一个球面三角形，三条边长均为 $\frac{\pi}{2}$，所以每个大圆弧长均为 $\frac{\pi}{2}$，又单位球的半径 $R=1$，所以球面三角形每条边所对的圆心角为 $\frac{\pi}{2}$，所以在三棱锥 A-OBC 中，OA,OB,OC 两两垂直. 易得 $OA\perp$平面 OBC，又 $OA\subset$平面 OAB，所以平面 $OAB\perp$平面 OBC，同理平面 $OAB\perp$平面 OCA，平面 $OCA\perp$平面 OBC，所以球面三角形任意两条边所在的半平面构成的二面角均为 $\frac{\pi}{2}$，所以球面三角形的三个角均为 $\frac{\pi}{2}$，从而此球面三角形的内角和为 $\frac{3\pi}{2}$.



(2)若将地球看作一个球体，在地球上0°经线和90°经线所在大圆与赤道所在大圆将球面平均分成8个全等的球面三角形，且每个球面三角形的3个角均为 $\frac{\pi}{2}$，内角和为 $\frac{3\pi}{2}$，从而每个球面三角形的面积 $S=\frac{4\pi R^2}{8}=\frac{\pi R^2}{2}$，则每个球面三角形的总曲率 $x=\frac{S}{R^2}=\frac{\pi}{2}$，
又球面三角形总曲率 x 与球面三角形内角和 θ 满足：$\theta=\pi+\alpha x$，其中 α 为常数，设 $\theta=f(x)$，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+\frac{\pi}{2}\alpha=\frac{3\pi}{2}$，从而 $\alpha=1$.
(3)将多面体的每个面视作可以自由伸缩的橡皮膜，使其膨胀为一个半径为 R 的球，每个顶点均在球面上，每条边变为球面上的边，每个多边形变为球面上的多边形，且膨胀前后 $\chi(\Omega)=V-E+F$ 不变.
不妨记球面仍为单位球面，半径 $R=1$，对于任意一个球面 k 边形，可用球面上的边分割成$(k-2)$个球面三角形，由(2)可知，$\alpha=1$，则每个球面三角形的内角和 $\theta=\pi+x=\pi+\frac{S}{R^2}=\pi+S$，即每个内角和为 θ 的球面三角形的面积为 $\theta-\pi$. 记 $\varphi=\sum_{i=1}^{k-2}\theta_i$ 为分割成$(k-2)$个球面三角形的球面 k 边形的内角和，则球面 k 边形的面积为 $\varphi-(k-2)\pi$.
记球面上多边形为 α_i，$i=1,2,\cdots,F$，对每一个球面多边形 α_i，设其边数为 l_i，内角和为 φ_i，面积为 S_i，
则由球面三角形角的定义可知，每个顶点处所有球面多边形的角之和为 2π，顶点数为 V，从而所有球面多边形内角和为 $\sum_{i=1}^{F}\varphi_i=2\pi V$，又球面多边形每条边被重复计算2次，棱数为 E，所以 $\sum_{i=1}^{F}l_i\pi=2E\pi$，则 $\sum_{i=1}^{F}(\varphi_i-l_i\pi+2\pi)=2\pi V-2\pi E+2\pi F$，
又所有球面多边形面积之和 $\sum_{i=1}^{F}S_i=4\pi R^2=4\pi$，故 $2\pi V-2\pi E+2\pi F=4\pi$，
故 $\chi(\Omega)=V-E+F=2$.

第八单元　解析几何

第49讲　直线的倾斜角与斜率、直线的方程

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. (1)交点　逆时针　最小正角
(2)$0°\leqslant\alpha<180°$
3. (2)$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
4. $y-y_0=k(x-x_0)$　$y=kx+b$
$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq0)$

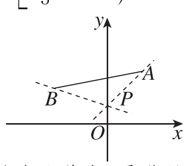
【对点演练】

1. $-\sqrt{3}$　120°　$(1,-\sqrt{3})$(答案不唯一)
[解析] 由题意知直线 l 的斜率 $k=\frac{3\sqrt{3}-0}{-5-(-2)}=-\sqrt{3}$，即 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，则倾斜角 $\theta=120°$，直线 l 的一个方向向量为$(1,-\sqrt{3})$.
2. 5　[解析] 因为 $k_{AB}=\frac{3-1}{1-(-2)}=\frac{2}{3}$，$k_{BC}=\frac{m-1}{4-(-2)}=\frac{m-1}{6}$，所以 $\frac{m-1}{6}=\frac{2}{3}$，解得 $m=5$.
3. $(-1,-2)$　[解析] 因为 $y+2=k(x+1)$，即 $y-(-2)=k[x-(-1)]$，所以该直线恒过点$(-1,-2)$.
4. $3x-2y=0$ 或 $x+y-5=0$　[解析] 当在两坐标轴上的截距为零时，直线方程为 $3x-2y=0$；当在两坐标轴上的截距不为零时，设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，则 $\frac{2}{a}+\frac{3}{a}=1$，解得 $a=5$，所以直线方程为 $x+y-5=0$.
5. ②④　[解析] 坐标平面内的任何一条直线均有倾斜角，①中说法正确；若一条直线的斜率为1，则此直线的倾斜角为45°，②中说法错误；直线的倾斜角的取值范围是$[0,\pi)$，③中说法正确；当直线的倾斜角为90°时，直线的斜率不存在，④中说法错误. 故填②④.
6. $[-\sqrt{3},0)\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　[解析] 当 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$k=\tan\alpha\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$；当 $\alpha\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，$k=\tan\alpha\in[-\sqrt{3},0)$. 综上可得 $k\in[-\sqrt{3},0)\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$.

● 课堂考点探究

例1　AD　[解析] 由题图知，$\frac{\pi}{2}>\alpha_2>\alpha_3>0$，$\alpha_1$ 为钝角，故 $k_2>k_3>0$，$k_1<0$. 故选 AD.

变式题　(1)$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$
(2)$\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$



[解析](1)由题得直线 $ax+y-1=0$ 的斜率为 $-a$，且过定点 $P(0,1)$，由图可得，要使直线与线段 AB 总有公共点，需满足 $-a\geqslant k_{PA}$ 或 $-a\leqslant k_{PB}$. ∵ $k_{PA}=1$，$k_{PB}=-\frac{1}{3}$，∴ $-a\geqslant1$ 或 $-a\leqslant-\frac{1}{3}$，∴ $a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant\frac{1}{3}$. 故 a 的取值范围为$(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.
(2)直线 $x+(a^2+1)y+1=0(a\in\mathbf{R})$ 的斜率为 $-\frac{1}{a^2+1}$，易得 $-1\leqslant-\frac{1}{a^2+1}<0$，设直线的倾斜角为 α，$0\leqslant\alpha<\pi$，则 $-1\leqslant\tan\alpha<0$，所以 $\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha<\pi$.

例2　(1)C　(2)C　[解析](1)由题意，当直线经过原点时，直线的方程为 $x+y=0$；当直线不经过原点时，设直线的方程为 $\frac{x}{4a}+\frac{y}{a}=1$，则 $\frac{-10}{4a}+\frac{10}{a}=1$，解得 $a=\frac{15}{2}$，此时直线的方程为 $\frac{x}{30}+\frac{2y}{15}=1$，即 $x+4y-30=0$. 故选 C.
(2)由题知 $M(2,4)$，$N(3,2)$，则中位线 MN 所在直线的方程为 $\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-2}{3-2}$，整理得 $2x+y-8=0$. 故选 C.

变式题　(1)B　(2)$3x+y-6=0$　(3)-1 或 $-\frac{1}{2}$　$\left[-\frac{1}{2},0\right]$　[解析](1)∵直线 l 的一个方向向量为$(1,-2)$，∴直线 l 的斜率 $k=\frac{-2}{1}=-2$，又∵直线 l 过点$(-3,-2)$，∴直线 l 的方程为 $y+2=-2(x+3)$，即 $2x+y+8=0$. 故选 B.
(2)因为 $|OA|=|AB|$，所以 $\angle AOB=\angle ABO$，即 $k_{AB}=-k_{OA}=-3$，所以直线 AB 的方程为 $y-3=-3(x-1)$，即 $3x+y-6=0$.
(3)当 $k=0$ 时，$y=1$，不符合直线 l 在两坐标轴上的截距相等. 当 $k\neq0$ 时，令 $x=0$，得 $y=2k+1$，令 $y=0$，得 $x=-2-\frac{1}{k}$，由题意可得 $-2-\frac{1}{k}=2k+1$，解得 $k=-1$ 或 $k=-\frac{1}{2}$. ∵直线 l 的方程为 $kx-y+1+2k=0$，即 $y=kx+1+2k$，直线 l 不经过第三象限，∴ $k\leqslant0$ 且 $1+2k\geqslant0$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant0$，故实数 k 的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

例3　解：(1)设直线 l：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，因为直线 l 经过点 $P(4,1)$，所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$. 因为 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1\geqslant2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{4}{\sqrt{ab}}$，所以 $ab\geqslant16$，当且仅当 $a=8$，$b=2$ 时等号成立，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab\geqslant8$.
所以当 $a=8$，$b=2$ 时，$\triangle AOB$ 的面积最小，此时直线 l 的方程为 $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}=1$，即 $x+4y-8=0$.

13323589466

(2)因为$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1,a>0,b>0$,所以$|OA|+|OB|=a+b=(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)=5+\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\geqslant 9$,当且仅当$a=6,b=3$时等号成立,所以当$|OA|+|OB|$取最小值时,直线$l$的方程为$x+2y-6=0$.

变式题 BCD [解析]对于A,因为直线l的方程可化为$a(x-2)=y-2$,所以直线l过定点$A(2,2)$,故A错误.对于B,因为直线l过定点$A(2,2)$,且$k_{PA}=2,k_{QA}=0$,所以$a\in[0,2]$,故B正确.对于C,当直线$l\perp PA$时,点P到直线l的距离最大,最大距离为$|PA|=\sqrt{5}$,故C正确.对于D,当$a=-1$时,直线l的方程为$x+y-4=0$,设点P关于直线l的对称点为$P'(m,n)$,则$\begin{cases}\frac{n-4}{m-3}=1,\\ \frac{m+3}{2}+\frac{n+4}{2}-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=0,\\ n=1,\end{cases}$所以$P'(0,1)$,所以$(|PM|+|QM|)_{\min}=|P'Q|=\sqrt{26}$,故D正确.故选BCD.

第50讲 两直线的位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$ $k_1\cdot k_2=-1$ $A_1A_2+B_1B_2=0$ $k_1\neq k_2$ $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$
2. 交点坐标 (1)相交 交点的坐标 (2)无公共点 平行
3. $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

【对点演练】

1. 直角 [解析]因为边AB所在直线的斜率$k_1=-\frac{1}{2}$,边BC所在直线的斜率$k_2=2$,且$k_1k_2=-1$,所以$AB\perp BC$,所以$\triangle ABC$是直角三角形.
2. 15或5 [解析]点$P(-1,2)$到直线$l:4x-3y+C=0$的距离为1,即$\frac{|-4-6+C|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$,即$25=(C-10)^2$,故$C=15$或$C=5$.
3. $4x-3y-6=0$ [解析]由$\begin{cases}2x+y-8=0,\\ x-2y+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\ y=2,\end{cases}$所以两条直线的交点坐标为$(3,2)$,又直线$4x-3y-7=0$的斜率为$\frac{4}{3}$,故所求直线方程为$y-2=\frac{4}{3}(x-3)$,即$4x-3y-6=0$.
4. $\frac{1}{6}$ [解析]方法一:因为直线$l_1:x+2my-1=0$与$l_2:(3m-1)x-my+1=0$平行,所以两直线的斜率相等或斜率均不存在,所以$-\frac{1}{2m}=\frac{3m-1}{m}$或$m=0$,即$m=\frac{1}{6}$或$m=0$.当$m=0$时,$l_1$与$l_2$重合,不符合题意,所以$m=\frac{1}{6}$.
方法二:因为$l_1/\!/l_2$,所以$\begin{cases}1\times(-m)-(3m-1)\times 2m=0,\\ 1\times 1-(3m-1)\times(-1)\neq 0,\end{cases}$解得$m=\frac{1}{6}$.
5. 0或1 [解析]当$1-4a=0$或$a+4=0$时,两直线不垂直,不符合题意;当$1-4a\neq 0$且$a+4\neq 0$时,由$\left(-\frac{3a+2}{1-4a}\right)\times\left(-\frac{5a-2}{a+4}\right)=-1$,得$a=0$或$a=1$.
6. $\frac{7}{2}$ [解析]依题意得$a=6$,$3x+4y-12=0$可变形为$6x+8y-24=0$,所以两条平行直线之间的距离为$\frac{|11+24|}{\sqrt{36+64}}=\frac{7}{2}$.

● 课堂考点探究

例1 解:(1)当$m=-6$时,直线l_1的方程为$-3x+5y=23$,l_2的方程为$x=4$,显然两直线相交;当$m\neq-6$时,由$\frac{m+3}{2}\neq\frac{5}{m+6}$,解得$m\neq-1,m\neq-8$.综上,当$m\neq-1$且$m\neq-8$时,直线$l_1$与$l_2$相交.
(2)由(1)知,当$m=-6$时,直线l_1与l_2相交.当$m\neq-6$时,由$\frac{m+3}{2}=\frac{5}{m+6}\neq\frac{5-3m}{8}$,解得$m=-1$(舍去)或$m=-8$,所以当$m=-8$时,直线$l_1$与$l_2$平行.
(3)由$\frac{m+3}{2}=\frac{5}{m+6}=\frac{5-3m}{8}$,得$m=-1$,所以当$m=-1$时,直线$l_1$与$l_2$重合.
(4)由$2(m+3)+5(m+6)=0$,得$m=-\frac{36}{7}$,所以当$m=-\frac{36}{7}$时,直线l_1与l_2垂直.

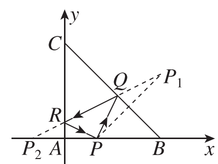
变式题 (1)A (2)C (3)$x-2y+4=0$
[解析](1)若直线$x+my-1=0$与直线$nx+y+1=0$平行,则$m\neq 0,n\neq 0$,所以$\frac{1}{n}=\frac{m}{1}\neq\frac{-1}{1}$,所以$mn=1$,且$m\neq-1,n\neq-1$,充分性成立.当$m=-1,n=-1$时,$mn=1$,但直线$x-y-1=0$与$-x+y+1=0$重合,必要性不成立.故选A.
(2)当三条直线交于一点时,可将平面分为六个部分,由$\begin{cases}x-2y+2=0,\\ x-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ y=2,\end{cases}$将$\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}$代入$l_3:x+ky=0$中,得$2k+2=0$,解得$k=-1$.当$l_3:x+ky=0$与$l_1:x-2y+2=0$平行时,三条直线可将平面分为六个部分,此时$k=-2$;当$l_3:x+ky=0$与$l_2:x-2=0$平行时,三条直线可将平面分为六个部分,此时$k=0$.综上,满足条件的$k$的值共有3个.故选C.
(3)直线$x-2y+4=0$与y轴的交点为$C(0,2)$,点$A(2,3)$,$B(3,1)$,则直线AB的斜率$k=\frac{3-1}{2-3}=-2$,所以AB边上的高CE所在直线的斜率为$\frac{1}{2}$,所以高CE所在直线的方程为$x-2y+4=0$.

例2 (1)D (2)(1,2) [解析](1)直线$3x+my-3=0$过定点$(1,0)$,则直线$3x+my-3=0$到直线$6x+4y+1=0$的距离即为点$(1,0)$到直线$6x+4y+1=0$的距离,故所求距离$d=\frac{|6\times 1+4\times 0+1|}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{52}}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$.故选D.
(2)当OP垂直于直线$x+2y-5=0$时,$|OP|$取得最小值,此时$k_{OP}=2$,则OP所在直线的方程为$y=2x$.由$\begin{cases}x+2y-5=0,\\ y=2x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}$即$P(1,2)$.

变式题 (1)B (2)$y=2$或$4x-3y+2=0$
[解析](1)由$y=k(x+1)$,可得直线过定点$(-1,0)$,易知当点$(-1,0)$与$(0,-1)$的连线与直线$y=k(x+1)$垂直时,所求距离最大,所以点$(0,-1)$到直线$y=k(x+1)$的距离的最大值为$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.故选B.
(2)由$\begin{cases}x-2y+3=0,\\ 2x+3y-8=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\ y=2,\end{cases}$$\therefore l_1$与$l_2$的交点为$(1,2)$.当所求直线的斜率不存在时,其方程为$x=1$,点$P(0,4)$到该直线的距离为1,不满足题意,$\therefore$所求直线的斜率存在.设所求直线的方程为$y-2=k(x-1)$,即$kx-y+2-k=0$,$\because$点$P(0,4)$到所求直线的距离为2,$\therefore 2=\frac{|-2-k|}{\sqrt{1+k^2}}$,解得$k=0$或$k=\frac{4}{3}$,$\therefore$所求直线方程为$y=2$或$4x-3y+2=0$.

例3 (1)$2x-3y-9=0$ (2)$x+4y-4=0$
[解析](1)设直线l关于点$A(-1,-2)$对称的直线m上的任意一点为$N(x,y)$,则$N(x,y)$关于点$A(-1,-2)$的对称点为$N'(-2-x,-4-y)$,$\therefore N'(-2-x,-4-y)$在直线$l:2x-3y+1=0$上,则$2(-2-x)-3(-4-y)+1=0$,可得直线m的方程为$2x-3y-9=0$.
(2)设$A(a,8-2a)$,由题意知,点A关于点P的对称点$B(-a,2a-6)$在直线l_2上,则$-a-3(2a-6)+10=0$,解得$a=4$,即点$A(4,0)$在直线l上,由截距式得直线l的方程为$\frac{x}{4}+y=1$,即$x+4y-4=0$.

例4 (1)D (2)$\frac{4}{3}$ [解析](1)易知点$A(-3,5)$,$B(2,8)$在直线$x-y+1=0$的同侧,设点A关于直线$x-y+1=0$的对称点为$C(a,b)$,则$\begin{cases}\frac{a-3}{2}-\frac{5+b}{2}+1=0,\\ \frac{b-5}{a+3}=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\ b=-2,\end{cases}$$\therefore C(4,-2)$.连接$BC$,则$|PA|+|PB|$的最小值为$|BC|=\sqrt{(4-2)^2+(-2-8)^2}=2\sqrt{26}$.故选D.
(2)以A为坐标原点,AB所在直线为x轴,AC所在直线为y轴,建立如图所示的平面直角坐标系,由题意可知$B(4,0)$,$C(0,4)$,$A(0,0)$,



则直线BC的方程为$x+y-4=0$.设$P(t,0)(0<t<4)$,可得点P关于直线BC的对称点P_1的坐标为$(4,4-t)$,点P关于y轴的对称点P_2的坐标为$(-t,0)$.根据反射定律可知P_1,P_2连线所在直线就是光线RQ所在的直线.由P_1,P_2两点的坐标可得直线P_1P_2的方程为$y=\frac{4-t}{4+t}\cdot(x+t)$.设$\triangle ABC$的重心为$G$,易知$G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$,因为重心$G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$在光线$RQ$上,所以$\frac{4}{3}=\frac{4-t}{4+t}\cdot\left(\frac{4}{3}+t\right)$,可得$t=\frac{4}{3}$,即$|AP|=\frac{4}{3}$.

变式题 (1)D (2)$9x-46y+102=0$
[解析](1)由题意得$k=\tan 135°=-1$.设点$(2,4)$关于直线$l:y=-x+1$的对称点为(m,n),则$\begin{cases}\frac{n-4}{m-2}=1,\\ \frac{n+4}{2}=-\frac{m+2}{2}+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-3,\\ n=-1,\end{cases}$所以反射光线所在直线的方程为$y=\frac{0-(-1)}{5-(-3)}\cdot(x-5)=\frac{1}{8}(x-5)$.当$x=13$时,$y=1$;当$x=14$时,$y=\frac{9}{8}$.所以反射光线还经过点$(13,1)$和$\left(14,\frac{9}{8}\right)$.故选D.
(2)在直线m上取一点$M(2,0)$,则点$M(2,0)$关于直线l的对称点M'必在直线m'上.设$M'(a,b)$,

则$\begin{cases}2\times\dfrac{a+2}{2}-3\times\dfrac{b+0}{2}+1=0,\\ \dfrac{b-0}{a-2}\times\dfrac{2}{3}=-1,\end{cases}$可得$M'\left(\dfrac{6}{13},\dfrac{30}{13}\right)$.设直线$m$与直线$l$的交点为$N$,由$\begin{cases}2x-3y+1=0,\\3x-2y-6=0,\end{cases}$得$N(4,3)$.因为直线$m'$经过点$N(4,3)$,所以由两点式得直线$m'$的方程为$9x-46y+102=0$.

例 5 (1)$2x-3y-8=0$ (2)$x-y+4=0$

[解析](1)方法一:由题意,所求的直线与直线$3x+2y-5=0$垂直,可设所求直线的方程为$2x-3y+m=0$,又直线过点$P(1,-2)$,则$2\times1+3\times2+m=0$,解得$m=-8$,所以过点$P(1,-2)$且与直线$3x+2y-5=0$垂直的直线方程是$2x-3y-8=0$.

方法二:因为直线$3x+2y-5=0$的斜率$k=-\dfrac{3}{2}$,所以过点$P(1,-2)$且与直线$3x+2y-5=0$垂直的直线方程为$y+2=\dfrac{2}{3}(x-1)$,化简得$2x-3y-8=0$.

(2)方法一:由$\begin{cases}3x+4y-2=0,\\2x+y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$由平行关系可设直线$l_4$的方程为$x-y+c=0$,其中$c\neq-1$,将$(-2,2)$代入$l_4$的方程可得$c=4$,∴直线$l_4$的方程为$x-y+4=0$.

方法二:由题意可设直线l_4的方程为$(3x+4y-2)+\lambda(2x+y+2)=0$,即$(2\lambda+3)x+(4+\lambda)y-2+2\lambda=0$①,因为直线$l_4$与直线$l_3:x-y-1=0$平行,所以$-(2\lambda+3)=4+\lambda$,解得$\lambda=-\dfrac{7}{3}$,代入①式得直线$l_4$的方程为$-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{5}{3}y-\dfrac{20}{3}=0$,化简得$x-y+4=0$.

变式题 1 $4x-3y+9=0$ [解析]方法一:由$\begin{cases}2x+3y+1=0,\\x-3y+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\dfrac{5}{3},\\y=\dfrac{7}{9},\end{cases}$即直线$2x+3y+1=0$与$x-3y+4=0$的交点坐标为$\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{9}\right)$.因为直线$l$与直线$3x+4y-7=0$垂直,所以直线$l$的斜率$k=\dfrac{4}{3}$,由点斜式得直线$l$的方程为$y-\dfrac{7}{9}=\dfrac{4}{3}\left(x+\dfrac{5}{3}\right)$,即$4x-3y+9=0$.

方法二:由题可设直线l的方程为$4x-3y+m=0$,由$\begin{cases}2x+3y+1=0,\\x-3y+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\dfrac{5}{3},\\y=\dfrac{7}{9},\end{cases}$代入$4x-3y+m=0$,可得$m=9$,故直线$l$的方程为$4x-3y+9=0$.

方法三:由题意可设直线l的方程为$(2x+3y+1)+\lambda(x-3y+4)=0$,即$(2+\lambda)x+(3-3\lambda)y+1+4\lambda=0$①,因为直线$l$与直线$3x+4y-7=0$垂直,所以$3(2+\lambda)+4(3-3\lambda)=0$,解得$\lambda=2$,代入①式得直线$l$的方程为$4x-3y+9=0$.

变式题 2 C [解析]由图可知,原点到直线的距离为定值.对于A,原点到直线$x+y\sin\theta-3=0$的距离为$\dfrac{|-3|}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$,不是定值,故A错误;对于B,原点到直线$x\cos\theta+y+3\sin\theta=0$的距离为$\dfrac{|3\sin\theta|}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}$,不是定值,故B错误;对于C,原点到直线$x\cos\theta+y\sin\theta-2=0$的距离为$\dfrac{|-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2$,是定值,故C正确;对于D,原点到直线$x\cos\theta+y-3=0$的距离为$\dfrac{|-3|}{\sqrt{\cos^2\theta+1}}$,不是定值,故D错误.故选C.

第 51 讲 圆的方程

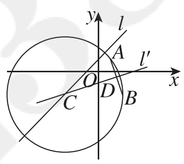
● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 一定点 定长 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ (a,b) r $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
2. (1)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$
(2)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$
(3)$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$

【对点演练】

1. (1,2) 1 [解析]由$x^2+y^2-2x-4y+4=0$,得$(x-1)^2+(y-2)^2=1$,所以圆心坐标为(1,2),半径为1.
2. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ $x^2+y^2-2x-2y=0$ [解析]∵$P(1,1)$为圆心,且圆P经过原点,∴半径$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,∴所求圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$,化为一般方程,可得$x^2+y^2-2x-2y=0$.
3. $(x+3)^2+(y+2)^2=25$ [解析]方法一:设圆心C的坐标为(a,b).因为圆心C在直线$l:x-y+1=0$上,所以$a-b+1=0$①.因为A,B是圆上两点,所以$|CA|=|CB|$,根据两点间的距离公式,有$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b+2)^2}$,即$a-3b-3=0$②.由①②可得$a=-3,b=-2$,所以圆心$C$的坐标是$(-3,-2)$,圆的半径$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5$,所以所求圆的标准方程是$(x+3)^2+(y+2)^2=25$.
方法二:如图,设线段AB的中点为D.由A,B两点的坐标分别为$(1,1),(2,-2)$,可得点D的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$,直线$AB$的斜率$k_{AB}=\dfrac{-2-1}{2-1}=-3$,因此线段$AB$的垂直平分线$l'$的方程是$y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$,即$x-3y-3=0$.由垂径定理可知,圆心$C$也在线段$AB$的垂直平分线上,由$\begin{cases}x-3y-3=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\y=-2,\end{cases}$所以圆心$C$的坐标是$(-3,-2)$,圆的半径$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5$,所以所求圆的标准方程是$(x+3)^2+(y+2)^2=25$.



4. $(-3,-2)\cup(2,+\infty)$ [解析]由题意得$\begin{cases}m^2+(-2)^2-8>0,\\1^2+2^2+m-2\times2+2>0,\end{cases}$解得$-3<m<-2$或$m>2$,故实数$m$的取值范围为$(-3,-2)\cup(2,+\infty)$.
5. $(x-2)^2+(y+2)^2=4$或$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ [解析]由题意知圆心的坐标为$(2,-2)$或$(-2,2)$,所以圆的方程为$(x-2)^2+(y+2)^2=4$或$(x+2)^2+(y-2)^2=4$.
6. -4 [解析]因为点$P(x,y)$为圆$x^2+y^2=1$上的动点,所以$x^2+4y=1-y^2+4y=-(y-2)^2+5$.因为$y\in[-1,1]$,所以当$y=-1$时,$x^2+4y$取得最小值$-4$.

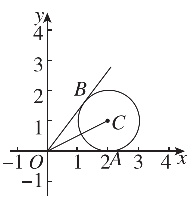
● 课堂考点探究

例 1 (1)$(x-1)^2+(y+1)^2=5$ (2)$x^2+y^2-4x-6y=0$$\left(\text{或 } x^2+y^2-4x-2y=0 \text{ 或 } x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{14}{3}y=0 \text{ 或 } x^2+y^2-\dfrac{16}{5}x-2y-\dfrac{16}{5}=0\right)$ [解析](1)方法一:∵点M在直线$2x+y-1=0$上,∴可设点M为$(a,1-2a)$,又点$(3,0)$和$(0,1)$均在$\odot M$上,∴点M到点$(3,0),(0,1)$的距离相等,∴$\sqrt{(a-3)^2+(1-2a)^2}=\sqrt{a^2+(-2a)^2}$,即$a^2-6a+9+4a^2-4a+1=5a^2$,解得$a=1$,∴$M(1,-1)$,$\odot M$的半径$R=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$,∴$\odot M$的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=5$.
方法二:由题可知,M是以$(3,0)$和$(0,1)$为端点的线段的垂直平分线$y=3x-4$与直线$2x+y-1=0$的交点,即$M(1,-1)$,则$\odot M$的半径$R=\sqrt{5}$,故$\odot M$的方程为$(x-1)^2+(y+1)^2=5$.
(2)若选$(0,0),(4,0),(-1,1)$三点,设圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,把这三点的坐标分别代入可得$\begin{cases}F=0,\\4^2+4D+F=0,\\(-1)^2+1^2-D+E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}F=0,\\D=-4,\\E=-6,\end{cases}$所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$.同理,若选$(0,0),(4,0),(4,2)$三点,则圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y=0$.若选$(0,0),(-1,1),(4,2)$三点,则圆的方程为$x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{14}{3}y=0$.若选$(4,0),(-1,1),(4,2)$三点,则圆的方程为$x^2+y^2-\dfrac{16}{5}x-2y-\dfrac{16}{5}=0$.所以满足条件的圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$$\left(\text{或 } x^2+y^2-4x-2y=0 \text{ 或 } x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x-\dfrac{14}{3}y=0 \text{ 或 } x^2+y^2-\dfrac{16}{5}x-2y-\dfrac{16}{5}=0\right)$.

变式题 (1)$x^2+y^2-2x-4y=0$
(2)$(x-1)^2+(y+2)^2=2$
[解析](1)方法一:设圆C的一般方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$,因为圆$C$过点$O(0,0)$,$A(2,0)$,$B(0,4)$,所以$\begin{cases}F=0,\\4+2D+F=0,\\16+4E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=-2,\\E=-4,\\F=0,\end{cases}$所以圆$C$的一般方程为$x^2+y^2-2x-4y=0$.
方法二:已知圆C过点$O(0,0)$,$A(2,0)$,$B(0,4)$,则AB为圆C的直径,故圆心C的坐标为(1,2),圆C的半径$r=\sqrt{(0-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$,故圆$C$的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=5$,即$x^2+y^2-2x-4y=0$.
(2)∵点$A(2,-1)$在直线$x+y=1$上,∴圆与直线$x+y=1$相切于点A,设圆心为S,则$k_{SA}=1$,∴直线SA的方程为$y+1=x-2$,即$y=x-3$,与$y=-2x$联立,解得$x=1,y=-2$,即圆心为$S(1,-2)$,∴半径$r=\sqrt{(2-1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$,故所求圆的标准方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=2$.

例 2 ABD

[解析]由实数x,y满足方程$x^2+y^2-4x-2y+4=0$,可得点(x,y)在圆$(x-2)^2+(y-1)^2=1$上,设圆心为C,作出圆C如图所示.



$\dfrac{y}{x}$表示点(x,y)与

坐标原点 O 连线的斜率,设过坐标原点的圆的切线方程为 $y=kx$,则 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$,所以 $\frac{y}{x}\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$,所以 $\left(\frac{y}{x}\right)_{\max}=\frac{4}{3}$,$\left(\frac{y}{x}\right)_{\min}=0$,故 A,B 正确;$x^2+y^2$ 表示圆上的点 (x,y) 到坐标原点的距离的平方,圆上的点 (x,y) 到坐标原点的距离的最大值为 $|OC|+1$,所以 x^2+y^2 的最大值为 $(|OC|+1)^2$,又 $|OC|=\sqrt{2^2+1^2}$,所以 x^2+y^2 的最大值为 $6+2\sqrt{5}$,故 C 错误;因为 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 可化为 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$,所以可设 $x=2+\cos\theta$,$y=1+\sin\theta$,则 $x+y=2+\cos\theta+1+\sin\theta=3+\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $x+y$ 的最大值为 $3+\sqrt{2}$,故 D 正确.故选 ABD.

变式题 解:将方程 $x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 变形可得 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$,则点 (x,y) 是以点 $C(4,3)$ 为圆心,2 为半径的圆上任意一点.

(1)根据题意,当 $x\neq3$ 时,$p=\frac{y+1}{x-3}$ 的几何意义为圆上任意一点与点 $(3,-1)$ 连线的斜率.设 $Q(3,-1)$,过点 Q 的圆 C 的切线斜率为 k,则切线方程为 $y+1=k(x-3)$,即 $kx-y-3k-1=0$,则点 C 到切线的距离 $d=\frac{|4k-3-3k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{-4\pm2\sqrt{13}}{3}$,故 p 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{-4-2\sqrt{13}}{3}\right]\cup\left[\frac{-4+2\sqrt{13}}{3},+\infty\right)$.

(2)由 $s=2x-y$,得 $2x-y-s=0$,该方程表示一条直线,易知当直线与圆相切时,s 取得最大值和最小值.当直线与圆相切时,$\frac{|5-s|}{\sqrt{1+4}}=2$,解得 $s=5-2\sqrt{5}$ 或 $s=5+2\sqrt{5}$,则 s 的最小值为 $5-2\sqrt{5}$,最大值为 $5+2\sqrt{5}$.

(3)$w=x^2+y^2-10x+2y+26=(x-5)^2+(y+1)^2$,

设 $t=\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}$,则 t 的几何意义为圆 C 上任意一点与点 $(5,-1)$ 间的距离,

设 $N(5,-1)$,则 $|CN|=\sqrt{17}$,

则有 $\sqrt{17}-2\leqslant t\leqslant\sqrt{17}+2$,

所以 $21-4\sqrt{17}\leqslant w\leqslant21+4\sqrt{17}$,故 w 的取值范围为 $[21-4\sqrt{17},21+4\sqrt{17}]$.

例 3 (1)B (2)12 [解析] (1)方法一:设点 P 的坐标为 (x_0,y_0),∵点 P 在圆 C:$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 上,∴可设 $\begin{cases}x_0=3+\cos\theta,\\y_0=4+\sin\theta.\end{cases}$ ∵$\angle APB=90°$,∴$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,可得 $(x_0+m)(x_0-m)+y_0^2=0$,∴$m^2=x_0^2+y_0^2=26+6\cos\theta+8\sin\theta=26+10\sin(\theta+\varphi)\left(\tan\varphi=\frac{3}{4}\right)$,∴$4\leqslant m\leqslant6$,∴$m$ 的最大值为 6.故选 B.

方法二:设 O 为坐标原点,连接 OP,OC,在 Rt△APB 中,原点 O 为斜边的中点,$|AB|=2m\ (m>0)$,∴$m=|OP|\leqslant|OC|+r$(r 为圆 C 的半径),又 $C(3,4)$,$r=1$,∴$|OP|\leqslant6$,即 $m\leqslant6$.故选 B.

(2)由题意知 $\overrightarrow{PA}=(2-x,-y)$,$\overrightarrow{PB}=(-2-x,-y)$,所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2+y^2-4$,又点 $P(x,y)$ 是圆上的点,故其坐标满足方程 $x^2+(y-3)^2=1$,故 $x^2=-(y-3)^2+1$,所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-(y-3)^2+1+y^2-4=6y-12$.由圆的方程 $x^2+(y-3)^2=1$,易知 $2\leqslant y\leqslant4$,故当 $y=4$ 时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最大值,最大值为 $6\times4-12=12$.

变式题 B [解析] 方法一:易得 $|PA|^2+|PB|^2=4$,可得 $\left(\frac{|PA|+|PB|}{2}\right)^2\leqslant\frac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=2$,当且仅当 $|PA|=|PB|=\sqrt{2}$ 时取等号,所以 $|PA|+|PB|\leqslant2\sqrt{2}$.故选 B.

方法二:当 P 与 A 或 B 重合时,$|PA|+|PB|=2$;当 P 不与 A 和 B 重合时,易得 $|PA|^2+|PB|^2=4$,设 $\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,$|PA|=2\cos\theta$,$|PB|=2\sin\theta$,则 $|PA|+|PB|=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $(|PA|+|PB|)_{\max}=2\sqrt{2}$.故选 B.

例 4 解:(1)设动点 P 的坐标为 (x_1,y_1),因为 $M(1,0)$,$N(2,0)$,

且 $|PN|=\sqrt{2}|PM|$,

所以 $\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$,

整理得 $x_1^2+y_1^2=2$,所以动点 P 的轨迹 C 的方程为 $x^2+y^2=2$.

(2)设点 Q 的坐标为 (x,y),点 A 的坐标为 (x_0,y_0),因为 Q 是线段 AB 上靠近点 B 的三等分点,所以 $\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{QB}$,即 $(x-x_0,y-y_0)=2(6-x,-y)$,解得 $\begin{cases}x_0=3x-12,\\y_0=3y,\end{cases}$ 又点 A 在轨迹 C 上运动,所以 $(3x-12)^2+(3y)^2=2$,化简得 $y^2+(x-4)^2=\frac{2}{9}$,所以点 Q 的轨迹方程为 $y^2+(x-4)^2=\frac{2}{9}$.

变式题 (1)BCD [解析] 设 $P(x,y)$,由条件可得 $\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,即 $x^2+y^2-8x=0$,所以 C 的方程为 $(x-4)^2+y^2=16$,故 A 错误;由对称性可知存在 $D(12,0)$,$E(6,0)$ 满足条件,故 B 正确;$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=(-4-x,-y)\cdot(-x,-y)=x^2+4x+y^2=12x$,$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PO}=(2-x,-y)\cdot(-x,-y)=x^2-2x+y^2=6x$,$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(-4-x)^2+(-y)^2}=4\sqrt{x+1}$,$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(2-x)^2+(-y)^2}=2\sqrt{x+1}$,所以 $\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PO}|}=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PO}|}$,即 $\cos\angle APO=\cos\angle BPO$,所以 $\angle APO=\angle BPO$,故 C 正确;连接 BQ,则 $k_{BQ}=-3$,所以线段 BQ 的垂直平分线 l 的斜率 $k=\frac{1}{3}$,BQ 的中点坐标为 $(1,3)$,则线段 BQ 的垂直平分线 l 的方程为 $y-3=\frac{1}{3}(x-1)$,即 $x-3y+8=0$,圆 C 的圆心 $(4,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{12}{\sqrt{10}}<4$,所以直线 l 与圆 C 相交,故在 C 上存在点 M,使得 $|MQ|=|MB|$,故 D 正确.故选 BCD.

(2)解:①设线段 AP 的中点为 $M(x,y)$,由中点坐标公式可知,P 点坐标为 $(2x-2,2y)$.因为 P 点在圆 $x^2+y^2=4$ 上,所以 $(2x-2)^2+(2y)^2=4$,故线段 AP 中点的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.

②设线段 PQ 的中点为 $N(x,y)$,连接 BN,在 Rt△PBQ 中,$|PN|=|BN|$,设 O 为坐标原点,连接 ON,OP,则 $ON\perp PQ$,所以 $|OP|^2=|ON|^2+|PN|^2=|ON|^2+|BN|^2$,

所以 $x^2+y^2+(x-1)^2+(y-1)^2=4$,

故线段 PQ 中点的轨迹方程为 $x^2+y^2-x-y-1=0$.

第 52 讲 直线与圆、圆与圆的位置关系

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $<\quad=\quad>\quad>\quad=\quad<$
2. $d>r_1+r_2\quad d=r_1+r_2$
   $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2\quad d=|r_1-r_2|$
   $d<|r_1-r_2|$
3. $2\sqrt{r^2-d^2}$
   $\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_M+x_N)^2-4x_Mx_N}$

【对点演练】

1. 相交 [解析] 圆心 $(0,0)$ 到直线 $y=x+1$,即直线 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,所以直线与圆相交.
2. $\sqrt{10}$ [解析] 方法一:由 $\begin{cases}3x+y-6=0,\\x^2+y^2-2y-4=0,\end{cases}$ 消去 y,得 $x^2-3x+2=0$,解得 $x_1=1$,$x_2=2$,所以直线 l 与圆 C 相交,有两个公共点.设两个公共点分别为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,把 $x_1=1$,$x_2=2$ 分别代入 $3x+y-6=0$,得 $y_1=3$,$y_2=0$,所以直线 l 与圆 C 的两个公共点分别为 $A(1,3)$,$B(2,0)$,则 $|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$.
   方法二:圆 C:$x^2+y^2-2y-4=0$ 的圆心为 $C(0,1)$,半径 $r=\sqrt{5}$,因为圆心 C 到直线 l:$3x+y-6=0$ 的距离 $d=\frac{|1-6|}{\sqrt{9+1}}=\frac{5}{\sqrt{10}}$,所以直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $2\times\sqrt{5-\frac{25}{10}}=\sqrt{10}$.
3. $x+\sqrt{2}y-3\sqrt{3}=0$ [解析] ∵点 $A(\sqrt{3},\sqrt{6})$ 是圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的一点,∴$(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2=r^2$,即 $r^2=9$.圆 $x^2+y^2=9$ 的圆心为 $O(0,0)$,直线 OA 的斜率 $k_{OA}=\frac{\sqrt{6}-0}{\sqrt{3}-0}=\sqrt{2}$,∵直线 OA 与过点 A 的圆的切线垂直,∴过点 A 的圆的切线的斜率是 $-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,∴过点 A 的圆的切线方程是 $y-\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{3})$,即 $x+\sqrt{2}y-3\sqrt{3}=0$.
4. $x-y+2=0$ [解析] 由 $x^2+y^2-4=0$,$x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 两式相减得 $4x-4y+8=0$,即 $x-y+2=0$,故公共弦所在直线的方程为 $x-y+2=0$.
5. $\pm4\sqrt{2}$ 或 $\pm2\sqrt{3}$ [解析] 两圆的圆心距 $d=\sqrt{2^2+a^2}$,由两圆相切(外切或内切),得 $\sqrt{2^2+a^2}=5+1$ 或 $\sqrt{2^2+a^2}=5-1$,解得 $a=\pm4\sqrt{2}$ 或 $a=\pm2\sqrt{3}$.
6. $x=3$ 或 $5x+12y-39=0$ [解析] 由题意知 P 在圆外.当切线的斜率不存在时,切线方程为 $x=3$,满足题意;当切线的斜率存在时,设斜率为 k,则切线方程为 $y-2=k(x-3)$,即 $kx-y+2-3k=0$,所以 $\frac{|k\times0-0+2-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=3$,解得 $k=-\frac{5}{12}$,所以切线方程为 $5x+12y-39=0$.综上,切线方程为 $x=3$ 或 $5x+12y-39=0$.

● 课堂考点探究

例 1 (1)BD (2)$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$

[解析] (1)圆 C 的圆心为 $C(1,-1)$,半径 $r=2$,则圆心 $C(1,-1)$ 到直线 l:$x+y-\sqrt{2}=0$ 的距离 $d=\frac{|1-1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=1<2$,所以直线 l 与圆 C 相交,故选项 A 错误,选项 B 正确.到直线 l 的距离为 1 的点的轨迹是与直线 l 平行且与直线 l 的

距离为1的两条平行直线，设到直线 l 的距离为1的直线的方程为 $x+y+c=0$，则 $\frac{|c-(-\sqrt{2})|}{\sqrt{2}}=1$，解得 $c=0$ 或 $c=-2\sqrt{2}$. 当 $c=0$ 时，到直线 l 的距离为1的直线的方程为 $x+y=0$，此直线过圆心 $C(1,-1)$，所以此直线与圆 C 有两个交点；当 $c=-2\sqrt{2}$ 时，到直线 l 的距离为1的直线的方程为 $x+y-2\sqrt{2}=0$，圆心 $C(1,-1)$ 到此直线的距离 $d_1=\frac{|1-1-2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=2=r$，所以此直线与圆 C 相切，则此直线与圆 C 有一个交点. 综上，圆 C 上到直线 l 的距离为1的点共有3个，故选项C错误，选项D正确. 故选BD.

(2)由题意知直线 l 过点 B. 点 $A(-2,3)$ 关于直线 $y=a$ 的对称点为 $A'(-2,2a-3)$，所以直线 l 的方程为 $y=\frac{(2a-3)-a}{-2-0}x+a$，即 $(a-3)x+2y-2a=0$. 由题意知，圆心 $C(-3,-2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-3(a-3)+2\times(-2)-2a|}{\sqrt{(a-3)^2+4}}\leqslant 1$，整理得 $6a^2-11a+3\leqslant 0$，解得 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$，故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

变式题 (1)B (2)ABD [解析](1)根据题意可知，圆 M 的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，∴圆心为 $M(1,0)$，半径为1. ∵对直线 l 上任意一点 P，在圆 M 上存在点 Q，使得 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，∴直线 l 与圆 M 相切或相离，∴$\frac{|k-k+2|}{\sqrt{1+k^2}}\geqslant 1$，解得 $-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$. 故选B.

(2)对于A，∵点 A 在圆 C 上，∴$a^2+b^2=r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，∴直线 l 与圆 C 相切，A正确；对于B，∵点 A 在圆 C 内，∴$a^2+b^2<r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}>r$，∴直线 l 与圆 C 相离，B正确；对于C，∵点 A 在圆 C 外，∴$a^2+b^2>r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$，∴直线 l 与圆 C 相交，C错误；对于D，∵点 A 在直线 l 上，∴$a^2+b^2=r^2$，∴圆心 $C(0,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$，∴直线 l 与圆 C 相切，D正确. 故选ABD.

例2 (1)A (2)2 [解析](1)$mx-y-3m+1=0$ 可化为 $m(x-3)-y+1=0$，∴直线 l 恒过点 $P(3,1)$. ∵$(3-1)^2+(1-2)^2=5<25$，∴点 P 在圆 C 内部. 当圆心 $C(1,2)$ 与点 P 的连线与直线 AB 垂直时，所得弦长最短，即 $|AB|$ 最小. 由 $|CP|=\sqrt{5}$，圆 C 的半径为5，得 $|AB|$ 的最小值为 $2\times\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$. 故选A.

(2)圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 的圆心坐标为 $(1,1)$，半径为 $\sqrt{3}$，则圆心到直线 $x-y+m=0(m>0)$ 的距离为 $\frac{|1-1+m|}{\sqrt{2}}=\frac{m}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}$. 由勾股定理可得 $\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2=3$，因为 $m>0$，所以 $m=2$，符合题意.

变式题 (1)0或 $\frac{4}{3}$ (2)$2\sqrt{6}$

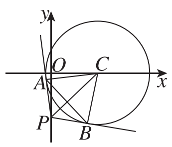
[解析](1)由 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 可知圆心为 $C(1,1)$，半径为2. 设直线与圆交于 A,B 两点，连接 AC,BC，∵直线 $y=k(x+1)$ 截圆 C：$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ 所得两段圆弧的弧长之比为1∶2，∴$\angle ACB=120^\circ$，∴圆心到直线的距离为半径的一半，∴$\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$.

(2)因为点 $M(3,1)$ 在圆 C：$(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$ 内，所以 $(3-1)^2+(1+1)^2<r^2$，又 $r>0$，可得 $r>2\sqrt{2}$. 当过点 M 的直线被圆 C 截得的弦长最短时，该直线垂直于点 M 与圆心 C 的连线，即圆心到直线的距离为 $|CM|$. 因为 $C(1,-1)$，$M(3,1)$，所以 $|CM|=2\sqrt{2}$，由 $8=2\sqrt{r^2-|CM|^2}=2\sqrt{r^2-8}$，可得 $r=2\sqrt{6}$.

例3 (1)$x=0$ 或 $3x+4y=0$ (2)B

[解析](1)圆 C：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C(2,1)$，半径 $r=2$. 当切线的斜率不存在时，易知切线方程是 $x=0$，满足题意；当切线的斜率存在时，设斜率为 k，则切线的方程为 $y=kx$，所以 $\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，所以切线方程为 $3x+4y=0$. 故所求直线的方程为 $x=0$ 或 $3x+4y=0$.

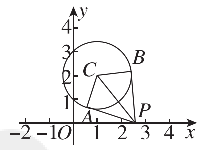
(2)方法一：由 $x^2+y^2-4x-1=0$，即 $(x-2)^2+y^2=5$，可得圆心为 $C(2,0)$，半径 $r=\sqrt{5}$，过点 $P(0,-2)$ 作圆 C 的切线，设切点分别为 A,B，连接 PC,AC. 因为 $|PC|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，所以 $|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{3}$，可得 $\sin\angle APC=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\cos\angle APC=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，则 $\sin\angle APB=\sin 2\angle APC=2\sin\angle APC\cos\angle APC=2\times\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\angle APB=\cos 2\angle APC=\cos^2\angle APC-\sin^2\angle APC=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2=-\frac{1}{4}<0$，即 $\angle APB$ 为钝角，所以 $\sin\alpha=\sin(\pi-\angle APB)=\sin\angle APB=\frac{\sqrt{15}}{4}$.



方法二：圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 的圆心为 $C(2,0)$，半径 $r=\sqrt{5}$，过点 $P(0,-2)$ 作圆 C 的切线，设切点分别为 A,B，如图，连接 AB，PC,AC,BC，可得 $|PC|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，则 $|PA|=|PB|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{3}$. 因为 $|PA|^2+|PB|^2-2|PA|\cdot|PB|\cos\angle APB=|CA|^2+|CB|^2-2|CA|\cdot|CB|\cos\angle ACB$ 且 $\angle ACB=\pi-\angle APB$，所以 $3+3-6\cos\angle APB=5+5-10\cos(\pi-\angle APB)$，即 $3-3\cos\angle APB=5+5\cos\angle APB$，解得 $\cos\angle APB=-\frac{1}{4}<0$，即 $\angle APB$ 为钝角，则 $\cos\alpha=\cos(\pi-\angle APB)=-\cos\angle APB=\frac{1}{4}$，且 α 为锐角，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

方法三：圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 的圆心为 $C(2,0)$，半径 $r=\sqrt{5}$. 若切线斜率不存在，则切线方程为 $x=0$，则圆心到切线的距离 $d=2<r$，不合题意，故切线的斜率存在. 设切线方程为 $y=kx-2$，即 $kx-y-2=0$，则 $\frac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，整理得 $k^2+8k+1=0$，且 $\Delta=64-4=60>0$. 设两切线的斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1+k_2=-8$，$k_1k_2=1$，可得 $|k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=2\sqrt{15}$，所以 $\tan\alpha=\frac{|k_1-k_2|}{1+k_1k_2}=\sqrt{15}$，即 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15}$，可得 $\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{15}}$，则 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{15}=1$，因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha>0$，故 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$. 故选B.

变式题 (1)B (2)C



[解析](1)如图，当 PA 和 PB 均与圆 C 相切时，$\angle APB$ 最大，要使圆 C 上存在两点 A,B 使得 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$，则 $\angle APC\geqslant\frac{\pi}{6}$，

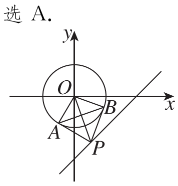
∴$|PC|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}$，

即 $\sqrt{(x_0-1)^2+(0-2)^2}\leqslant 2\sqrt{2}$，解得 $-1\leqslant x_0\leqslant 3$. 故选B.

(2)方法一：由题意知圆 C：$x^2+(y-2)^2=16$ 的圆心 $C(0,2)$ 在直线 $ax+by-12=0$ 上，所以 $2b-12=0$，解得 $b=6$. 设点 $P(t,-6)$，则 $|PC|^2=t^2+(-6-2)^2=t^2+64$，故以 PC 为直径的圆的方程为 $\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}(t^2+64)$，与方程 $x^2+(y-2)^2=16$ 相减可得直线 MN 的方程为 $-tx+8y=0$，故直线 MN 恒过定点 $Q(0,0)$. 故选C.

方法二：由题意知圆 C：$x^2+(y-2)^2=16$ 的圆心 $C(0,2)$ 在直线 $ax+by-12=0$ 上，所以 $2b-12=0$，解得 $b=6$. 设点 $P(t,-6)$，因为圆 C：$x^2+y^2-4y-12=0$，所以直线 MN 的方程为 $tx-6y-4\times\frac{y-6}{2}-12=0$，即 $tx-8y=0$，故直线 MN 恒过定点 $Q(0,0)$. 故选C.

例4 (1)A (2)3 1 [解析](1)圆 O：$x^2+y^2=4$ 的圆心为 $O(0,0)$，半径 $r=2$. 设 $P(x_0,y_0)$，则 $2x_0+y_0=10$，即 $y_0=10-2x_0$，则 $|PM|=\sqrt{|PO|^2-2^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-4}=\sqrt{5x_0^2-40x_0+96}=\sqrt{5(x_0-4)^2+16}\geqslant\sqrt{16}=4$（当且仅当 $x_0=4$ 时等号成立）. 故选A.



(2)当 $x_0=3$ 时，$y_0=1$，即 $P(3,1)$，所以 $|PO|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，则 $|PA|=\sqrt{|PO|^2-1^2}=3$. 如图，易知 $PO\perp AB$，$PA\perp OA$，$PB\perp OB$，所以 $S_{四边形OAPB}=\frac{1}{2}|PO|\cdot|AB|=\frac{1}{2}|OA|\cdot|PA|+\frac{1}{2}|OB|\cdot|PB|=|OA|\cdot|PA|=|PA|$，所以 $|PO|\cdot|AB|=2|PA|=2\sqrt{|PO|^2-|OA|^2}=2\sqrt{|PO|^2-1}$，当 OP 垂直于直线 $x-y-2=0$ 时，$|PO|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，此时 $|PO|\cdot|AB|$ 取得最小值2，且点 P 的坐标为 $(1,-1)$，即 $x_0=1$.

变式题 (1)BD (2)D [解析](1)圆 M：$(x+\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$ 恒过定点 $O(0,0)$，直线 l：$y=kx$ 也恒过定点 $O(0,$

0),故 B 正确;圆心 $M(-\cos\theta,\sin\theta)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|k\cos\theta+\sin\theta|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|\sqrt{1+k^2}\sin(\theta+\alpha)|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$($\alpha$ 为辅助角),则直线与圆相切或相交,故对任意实数 k,必存在实数 θ,使得直线与圆相交,对任意实数 k,必存在实数 θ,使得直线与圆相切,故 D 正确,A,C 错误.故选 BD.

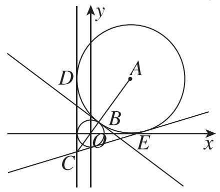
(2)设 $P(x_0,y_0)$,则 $y_0^2=2x_0$,圆 C 的圆心为 $C(4,0)$,半径 $r=1$.连接 AC,BC,由 PA,PB 分别与圆 C 相切于点 A,B,得 $PC\perp AB$,$PA\perp AC$,则 $|AB|\cdot|PC|=2S_{四边形PACB}=4S_{\triangle PAC}=2|PA|\cdot|AC|=2\sqrt{|PC|^2-1}=2\sqrt{(x_0-4)^2+y_0^2-1}=2\sqrt{x_0^2-6x_0+15}=2\sqrt{(x_0-3)^2+6}\geqslant 2\sqrt{6}$,当且仅当 $x_0=3$ 时取等号,所以 $|AB|\cdot|PC|$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$,故选 D.

例 5 AD [解析]根据题意,可得圆 O:$x^2+y^2=1$ 的圆心为 $O(0,0)$,半径 $r=1$,圆 C:$(x-a)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C(a,1)$,半径 $R=2$.对于 A,两圆的圆心距 $|OC|=\sqrt{a^2+1}\geqslant 1$,故 A 正确.对于 B,当两圆内切时,圆心距 $|OC|=R-r=1$,即 $\sqrt{a^2+1}=1$,解得 $a=0$;当两圆外切时,圆心距 $|OC|=R+r=3$,即 $\sqrt{a^2+1}=3$,解得 $a=\pm 2\sqrt{2}$.综上所述,若圆 O 与圆 C 相切,则 $a=0$ 或 $a=\pm 2\sqrt{2}$,故 B 不正确.对于 C,若圆 O 与圆 C 恰有两条公切线,则两圆相交,故圆心距 $|OC|\in(R-r,R+r)$,即 $\sqrt{a^2+1}\in(1,3)$,即 $1<\sqrt{a^2+1}<3$,解得 $-2\sqrt{2}<a<0$ 或 $0<a<2\sqrt{2}$,故 C 不正确.对于 D,若圆 O 与圆 C 相交,则当圆 O:$x^2+y^2=1$ 的圆心 O 在公共弦上时,公共弦长取到最大值,此时公共弦长为 $2r=2$,故 D 正确.故选 AD.

变式题 (1)BD (2)$3x+4y-5=0$(或 $x=-1$ 或 $7x-24y-25=0$)

[解析](1)由已知得圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$,半径 $r_1=3$,圆 C_2 的圆心为 $C_2(3,4)$,半径 $r_2=4$,$|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$,则 $r_2-r_1<|C_1C_2|<r_1+r_2$,故两圆相交,所以 C_1 与 C_2 的公切线恰有 2 条,故 A 错误.两圆的方程相减得 C_1 与 C_2 公共弦所在直线的方程为 $3x+4y-9=0$,故 B 正确.点 C_1 到直线 $3x+4y-9=0$ 的距离为 $\frac{|-9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$,故公共弦的弦长为 $2\times\sqrt{9-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$,故 C 错误.若 P,Q 分别是圆 C_1,C_2 上的动点,则 $|PQ|_{\max}=|C_1C_2|+r_1+r_2=12$,故 D 正确.故选 BD.

(2)方法一:如图,由图易知 $x=-1$ 为公切线 CD 的方程.设切点 $B(\cos\theta,\sin\theta)$,则由 $A(3,4)$ 可知 $\cos\theta=\frac{3}{5}$,$\sin\theta=\frac{4}{5}$,所以 $B\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$,又 $k_{OA}=\frac{4}{3}$,所以过点 B 的公切线的斜率为 $-\frac{3}{4}$,所以过点 B 的公切线的方程为 $y-\frac{4}{5}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{5}\right)$,即 $3x+4y-5=0$.由 $\begin{cases}x=-1,\\ y=\frac{4}{3}x,\end{cases}$ 可得 $C\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$,设公切线 CE 的方程为 $y+\frac{4}{3}=k(x+1)$,即 $3kx-3y+3k-4=0$,由 $\frac{|3k-4|}{\sqrt{9k^2+9}}=1$,解得 $k=\frac{7}{24}$,所以公切线 CE 的方程为 $7x-24y-25=0$.



方法二:显然公切线的斜率不为 0,设公切线的方程为 $x+by+c=0$,则 $\frac{|c|}{\sqrt{1+b^2}}=1$,$\frac{|3+4b+c|}{\sqrt{1+b^2}}=4$,故 $c^2=1+b^2$ ①,$|3+4b+c|=|4c|$,所以 $3+4b+c=4c$ 或 $3+4b+c=-4c$,再结合①可得 $\begin{cases}b=0,\\ c=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-\frac{24}{7},\\ c=-\frac{25}{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=\frac{4}{3},\\ c=-\frac{5}{3},\end{cases}$ 所以公切线有三条,其方程分别为 $x+1=0$,$7x-24y-25=0$,$3x+4y-5=0$(填一个即可).

第 53 讲 椭圆

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 定点 $>$ $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 焦点 焦距
2. $-a\leqslant x\leqslant a$ $-b\leqslant y\leqslant b$ $-b\leqslant x\leqslant b$ $-a\leqslant y\leqslant a$ 坐标轴 $(0,0)$ $(-a,0)$ $(a,0)$ $(0,-b)$ $(0,b)$ $(0,-a)$ $(0,a)$ $(-b,0)$ $(b,0)$ $2a$ $2b$ $2c$ $(0,1)$ a^2-b^2
3. (1)没有 一个 两个 (2)$\Delta>0$ $\Delta=0$ $\Delta<0$
4. $|y_1-y_2|$ $|x_1-x_2|$

【对点演练】

1. 14 36 [解析]根据椭圆的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,由 $a^2=100$,得 $a=10$,所以 $6+|PF_2|=20$,故 $|PF_2|=14$.由 $c^2=a^2-b^2=100-36=64$,得 $c=8$,所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=20+16=36$.
2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ [解析]因为椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$,所以 e 越大,$\frac{b}{a}$ 越小,椭圆越扁;e 越小,$\frac{b}{a}$ 越大,椭圆越圆.椭圆 $9x^2+y^2=36$ 即椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$,其离心率 $e_1=\sqrt{1-\frac{4}{36}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的离心率 $e_2=\sqrt{1-\frac{12}{16}}=\frac{1}{2}$,因为 $e_2<e_1$,所以椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 更接近于圆.
3. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ [解析]设 d 是点 M 到直线 l:$x=\frac{25}{4}$ 的距离,则由题意知 $\frac{|MF|}{d}=\frac{4}{5}$,即 $\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|\frac{25}{4}-x\right|}=\frac{4}{5}$,整理得 $9x^2+25y^2=225$,故动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.
4. $\frac{4\sqrt{38}}{5}$ [解析]由 $\begin{cases}y=x+1,\\ x^2+4y^2=16,\end{cases}$ 得 $5x^2+8x-12=0$,设此方程的两实根为 x_1,x_2,则 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8}{5},\\ x_1x_2=-\frac{12}{5},\end{cases}$ 故所得弦长为 $\sqrt{1+1^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{48}{5}}=\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{304}{25}}=\frac{4\sqrt{38}}{5}$.
5. 线段 [解析]由题意知 $|MF_1|+|MF_2|=12$,$|F_1F_2|=12$,即 $|MF_1|+|MF_2|=|F_1F_2|$,所以点 M 的轨迹是线段.
6. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 或 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$
   [解析]∵椭圆 C 的中心在原点,其长轴长为 4,焦距为 2,∴$a=2$,$c=1$,∴$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.当椭圆的焦点在 x 轴上时,C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;当椭圆的焦点在 y 轴上时,C 的方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.
7. 1 [解析]设 $P(x,y)$,依题意得 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-2-x)(2-x)+y^2=x^2+y^2-4=\frac{4}{9}x^2+1$,因为 $0\leqslant x^2\leqslant 9$,所以 $1\leqslant\frac{4}{9}x^2+1\leqslant 5$,所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值是 1.

/第 1 课时 椭圆及其性质/

● 课堂考点探究

例 1 (1)$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ (2)B

[解析](1)圆 F_1:$(x+1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $F_1(-1,0)$,半径 $r_1=1$,圆 F_2:$(x-1)^2+y^2=25$ 的圆心为 $F_2(1,0)$,半径 $r_2=5$.设动圆 C 的圆心为 $C(x,y)$,半径为 R,由题得 $|F_1C|=R+1$,$|F_2C|=5-R$,∴$|F_1C|+|F_2C|=6>|F_1F_2|=2$,∴圆心 C 的轨迹是椭圆,设其标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则 $2a=6$,$2c=2$,可得 $a=3$,$c=1$,∴$b^2=a^2-c^2=8$,∴动圆圆心 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

(2)方法一:设 $\angle F_1PF_2=2\theta$,$0<\theta<\frac{\pi}{2}$,则 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}=b^2\tan\theta$.由 $\cos\angle F_1PF_2=\cos 2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{3}{5}$,可得 $\tan\theta=\frac{1}{2}$.由椭圆方程可知,$a^2=9$,$b^2=6$,$c^2=a^2-b^2=3$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_P|=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times|y_P|=6\times\frac{1}{2}$,所以 $y_P^2=3$,则 $x_P^2=9\times\left(1-\frac{3}{6}\right)=\frac{9}{2}$,故 $|OP|=\sqrt{x_P^2+y_P^2}=\sqrt{3+\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.故选 B.

方法二:由题可知,$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$①,$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$,即 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{6}{5}|PF_1||PF_2|=12$②,联立①②,可得 $|PF_1||PF_2|=\frac{15}{2}$,$|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$,又 $\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})$,所以 $|OP|=|\overrightarrow{PO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|$,即 $|OP|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+|\overrightarrow{PF_2}|^2}=$

$\frac{1}{2}\times\sqrt{21+2\times\frac{3}{5}\times\frac{15}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.
方法三：由题可知，$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$①，$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，即$|PF_1|^2+|PF_2|^2-\frac{6}{5}|PF_1||PF_2|=12$②，联立①②，可得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=21$，由三角形中线定理可知，$(2|OP|)^2+|F_1F_2|^2=2(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=42$，易知$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，解得$|OP|=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 故选 B.

变式题 (1)C (2)$\sqrt{15}$ [解析](1)由椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $a=3,b=2$，则 $|MF_1|+|MF_2|=2a=2\times3=6$，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2=3^2=9$，当且仅当$|MF_1|=|MF_2|=3$时等号成立. 故选 C.
(2)由题得 $a=3,c=2,F_1(-2,0),F_2(2,0)$，故以 F_1F_2 为直径的圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$，圆 O 的半径为 2，则 $|F_1O|=|OA|=2$. 因为 $OA\parallel PF_2$，所以 $\frac{|F_1O|}{|F_1F_2|}=\frac{|OA|}{|F_2P|}=\frac{1}{2}$，所以$|F_2P|=4$，又点 P 在椭圆 C 上，所以 $|F_1P|+|F_2P|=2a=6$，则 $|F_1P|=2$. 在$\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{2^2+4^2-4^2}{2\times2\times4}=\frac{1}{4}$，故 $\sin\angle PF_1F_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_1F_2|\sin\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.

例 2 解：(1)因为椭圆的离心率是$\frac{\sqrt{5}}{3}$，长轴长与短轴长之差为 2，所以$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3},\\2a-2b=2,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=9,\\b^2=4,\end{cases}$又椭圆的焦点在 y 轴上，故椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$.
(2)设椭圆的长轴长、短轴长、焦距分别为 $2a,2b,2c$，由题得$\begin{cases}a=2c,\\a-c=\sqrt{3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2\sqrt{3},\\c=\sqrt{3},\end{cases}$$\therefore b^2=a^2-c^2=9$. 若椭圆的焦点在 y 轴上，则椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1$；若椭圆的焦点在 x 轴上，则椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$. 故椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$或$\frac{y^2}{12}+\frac{x^2}{9}=1$.
(3)设与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$有相同的焦点的椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{2+\lambda}+\frac{y^2}{1+\lambda}=1(\lambda>-1)$，因为椭圆经过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以$\frac{1}{2+\lambda}+\frac{9}{4(1+\lambda)}=1$，解得$\lambda=2$或$\lambda=-\frac{7}{4}$(舍去)，故椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

变式题 (1)D (2)B [解析](1)椭圆 C 的焦距为 8，则$|F_1F_2|=2c=8$，故 $c=4$. 由 $PF_1\perp PF_2$，$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 12，得$\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=12$，即$|PF_1||PF_2|=24$，又$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=64$，所以$(|PF_1|+|PF_2|)^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=112$，即 $4a^2=112$，所以 $a^2=28$，又 $c=4$，则 $b^2=a^2-c^2=12$，则椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{12}=1$. 故选 D.
(2)由离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{3}$，得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{8}{9}$，即 $b^2=\frac{8}{9}a^2$. 由题意知 $A_1(-a,0),A_2(a,0),B(0,b)$，所以 $\overrightarrow{BA_1}=(-a,-b)$，$\overrightarrow{BA_2}=(a,-b)$，因为 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=-1$，所以$-a^2+b^2=-1$，将 $b^2=\frac{8}{9}a^2$ 代入，得 $a^2=9,b^2=8$，故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. 故选 B.

例 3 (1)A (2)D [解析](1)方法一：由题意得 $A(-a,0)$，设 $P(m,n)$，则 $Q(-m,n)$，$k_{AP}=\frac{n}{m+a}$，$k_{AQ}=\frac{n}{-m+a}$，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{n}{m+a}\cdot\frac{n}{-m+a}=\frac{n^2}{-m^2+a^2}=\frac{1}{4}$. 由$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$，得$\frac{n^2}{a^2-m^2}=\frac{b^2}{a^2}$，所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.
方法二：设椭圆 C 的右顶点为 B，因为点 P,Q 均在 C 上，且关于 y 轴对称，所以直线 BP,AQ 关于 y 轴对称，所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{1}{4}$，故 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{4}$. 设 $P(x_0,y_0)$，由题得 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，则 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)b^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=e^2-1=-\frac{1}{4}$，所以 $e^2=\frac{3}{4}$，即 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.
(2)由 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$ 可知$|AF_2|=2|F_2B|$，A,F_2,B 三点共线. 设$|F_2B|=x$，则$|AF_2|=2x$，$|AF_1|=2a-2x$，$|BF_1|=2a-x$，$|AB|=3x$. 在$\triangle AF_1B$ 中，由余弦定理可得$(3x)^2=(2a-2x)^2+(2a-x)^2-2(2a-2x)(2a-x)\times\frac{4}{5}$，化简可得 $2a^2-3ax-9x^2=0$，即$(a-3x)(2a+3x)=0$，故 $a=3x$ 或 $2a=-3x$(舍去)，又 $\cos\angle AF_2F_1+\cos\angle BF_2F_1=0$，所以$\frac{(2x)^2+4c^2-(2a-2x)^2}{2\cdot2x\cdot2c}+\frac{x^2+4c^2-(2a-x)^2}{2\cdot x\cdot2c}=0$，化简可得 $3c^2+4ax-3a^2=0$，即 $3c^2+4a\times\frac{a}{3}-3a^2=0$，故 $9c^2=5a^2$，可得 $3c=\sqrt{5}a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 D.

例 4 (1)$[-2,1]$ (2)B [解析](1)由椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$得 $a=2,b=1$，故 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，可得 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$. 设 $P(m,n)$，则 $\overrightarrow{PF_1}=(-\sqrt{3}-m,-n)$，$\overrightarrow{PF_2}=(\sqrt{3}-m,-n)$，可得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}-m)(\sqrt{3}-m)+n^2=m^2+n^2-3$. 由 P 在椭圆上，得 $m^2+4n^2=4$，可得 $m^2=4-4n^2(-1\leqslant n\leqslant1)$，故 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=1-3n^2(-1\leqslant n\leqslant1)$，则当 $n=0$ 时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 取得最大值 1，当 $n=\pm1$ 时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 取得最小值 -2，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围是$[-2,1]$.
(2)连接 BF_1，设$|AF_2|=t$，则$|AB|=t+1$，$|BF_1|=2a-1$，$|AF_1|=2a-t$. 由 $AF_1\perp AB$，可得$(t+1)^2+(2a-t)^2=(2a-1)^2$，则 $2a=\frac{t^2+t}{t-1}>0$，故 $t>1$，所以 $2a=\frac{t^2+t}{t-1}=(t-1)+\frac{2}{t-1}+3\geqslant3+2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}=3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $t-1=\frac{2}{t-1}$，即 $t=1+\sqrt{2}$ 时取等号，则椭圆长轴长的最小值是 $3+2\sqrt{2}$. 故选 B.

【应用演练】

1. A [解析] 由题可得 $e_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $e_2=\sqrt{3}e_1$，所以 $e_1=\frac{1}{2}$，即$\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{1}{4}$，解得 $a^2=\frac{4}{3}$，所以 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.
2. C [解析] 因为 O,A 均在 x 轴上，且四边形 $OABC$ 为平行四边形，所以 $OA\parallel BC$，且 B,C 的纵坐标相等，则由椭圆的对称性知 B,C 的横坐标互为相反数. 由题意得 $A(a,0)$，设 $B\left(\frac{a}{2},y_0\right)(y_0>0)$，则 $C\left(-\frac{a}{2},y_0\right)$，将点 $B\left(\frac{a}{2},y_0\right)$ 的坐标代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中，得 $y_0^2=\frac{3}{4}b^2$，则 $y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，即 $B\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$，所以 $k=k_{OB}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{3}b}{a}$，故 A 不正确. 因为$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}k$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}k^2}$，所以当 k 越大时，E 的离心率越小，椭圆 E 越圆，故 B 不正确. 当 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$e=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故 C 正确. 因为 $a>b>0$，所以 $k=\frac{\sqrt{3}b}{a}<\sqrt{3}$，故 D 不正确. 故选 C.
3. B [解析] 因为 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，所以设$|AF_2|=2|F_2B|=2m(m>0)$. 连接 BF_1，因为过 F_2 的直线交椭圆于 A,B 两点，所以由椭圆的定义可得，$|AF_1|+|AF_2|=2a$，$|BF_1|+|BF_2|=2a$，则$|BF_1|=2a-m$，$|AF_1|=2a-2m$. 因为 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=0$，所以 $AF_1\perp AF_2$，则$\triangle F_1AF_2$ 和$\triangle F_1AB$ 都是直角三角形. 由勾股定理可得，$|AF_1|^2+|AB|^2=|BF_1|^2$，即$(2a-2m)^2+9m^2=(2a-m)^2$，可得 $m=\frac{a}{3}$，所以$|AF_1|=\frac{4a}{3}$，$|AF_2|=\frac{2a}{3}$，又$|F_1F_2|=2c$，$|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$，所以$\frac{16a^2}{9}+\frac{4a^2}{9}=$

133289486

$4c^2$，解得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$，所以椭圆 E 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 故选 B.

4. $\frac{4}{5}$ [解析] 因为经过椭圆 $C:\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0)$ 的右顶点 $(m,0)$ 与上顶点 $(0,n)$ 的直线的斜率为 $-\frac{5}{3}$，所以 $-\frac{n}{m}=-\frac{5}{3}$，即 $\frac{n}{m}=\frac{5}{3}$，可知椭圆 C 的焦点在 y 轴上，则 C 的离心率 $e=\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

5. $\left[\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$ [解析] 设点 $A(x_1,y_1)$，由题意知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则 $\overrightarrow{AF_1}=(-c-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{AF_2}=(c-x_1,-y_1)$，由 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=4c^2$，得 $(-c-x_1,-y_1)\cdot(c-x_1,-y_1)=x_1^2-c^2+y_1^2=4c^2$，即 $x_1^2+y_1^2=5c^2$，因此点 A 在以 $(0,0)$ 为圆心，半径为 $\sqrt{5}c$ 的圆上，又点 A 在椭圆 C 上，则圆 $x^2+y^2=5c^2$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 有公共点. 由椭圆的几何性质知 $b\leqslant\sqrt{5}c\leqslant a$，即 $b^2\leqslant5c^2\leqslant a^2$，即 $a^2-c^2\leqslant5c^2\leqslant a^2$，整理得 $5c^2\leqslant a^2\leqslant6c^2$，即 $\frac{1}{6}\leqslant\frac{c^2}{a^2}\leqslant\frac{1}{5}$，所以椭圆 C 的离心率 $e\in\left[\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$.

6. $\frac{3}{2}$ [解析] 由题得 $a=5,b=4,c=3$，$\therefore\triangle F_1PF_2$ 的周长 $L=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=16$. $\because\triangle F_1PF_2$ 内切圆的半径 $r=\frac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{L}$，$\therefore$ 当 $S_{\triangle F_1PF_2}$ 取得最大值时，r 取得最大值，显然当 P 为短轴端点时，$S_{\triangle F_1PF_2}$ 取得最大值，此时 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\times b\times2c=bc=12$，则 $r=\frac{2S_{\triangle F_1PF_2}}{L}=\frac{3}{2}$.

/第2课时 直线与椭圆的位置关系/

● 课堂考点探究

例1 解：由 $\begin{cases}y=x+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $7x^2+8mx+4m^2-12=0$①，$\Delta=(8m)^2-4\times7\times(4m^2-12)=-48m^2+336$.

(1)当 $\Delta>0$，即 $-\sqrt{7}<m<\sqrt{7}$ 时，方程①有两个不同的实数根，此时直线 l 与椭圆 C 有两个不重合的公共点.

(2)当 $\Delta=0$，即 $m=\pm\sqrt{7}$ 时，方程①有两个相同的实数根，此时直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

(3)当 $\Delta<0$，即 $m<-\sqrt{7}$ 或 $m>\sqrt{7}$ 时，方程①没有实数根，此时直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

变式题 (1)A (2)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ [解析] (1)由题意知切线 l 的方程为 $\frac{3x}{12}+\frac{-y}{4}=1$，即 $x-y-4=0$，切线 l 的斜率为 1，与切线 l 垂直的直线的斜率为 -1，则过点 A 且与切线 l 垂直的直线的方程为 $y+1=-(x-3)$，即 $x+y-2=0$. 故选 A.

(2)设与直线 $x-2y+8=0$ 平行且与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 相切的直线方程为 $x-2y+m=0$. 由 $\begin{cases}x-2y+m=0,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 x 并整理得 $25y^2-16my+4m^2-36=0$，所以 $\Delta=256m^2-400(m^2-9)=0$，解得 $m=\pm5$. 当 $m=5$，即切线方程为 $x-2y+5=0$ 时，切线与直线 $x-2y+8=0$ 间的距离为 $\frac{|8-5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$；当 $m=-5$，即切线方程为 $x-2y-5=0$ 时，切线与直线 $x-2y+8=0$ 间的距离为 $\frac{|8+5|}{\sqrt{1+4}}=\frac{13\sqrt{5}}{5}$. 所以椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的点到直线 $x-2y+8=0$ 的距离的最小值为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

例2 解：(1)由题意得 $\begin{cases}b=1,\\ 2c=2\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意得直线 BC 的方程为 $y-1=k(x+2)$. 由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y-1=k(x+2),\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $(4k^2+1)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0$，则 $\Delta=(16k^2+8k)^2-4(4k^2+1)(16k^2+16k)=-64k>0$，解得 $k<0$. 设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{4k^2+1},\\ x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{4k^2+1}\end{cases}$ ①. 直线 AB 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，则直线 AB 与 x 轴的交点 M 的坐标为 $\left(\frac{-x_1}{kx_1+2k},0\right)$. 同理得点 N 的坐标为 $\left(\frac{-x_2}{kx_2+2k},0\right)$. 因为 $|MN|=2$，所以 $\left|\frac{-x_2}{k(x_2+2)}-\frac{-x_1}{k(x_1+2)}\right|=2$，所以 $|x_1-x_2|=|k[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]|$，所以 $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=|k[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]|$②. 将①代入②，得 $\left(-\frac{16k^2+8k}{4k^2+1}\right)^2-\frac{4(16k^2+16k)}{4k^2+1}=k^2\left[\frac{16k^2+16k}{4k^2+1}-\frac{2(16k^2+8k)}{4k^2+1}+4\right]^2$，整理得 $k^2+4k=0$. 又 $k<0$，所以 $k=-4$.

变式题1 C [解析] 方法一：由题可知 $F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，$\triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍，则点 F_1 到直线 $y=x+m$ 的距离是点 F_2 到直线 $y=x+m$ 的距离的 2 倍，故 $\frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}=2\frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$，化简可得 $3m^2+10\sqrt{2}m+6=0$，即 $(3m+\sqrt{2})(m+3\sqrt{2})=0$，解得 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $m=-3\sqrt{2}$，又直线 $y=x-3\sqrt{2}$ 与 C 不相交，所以 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

方法二：不妨设直线 $y=x+m$ 与 x 轴的交点为 $Q(-m,0)$，因为 $\triangle F_1AB$ 的面积是 $\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍，所以点 F_1 到直线 $y=x+m$ 的距离是点 F_2 到直线 $y=x+m$ 距离的 2 倍，则 $|F_1Q|=2|F_2Q|$. 若 Q 在线段 F_1F_2 上，则 $|F_2Q|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $-m=\frac{\sqrt{2}}{3}$，即 $m=-\frac{\sqrt{2}}{3}$；若 Q 在线段 F_1F_2 的延长线上，则 $|F_2Q|=2\sqrt{2}$，所以 $-m=3\sqrt{2}$，即 $m=-3\sqrt{2}$，此时直线 $y=x+m$ 与椭圆相离. 故选 C.

变式题2 解：(1)依题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ \frac{1}{2}ab=\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=\sqrt{6},\\ b=\sqrt{2},\\ c=2,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由(1)知椭圆 C 的右焦点的坐标为 $(2,0)$. 当直线 l 的斜率不存在时，由 $\frac{2^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，此时 $|PQ|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，不符合题意，所以直线 l 的斜率存在. 设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，由 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(1+3k^2)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{12k^2-6}{1+3k^2}$，所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{12k^2}{1+3k^2}\right)^2-4\times\frac{12k^2-6}{1+3k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{144k^4-24(2k^2-1)(1+3k^2)}{(1+3k^2)^2}}=\frac{2\sqrt{6}\cdot(1+k^2)}{1+3k^2}=\frac{6\sqrt{6}}{7}$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$，所以直线 l 的方程为 $y=\pm\sqrt{2}(x-2)$.

例3 解：(1)方法一：设以 $C(1,1)$ 为中点的弦与椭圆的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，$\frac{y_1+y_2}{2}=1$. 由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1,\end{cases}$ 可得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4}=-\frac{y_1^2-y_2^2}{3}$，则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{3}{4}$，即直线 AB 的斜率为 $-\frac{3}{4}$，所以直线 AB 的方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x+4y-7=0$.

方法二：设过点 C 的弦为 AB，因为 AB 被点 C 平分，所以 $k_{AB}\cdot k_{OC}=-\frac{b^2}{a^2}$($O$ 为坐标原点)，即 $k_{AB}\cdot1=-\frac{3}{4}$，解得 $k_{AB}=-\frac{3}{4}$，故弦 AB 所在直线的方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x+4y-7=0$.

(2)设直线 MN 的方程为 $y=2x+t$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，由 $\begin{cases}y=2x+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $19x^2+16tx+4t^2-12=0$，由 $\Delta=(16t)^2-4\times19\times(4t^2-12)>0$，可得 $t^2<19$，则 $x_3+x_4=\frac{-16t}{19}$，故 $y_3+y_4=2(x_3+x_4)+2t=\frac{-32t}{19}+2t=\frac{6t}{19}$，所以弦 MN 的中点的坐标为 $\left(\frac{-8t}{19},\right.$

$\left.\frac{3t}{19}\right)$. 设弦 MN 的中点坐标为 (x,y)，由 $\begin{cases}x=\frac{-8t}{19},\\ y=\frac{3t}{19},\\ t^2<19,\end{cases}$ 可得 $3x+8y=0\left(|x|<\frac{8\sqrt{19}}{19}\right)$，所以弦 MN 的中点的轨迹方程为 $3x+8y=0\left(|x|<\frac{8\sqrt{19}}{19}\right)$.

(3)由题意知 $F(-1,0)$. 设弦与椭圆的两交点分别为 $I(x_5,y_5)$，$J(x_6,y_6)$，$P(x,y)$，当 $x_5=x_6$ 时，P 与 F 重合，即 $P(-1,0)$. 当 $x_5\neq x_6$ 时，由 $\begin{cases}3x_5^2+4y_5^2=12,\\ 3x_6^2+4y_6^2=12,\end{cases}$ 两式相减得 $3(x_5+x_6)(x_5-x_6)+4(y_5+y_6)(y_5-y_6)=0$，即 $3(x_5+x_6)+4\cdot\frac{(y_5+y_6)(y_5-y_6)}{x_5-x_6}=0$，因为 $\frac{y_5-y_6}{x_5-x_6}=k_{FP}=\frac{y}{x+1}(x\neq-1)$，$x_5+x_6=2x$，$y_5+y_6=2y$，所以 $3x^2+3x+4y^2=0(x\neq-1)$，显然点 $(-1,0)$ 的坐标满足该方程，所以点 P 的轨迹方程为 $3x^2+3x+4y^2=0$.

变式题 (1)B (2) $9x-8y-43=0$

[解析] (1)椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，即椭圆 $5x^2+9y^2-45=0$. 设椭圆上两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 关于直线 $y=3x+m$ 对称，线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $5x_1^2+9y_1^2-45=0$，$5x_2^2+9y_2^2-45=0$，两式相减得 $5(x_1+x_2)(x_1-x_2)+9(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{5}{9}\cdot\frac{x_0}{y_0}=-\frac{1}{3}$，所以 $y_0=\frac{5}{3}x_0$，代入直线方程 $y=3x+m$ 得 $x_0=-\frac{3m}{4}$，$y_0=-\frac{5m}{4}$，即 $M\left(-\frac{3m}{4},-\frac{5m}{4}\right)$. 因为点 M 在椭圆内部，所以 $5\times\frac{9m^2}{16}+9\times\frac{25m^2}{16}<45$，解得 $-\frac{2\sqrt6}{3}<m<\frac{2\sqrt6}{3}$，即 m 的取值范围是 $\left(-\frac{2\sqrt6}{3},\frac{2\sqrt6}{3}\right)$. 故选 B.

(2)由题知，椭圆的右焦点的坐标为 $(2,0)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，因为 $\triangle BMN$ 的重心为 $(2,0)$，所以 $\frac{x_1+x_2}{3}=2$，$\frac{4+y_1+y_2}{3}=0$，所以 $x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-4$，故线段 MN 的中点坐标为 $(3,-2)$. 因为 $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{12}=1$，$\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{12}=1$，所以 $3(x_2+x_1)(x_2-x_1)+4(y_1+y_2)(y_2-y_1)=0$，即 $18(x_2-x_1)-16(y_2-y_1)=0$，所以 $k_{MN}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8}$，所以直线 l 的方程为 $y+2=\frac{9}{8}(x-3)$，即 $9x-8y-43=0$.

例 4 (1)C (2) $[8\sqrt2-11,1)$ (3) $x+\sqrt2y-2\sqrt2=0$ [解析] (1)设切点为 M，连接 PF_1，OM. ∵ $|OP|=|OF_2|=|OF_1|$，∴ $PF_1\perp PF_2$. ∵ $OM\perp PF_2$，∴ $OM/\!/PF_1$，又 O 是 F_1F_2 的中点，圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}b^2$ 的半径为 $\frac12 b$，∴ $|PF_1|=2|OM|=b$，∴ $|PF_2|=2a-b$，∴ $b^2+(2a-b)^2=4c^2=4(a^2-b^2)$，即 $2a=3b$，得 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$，∴ $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt5}{3}$. 故选 C.

(2)方法一(利用椭圆的二级结论和均值不等式)：设 $|QF_1|=m$，$|PF_1|=n$，则 $|QF_2|=2a-m$，且 $\frac1m+\frac1n=\frac{2a}{b^2}$，显然当点 P 为右顶点时，$|PQ|>|QF_2|$，故存在点 P 使 $|PQ|=|QF_2|$ 成立等价于 $(|PQ|-|QF_2|)_{\min}\leqslant0$. 因为 $|PQ|-|QF_2|=2m+n-2a$，且 $2m+n=\frac{b^2}{2a}(2m+n)\left(\frac1m+\frac1n\right)=\frac{b^2}{2a}\left(3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\right)\geqslant\frac{(3+2\sqrt2)b^2}{2a}$，当且仅当 $n=\sqrt2 m$ 时取等号，所以 $(|PQ|-|QF_2|)_{\min}=\frac{(3+2\sqrt2)b^2}{2a}-2a$，由 $\frac{(3+2\sqrt2)b^2}{2a}-2a\leqslant0$，得 $\frac{b^2}{a^2}\leqslant12-8\sqrt2$，又 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$，$0<e<1$，所以 $8\sqrt2-11\leqslant e^2<1$，故 e^2 的取值范围是 $[8\sqrt2-11,1)$.

方法二(利用焦半径公式和均值不等式)：设 $\angle PF_1F_2=\theta$，点 P 在 x 轴上方，则 $|PF_1|=\frac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\theta}$，$|QF_1|=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\theta}$，所以 $|QF_2|=2a-|QF_1|=2a-\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\theta}$. 若存在点 P 使 $|PQ|=|QF_2|$，即 $|PF_1|+|QF_1|=|QF_2|$，则 $2a=\frac{b^2}{a}\left(\frac{1}{1-e\cos\theta}+\frac{2}{1+e\cos\theta}\right)$，所以 $\frac{a^2}{b^2}=\frac14\left(\frac{1}{1-e\cos\theta}+\frac{2}{1+e\cos\theta}\right)(1-e\cos\theta+1+e\cos\theta)=\frac14\left[3+\frac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta}+\frac{2(1-e\cos\theta)}{1+e\cos\theta}\right]\geqslant\frac{(1+\sqrt2)^2}{4}$，当且仅当 $e\cos\theta=3-2\sqrt2$ 时取等号，故 $\frac{b^2}{a^2}\leqslant12-8\sqrt2$，又 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$，$0<e<1$，所以 $8\sqrt2-11\leqslant e^2<1$，故 e^2 的取值范围是 $[8\sqrt2-11,1)$.

(3)方法一：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，线段 AB 的中点为 E，∵ $|MA|=|NB|$，∴ E 也为 MN 的中点. 由 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1$，两式相减可得 $\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac12$，则 $k_{OE}\cdot k_{AB}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac12$ (O 为坐标原点). 设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，$k<0$，$m>0$，则 $M\left(-\frac{m}{k},0\right)$，$N(0,m)$，∴ $E\left(-\frac{m}{2k},\frac{m}{2}\right)$，∴ $k_{OE}=-k$，∴ $-k\cdot k=-\frac12$，可得 $k=-\frac{\sqrt2}{2}$. ∵ $|MN|=2\sqrt3$，∴ $\sqrt{\frac{m^2}{k^2}+m^2}=2\sqrt3$，即 $\frac{m^2}{k^2}+m^2=12$，∴ $3m^2=12$，又 $m>0$，∴ $m=2$，∴直线 l 的方程为 $y=-\frac{\sqrt2}{2}x+2$，即 $x+\sqrt2y-2\sqrt2=0$.

方法二：设线段 AB 的中点为 $E(x_0,y_0)$ $(x_0>0,y_0>0)$，∵ $|MA|=|NB|$，∴ E 也是 MN 的中点. ∵ M 在 x 轴的正半轴上，∴ $M(2x_0,0)$，∵ N 在 y 轴的正半轴上，∴ $N(0,2y_0)$. ∵ $k_{AB}\cdot k_{OE}=-\frac{b^2}{a^2}$ (O 为坐标原点)，$k_{AB}=k_{MN}$，∴ $k_{MN}\cdot k_{OE}=\frac{-2y_0}{2x_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac36=-\frac12$，∴ $x_0^2=2y_0^2$. ∵ $|MN|=2\sqrt3$，∴ $\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}=2\sqrt3$，又 $x_0^2=2y_0^2$，$x_0>0$，$y_0>0$，∴ $x_0=\sqrt2$，$y_0=1$，故 $M(2\sqrt2,0)$，$N(0,2)$，∴直线 l 的方程为 $y=\frac{2}{-2\sqrt2}x+2$，即 $x+\sqrt2y-2\sqrt2=0$.

方法三：设线段 AB 的中点为 $E(x_0,y_0)$ $(x_0>0,y_0>0)$，∵ $|MA|=|NB|$，∴ E 也为 MN 的中点，∴ $M(2x_0,0)$，$N(0,2y_0)$，直线 AB 的方程为 $\frac{x_0x}{6}+\frac{y_0y}{3}=\frac{x_0^2}{6}+\frac{y_0^2}{3}$，故 $k_{AB}=\frac{-x_0}{2y_0}=k_{MN}=-\frac{2y_0}{2x_0}$，则 $x_0^2=2y_0^2$. 又 $|MN|=2\sqrt3$，∴ $(2x_0)^2+(2y_0)^2=12$，解得 $x_0^2=2$，$y_0^2=1$，可得 $x_0=\sqrt2$，$y_0=1$，∴直线 l 的方程为 $y-1=-\frac{\sqrt2}{2}(x-\sqrt2)$，即 $x+\sqrt2y-2\sqrt2=0$.

变式题 (1)B (2)ACD (3)18

[解析] (1)方法一：∵椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt3}{3}$，∴ $a^2=3c^2$，$b^2=2c^2$. 设直线 AB 的方程为 $x=\frac1k y-c$，与椭圆方程 $2x^2+3y^2=6c^2$ 联立，消去 x 整理得 $\left(3+\frac{2}{k^2}\right)y^2-\frac{4c}{k}y-4c^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{4kc}{3k^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-4c^2k^2}{3k^2+2}$. ∵ $|AF|=2|FB|$，∴ $y_1=-2y_2$，可得 $y_2=-\frac{4kc}{3k^2+2}$，$y_2^2=\frac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，∴ $\left(-\frac{4kc}{3k^2+2}\right)^2=\frac{2c^2k^2}{3k^2+2}$，又 $k>0$，∴ $k=\sqrt2$. 故选 B.

方法二：设 l 为椭圆的左准线，分别过 A，B 两点作 AA_1，BB_1 垂直于 l，垂足分别为点 A_1，B_1，过点 B 作 $BE\perp AA_1$ 于点 E，根据椭圆的第二定义，得 $|AA_1|=\frac{|AF|}{e}$，$|BB_1|=\frac{|BF|}{e}$，∵ $|AF|=2|FB|$，∴ $|AA_1|=\frac{2|BF|}{e}$，∴ $\cos\angle BAE=\frac{|AE|}{|AB|}=\frac{\frac{|BF|}{e}}{3|BF|}=\frac{1}{3e}=\frac{\sqrt3}{3}$，∴ $\sin\angle BAE=\frac{\sqrt6}{3}$，∴ $\tan\angle BAE=\sqrt2$，即 $k=\sqrt2$. 故选 B.

方法三：设直线 AB 的倾斜角为 θ，由椭圆的焦半径公式得 $|AF|=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$，$|FB|=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}$，由题知 $|AF|=2|FB|$，则 $\frac{b^2}{a-c\cos\theta}=\frac{2b^2}{a+c\cos\theta}$，即 $3e\cos\theta=1$，解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt3}{3}$，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt6}{3}$，∴ $k=\tan\theta=\sqrt2$. 故选 B.

(2)设直线 l 与 QF_2 交于点 G. 对于 A，若 $k=1$，则 $Q(0,c)$，所以 $b=c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{c}{\sqrt{2c^2}}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$，故 A 正确；对于 B，设 $A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,$

$-y_0$），且 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $y_0^2=\frac{b^2(a^2-x_0^2)}{a^2}$，所以 $k_{MA}k_{MB}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{-y_0}{-x_0+a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{\frac{b^2(a^2-x_0^2)}{a^2}}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{3}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=1-e^2=\frac{1}{3}$，故 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故B错误；对于C，由题意可知 OG（O 为坐标原点）是 $\triangle QF_1F_2$ 的中位线，故 $l/\!/F_1Q$，故C正确；对于D，设点 $B(x_0,y_0)$，则直线 l：$y=\frac{y_0}{x_0}x$，因为直线 BQ 平行于 x 轴，所以点 $Q(-x_0,y_0)$，线段 F_2Q 的中点为 $G\left(\frac{c-x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，所以由点 G 在直线 l 上且 $k_{F_2G}k=-1$ 得 $\begin{cases}\frac{y_0}{2}=\frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{c-x_0}{2},\\ \frac{y_0}{-x_0-c}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-1,\end{cases}$ 解得 $x_0=\frac{1}{2}c$，$y_0^2=\frac{3c^2}{4}$，即 $y_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}c$，所以 $k=\frac{y_0}{x_0}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{1}{2}c}=\pm\sqrt{3}$，故D正确。故选ACD.

(3)圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心为 $O_1(1,0)$，半径 $r=1$，连接 O_1P。因为直线 l 过圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的圆心，且与圆相交于 A,B 两点，所以 $\overrightarrow{O_1B}=-\overrightarrow{O_1A}$。由椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$，得 $a=3$，$c=1$，故右焦点为 $O_1(1,0)$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1A})\cdot(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1B})=(\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1A})\cdot(\overrightarrow{PO_1}-\overrightarrow{O_1A})=\overrightarrow{PO_1}^2-\overrightarrow{O_1A}^2=|\overrightarrow{PO_1}|^2-1$，又 $a-c\leqslant|\overrightarrow{PO_1}|\leqslant a+c$，即 $2\leqslant|\overrightarrow{PO_1}|\leqslant4$，所以 $3\leqslant|\overrightarrow{PO_1}|^2-1\leqslant15$，即 $3\leqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\leqslant15$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值为15，最小值为3，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值与最小值之和为18.

第54讲　双曲线

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 正常数　$2a$　焦点　焦距
 (1)$2a<|F_1F_2|$　(2)$2a=|F_1F_2|$
 (3)$2a>|F_1F_2|$
2. $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant-a$　$y\leqslant-a$ 或 $y\geqslant a$
 $(-a,0)$　$(a,0)$　$(0,-a)$　$(0,a)$　$2c$
 $\pm\frac{b}{a}x$　$\pm\frac{a}{b}x$　$(1,+\infty)$　a^2+b^2
 $2a$　$2b$

【对点演练】

1. 4　$(0,-5)$，$(0,5)$　$y=\pm\frac{4}{3}x$
 [解析] 把双曲线的方程 $9y^2-16x^2=144$ 化为标准方程，得 $\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1$。由此可知，$a=4$，$b=3$，故 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，则焦点坐标是 $(0,-5)$，$(0,5)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.
2. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$　[解析] 设双曲线方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$，把点 $A(3,-1)$ 的坐标代入，得 $\lambda=8$，故所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.
3. $(0,2)$　[解析] 要使 $\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{t-2}=1$ 表示双曲线，只需 $t(t-2)<0$，解得 $0<t<2$，所以实数 t 的取值范围是 $(0,2)$.
4. 17　[解析] 由题意知 $|PF_1|=9<a+c=10$，所以点 P 在双曲线的左支上，则有 $|PF_2|-|PF_1|=2a=8$，故 $|PF_2|=|PF_1|+8=17$.
5. 双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 的右支　[解析] 设满足题意的点为点 P，由题意知 $|PF_1|-|PF_2|=6<|F_1F_2|=8$，则点 P 在以 F_1,F_2 为焦点，且实轴长为6的双曲线的右支上。设该双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$），半焦距为 c，则 $a=3$，$c=4$，故 $b^2=c^2-a^2=7$，所以所求点的轨迹是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 的右支.
6. 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　[解析] 若双曲线的焦点在 x 轴上，设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1$（$a_1>0,b_1>0$），则其渐近线的方程为 $y=\pm\frac{b_1}{a_1}x$，由题意可得 $\frac{b_1}{a_1}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，即 $b_1=\sqrt{3}a_1$，可得 $c_1=2a_1$，此时离心率为 $\frac{c_1}{a_1}=2$。若双曲线的焦点在 y 轴上，设双曲线的方程为 $\frac{y^2}{a_2^2}-\frac{x^2}{b_2^2}=1$（$a_2>0,b_2>0$），则其渐近线的方程为 $y=\pm\frac{a_2}{b_2}x$，由题意可得 $\frac{a_2}{b_2}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，即 $a_2=\sqrt{3}b_2$，可得 $c_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}a_2$，此时离心率为 $\frac{c_2}{a_2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。综上，所求离心率为2或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

● 课堂考点探究

例1　(1)A　(2)A　[解析] (1)由 $x^2-y^2=2$，得 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，故 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=2$。∵$|PF_2|^2=8|F_1F_2|=8\times4=32$，∴$|PF_2|=4\sqrt{2}$。又 $|PF_1|-|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$，∴$|PF_1|=2\sqrt{2}+|PF_2|=6\sqrt{2}$。故选A.

(2)方法一：设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m>n$。由双曲线的定义知 $m-n=4$，又 $mn=12$，所以 $m=6$，$n=2$。因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，所以 $PF_1\perp PF_2$，故 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{1}{3}$，所以 $\tan\angle POF_2=\tan2\angle PF_1F_2=\frac{2\tan\angle PF_1F_2}{1-\tan^2\angle PF_1F_2}=\frac{3}{4}$.

方法二：设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m>n$。由双曲线的定义知 $m-n=4$，又 $mn=12$，所以 $m=6$，$n=2$。因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，所以 $PF_1\perp PF_2$，则 $|F_1F_2|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，则 $b^2=10-4=6$，故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$。设 $P(x_0,y_0)(x_0>0)$，由 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}-\frac{y_0^2}{6}=1,\\ x_0^2+y_0^2=10,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_0=\frac{4\sqrt{10}}{5},\\ |y_0|=\frac{3\sqrt{10}}{5},\end{cases}$ 故 $\tan\angle POF_2=\frac{|y_0|}{x_0}=\frac{3}{4}$。故选A.

变式题　(1)C　(2)$\sqrt{15}$　[解析] (1)∵两定点 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，∴$|F_1F_2|=6$，由双曲线的定义得，当 $|PF_1|-|PF_2|=\pm4$ 时，动点 P 的轨迹为双曲线，故选C.

(2)因为 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{3}{a^2}=4$，所以 $a^2=1$，则 $c=2$，所以 $|F_1F_2|=4$，又 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为10，所以 $|AF_1|+|AF_2|=6$。不妨设点 A 在双曲线的右支上，由双曲线的定义得 $|AF_1|-|AF_2|=2a=2$，所以 $|AF_1|=4$，$|AF_2|=2$，所以 $\triangle AF_1F_2$ 是等腰三角形。取 AF_2 的中点 B，连接 BF_1，则 $BF_1\perp AF_2$，$|BF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2-|F_2B|^2}=\sqrt{15}$，所以 $S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|AF_2|\cdot|F_1B|=\sqrt{15}$.

例2　(1)$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$　(2)$\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{40}=1$

[解析] (1)设双曲线 C 的半实轴长、半虚轴长分别为 a,b，显然双曲线 C 的中心为原点，焦点在 x 轴上，其半焦距 $c=2$。由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$，得 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$，所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)双曲线 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm2x$，设所求双曲线的方程为 $4x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$，又点 $(-5,2\sqrt{15})$ 在双曲线上，所以 $\lambda=4\times(-5)^2-(2\sqrt{15})^2=100-60=40$，故所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{40}=1$.

变式题　(1)B　(2)D　[解析] (1)因为圆 C：$x^2+y^2+6x+5=0$ 的圆心为 $C(-3,0)$，半径 $r=2$，所以 $c=3$。双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$，由题知 $\frac{|3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$，整理得 $a^2=\frac{5}{4}b^2$，又 $a^2+b^2=9$，所以 $\frac{5}{4}b^2+b^2=9$，所以 $b^2=4$，$a^2=5$，故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$。故选B.

(2)由题意，$|PF_2|=2$，∵焦点到任一条渐近线的距离为 b，∴$b=2$。在 $\triangle POF_2$（O 为原点）中，由等面积法易得点 P 的坐标为 $\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，故 $k_{PF_1}=\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}+c}=\frac{ab}{a^2+c^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，化简可得 $(a-\sqrt{2})^2=0$，故 $a=\sqrt{2}$，∴双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$.

例3　(1)C　(2)$\frac{\sqrt{3}}{3}$　[解析] (1)由题意得 $\sqrt{3m+2}=2\sqrt{m}$，解得 $m=2$，则双曲线 C：$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{2}=1$，故其渐近线方程为 $y=\pm2x$。故选C.

(2)双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{x}{m}$，即 $x\pm my=0$。圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=1$，所以圆心坐标为 $(0,2)$，半径 $r=1$。依题意，圆心 $(0,2)$ 到渐近线 $x\pm my=$

0 的距离 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，解得 $m=\frac{\sqrt3}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt3}{3}$（舍去）.

例 4 (1)A (2)$\frac{3\sqrt5}{5}$ [解析](1)设 $|AF_1|=m(m>0)$，因为△ABF_2 为等边三角形，$AF_1\perp F_1F_2$，所以 $|AF_2|=2m$，$|F_1F_2|=\sqrt3 m=2c$，又 $|AF_2|-|AF_1|=m=2a$，所以双曲线 M 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt3 m}{m}=\sqrt3$. 故选 A.

(2)方法一（坐标法）：依题可设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$B(0,n)$，由 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac23\overrightarrow{F_2B}$，可得 $A\left(\frac53c,-\frac23n\right)$，所以 $\overrightarrow{F_1A}=\left(\frac83c,-\frac23n\right)$，又 $\overrightarrow{F_1B}=(c,n)$，所以由 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$ 可得 $\frac83c^2-\frac23n^2=0$，即 $n^2=4c^2$. 因为点 A 在 C 上，所以 $\frac{\frac{25}{9}c^2}{a^2}-\frac{\frac49n^2}{b^2}=1$，即 $25\frac{c^2}{a^2}-16\frac{c^2}{c^2-a^2}=9$，即 $25e^2-\frac{16e^2}{e^2-1}=9$，解得 $e^2=\frac95$ 或 $e^2=\frac15$（舍去），所以 $e=\frac{3\sqrt5}{5}$.

方法二（几何法）：由 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac23\overrightarrow{F_2B}$ 可得 $\frac{|\overrightarrow{F_2A}|}{|\overrightarrow{F_2B}|}=\frac23$，设 $|F_2A|=2x$，$|F_2B|=3x$，由对称性可得 $|F_1B|=3x$，易知点 A 在双曲线的右支上，根据双曲线的定义可得 $|F_1A|=2x+2a$. 又 $|AB|=5x$，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以 $\sin\angle F_1AF_2=\frac{|F_1B|}{|AB|}=\frac{3x}{5x}=\frac35$，所以 $\cos\angle F_1AF_2=\frac45$，即 $\frac{|F_1A|}{|AB|}=\frac{2x+2a}{5x}=\frac45$，可得 $x=a$，所以 $|AF_1|=4a$，$|AF_2|=2a$. 在△AF_1F_2 中，由余弦定理可得 $\cos\angle F_1AF_2=\frac45=\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}$，即 $5c^2=9a^2$，得 $e=\frac{3\sqrt5}{5}$.

【应用演练】

1. D [解析] 由题意知直线 $y=2x$ 的斜率小于双曲线的渐近线 $y=\frac bax$ 的斜率，所以 $\frac ba>2$，即 $b^2>4a^2$，即 $c^2-a^2>4a^2$，即 $\frac{c^2}{a^2}>5$，所以 $e=\frac ca>\sqrt5$. 故选 D.

2. D [解析] 由题可知四边形 AF_2BF_1 为平行四边形，则 $|F_1B|=|F_2A|=2|F_1A|$. 易知 A 在 y 轴左侧，故 $|F_2A|-|F_1A|=2a$，∴$|F_1A|=2a$，$|F_2A|=4a$. ∵$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{AF_1}=-\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}=-2a\cdot4a\cos\angle F_1AF_2=-8a^2\cos\angle F_1AF_2=4a^2$，∴$\cos\angle F_1AF_2=-\frac12$，则 $|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cos\angle F_1AF_2=4a^2+16a^2-2\cdot2a\cdot4a\cdot\left(-\frac12\right)=28a^2$，即 $4c^2=28a^2$（c 为双曲线的半焦距），∴双曲线的离心率 $e=\sqrt7$，故选 D.

3. $\frac{2\sqrt2}{3}$ [解析] 由双曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 的方程可得 $(m+1)m<0$，解得 $-1<m<0$，所以 $m+1>0>m$，所以双曲线 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 的焦点在 y 轴，且 $a^2=m+1$，$b^2=-m$，所以 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{-m}{m+1}$，又双曲线的离心率为 3，所以 $1+\frac{-m}{m+1}=9$，解得 $m=-\frac89$，所以 $a=\frac13$，$b=\frac{2\sqrt2}{3}$，$c^2=a^2+b^2=\frac19+\frac89=1$，$c=1$，所以焦点坐标为 $(0,\pm1)$，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2\sqrt2}x$，即 $x\pm2\sqrt2y=0$，所以焦点 $(0,\pm1)$ 到渐近线 $x\pm2\sqrt2y=0$ 的距离 $d=\frac{|0\pm2\sqrt2\times(\pm1)|}{\sqrt{1^2+(2\sqrt2)^2}}=\frac{2\sqrt2}{3}$.

4. $\frac32$ [解析] ∵$|AB|=10$，∴$|AF_2|=5$，又∵$|AF_1|=13$，$AF_2\perp F_1F_2$，∴$|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2-|AF_2|^2}=12$，∴$2c=12$，∴$c=6$. ∵$2a=|AF_1|-|AF_2|=8$，∴$a=4$，∴$e=\frac ca=\frac32$.

例 5 解：(1)由题设得 $c=2$，$e=\frac ca=2$，解得 $a=1$，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt3$，所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=x+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$. 由 $\begin{cases}y=x+m,\\3x^2-y^2=3,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $2x^2-2mx-m^2-3=0$，则 $\Delta=(-2m)^2+8(m^2+3)=12(m^2+2)>0$.

由根与系数的关系可知 $\begin{cases}x_1+x_2=m,\\x_1x_2=-\frac{m^2+3}{2}.\end{cases}$

设线段 MN 的中点坐标为 (x_0,y_0)，则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac m2$，$y_0=x_0+m=\frac{3m}{2}$，故线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y-\frac{3m}{2}=-\left(x-\frac m2\right)$，即 $y=-x+2m$.

此直线与 x 轴、y 轴的交点坐标分别为 $(2m,0)$，$(0,2m)$. 由题设可得 $\frac12|2m|\cdot|2m|=4$，即 $m^2=2$，解得 $m=\pm\sqrt2$，故直线 l 的方程为 $y=x\pm\sqrt2$.

变式题 1 (1)B (2)ACD [解析](1)不妨设 $A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,-y_0)$，因为 $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AM}$，$AM\perp x$ 轴，M 在 Γ 上，所以 $M(x_0,-y_0)$，$(x_N-x_0,y_N-y_0)=3(0,-2y_0)=(0,-6y_0)$，所以 $x_N=x_0$，$y_N=-5y_0$，即 $N(x_0,-5y_0)$. 设点 $C(x,y)$，又点 C 在双曲线 Γ 上，则 $k_{CB}\cdot k_{CA}=\frac{y+y_0}{x+x_0}\cdot\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y^2-y_0^2}{x^2-x_0^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)-\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)}{x^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}$，又 $\angle CAB=90°$，所以 $k_{BN}\cdot\left(-\frac{1}{k_{AB}}\right)=\frac{b^2}{a^2}$，又 $k_{BN}=\frac{-y_0-(-5y_0)}{-x_0-x_0}=-\frac{2y_0}{x_0}$，$k_{AB}=\frac{y_0}{x_0}$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=2$，故 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt3$. 故选 B.

(2)对于 A，当 $a=b$ 时，因为 $c^2=a^2+b^2$，所以 $e=\frac ca=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt2$，故 A 正确；对于 B，当过其右焦点 F 的直线 l 与 Γ 的左、右两支均相交时，$|AB|$ 的最小值为 $2a$（此时 A，B 为双曲线的两顶点）；当过其右焦点 F 的直线 l 与 Γ 的右支相交于 A，B 两点时，最短弦长为通径，即交点的横坐标为 c，将 $x=c$ 代入双曲线方程得 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，此时 $|AB|=\frac{2b^2}{a}$，由于 a 与 b 的大小关系不确定，故 $|AB|$ 的最小值不一定为 $2a$，故 B 错误；对于 C，若满足 $|AB|=2a$ 的直线 l 恰有一条，则由选项 B 可知 $2a<\frac{2b^2}{a}$，即 $b^2>a^2$，所以 $e=\frac ca=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}>\sqrt2$，故 C 正确；对于 D，若满足 $|AB|=2a$ 的直线 l 恰有三条，则由选项 B 可知 $2a>\frac{2b^2}{a}$，即 $b^2<a^2$，所以 $e=\frac ca=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}<\sqrt2$，又 $e>1$，所以 $1<e<\sqrt2$，故 D 正确. 故选 ACD.

变式题 2 解：(1)由题意可得 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=1,\\b^2=3,\end{cases}$ 故 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)当直线 l 的斜率不存在时，可设 $A(x_A,y_A)$，则 $B(x_A,-y_A)$，则 $\overrightarrow{OA}=(x_A,y_A)$，$\overrightarrow{OB}=(x_A,-y_A)$，将点 A 的坐标代入双曲线方程得 $x_A^2-\frac{y_A^2}{3}=1$，又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_A^2-y_A^2=0$，解得 $y_A=\pm\frac{\sqrt6}{2}$，此时 $|AB|=2|y_A|=\sqrt6$. 当直线 l 的斜率存在时，可设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，故 $3-k^2\neq0$，$\Delta=4k^2m^2+4(m^2+3)(3-k^2)>0$，则 $x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-m^2-3}{3-k^2}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\cdot\frac{-m^2-3}{3-k^2}+km\cdot\frac{2km}{3-k^2}+m^2=0$，化简得 $3k^2+3=2m^2$，此时 $\Delta=6(k^2+9)>0$，故 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2km}{3-k^2}\right)^2-4\cdot\frac{-m^2-3}{3-k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{12(m^2-k^2+3)}{(3-k^2)^2}}=\sqrt6\cdot\sqrt{\frac{k^4+10k^2+9}{k^4-6k^2+9}}=\sqrt6\cdot\sqrt{1+\frac{16k^2}{k^4-6k^2+9}}$. 当 $k=0$ 时，$|AB|=\sqrt6$；当 $k\neq0$ 时，$|AB|=\sqrt6\cdot\sqrt{1+\frac{16}{k^2+\frac{9}{k^2}-6}}$，∵$3-k^2\neq0$，∴$k^2+\frac{9}{k^2}>2\sqrt{k^2\cdot\frac{9}{k^2}}=6$，故 $\frac{16}{k^2+\frac{9}{k^2}-6}>0$，

故 $|AB|=\sqrt6\cdot\sqrt{1+\frac{16}{k^2+\frac{9}{k^2}-6}}>\sqrt6$.

综上可得,$|AB|$的取值范围为$[\sqrt{6},+\infty)$.

第55讲 抛物线

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 相等 焦点 准线

2. $\left(\frac{p}{2},0\right)$ $\left(-\frac{p}{2},0\right)$ $\left(0,\frac{p}{2}\right)$ $\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ 1 $x=-\frac{p}{2}$ $x=\frac{p}{2}$ $y=-\frac{p}{2}$ $y=\frac{p}{2}$ $x_0+\frac{p}{2}$ $-x_0+\frac{p}{2}$ $y_0+\frac{p}{2}$ $-y_0+\frac{p}{2}$

3. ①> ②= ③<

【对点演练】

1. (4,0) [解析] 抛物线的标准方程为 $y^2=16x$,所以其焦点坐标为(4,0).

2. $\frac{9}{7}$ [解析] 以拱顶为坐标原点,水平向右的方向为x轴的正方向,竖直向上的方向为y轴的正方向建立平面直角坐标系.设抛物线的方程为 $x^2=-2py$ $(p>0)$,设 $A\left(\frac{3}{2},t\right)$,$B(2,t-1)$,则 $\begin{cases}\frac{9}{4}=-2pt,\\4=-2p(t-1),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}t=-\frac{9}{7},\\p=\frac{7}{8},\end{cases}$ 所以暴雨后的水面离桥拱顶的距离为$\frac{9}{7}$ m.

3. $\frac{31}{16}$ [解析] 抛物线的标准方程为 $x^2=\frac{1}{4}y$,则焦点为 $F\left(0,\frac{1}{16}\right)$,准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$.因为点$P(x_0,y_0)$在抛物线上,且$|PF|=2$,所以 $y_0+\frac{1}{16}=2$,即 $y_0=2-\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$.

4. $y^2=8x$ 或 $x^2=y$ [解析] 设抛物线的方程为 $y^2=kx(k\neq0)$ 或 $x^2=my(m\neq0)$,将$P(2,4)$的坐标代入,可得$k=8$,$m=1$,故所求抛物线的方程为 $y^2=8x$ 或 $x^2=y$.

5. 3 [解析] ①当直线l的斜率存在时,设直线l的斜率为k,则当$k=0$时,直线l的方程为$y=2$,满足直线l与抛物线$y^2=2x$有且只有一个公共点;当$k\neq0$时,直线l是抛物线的切线,设直线l的方程为$y=kx+2$,代入抛物线的方程可得 $k^2x^2+(4k-2)x+4=0$,由$\Delta=(4k-2)^2-4k^2\cdot4=0$,得$k=\frac{1}{4}$,故切线方程为$y=\frac{1}{4}x+2$.②当直线$l$的斜率不存在时,直线$l$的方程为$x=0$,满足直线$l$与抛物线$y^2=2x$有且只有一个公共点.综上,满足题意的直线$l$共有3条.

● 课堂考点探究

例1 (1)B (2)A [解析](1)由题意知抛物线的准线方程为$x=-1$,过点M,N作准线的垂线,垂足分别为M',N',根据抛物线的定义得$|MF|=|MM'|$,$|NF|=|NN'|$,所以$|MF|+|NF|=|MM'|+|NN'|$,所以线段MN的中点到准线的距离为$\frac{1}{2}(|MF|+|NF|)=\frac{5}{2}$,所以线段$MN$的中点到$y$轴的距离为$\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$.

(2)抛物线$x^2=4y$的焦点为$F(0,1)$,准线方程为$y=-1$.设$P(m,n)$,$n>0$,则$Q(m,-1)$,$m^2=4n$,由抛物线的定义可得$|PF|=|PQ|=n+1$.在$\triangle PQF$中,$\angle PFQ=\angle PQF=30°$,$\angle FPQ=120°$,可得$|FQ|=\sqrt{3}|PQ|=\sqrt{3}(n+1)$,即$\sqrt{m^2+4}=\sqrt{4n+4}=\sqrt{3}(n+1)$,解得$n=\frac{1}{3}$或$n=-1$(舍去),则$|PQ|=n+1=\frac{4}{3}$.故选A.

变式题 (1)C (2)B [解析](1)由题意得$|y_A|=4$,$x_A+\frac{p}{2}=5$,其中$y_A^2=2px_A$,故$2p\left(5-\frac{p}{2}\right)=16$,解得$p=2$或8.故选C.

(2)由题设知,$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,又$\overrightarrow{OB}=5\overrightarrow{OF}$,所以$B\left(\frac{5p}{2},0\right)$.因为线段$AB$的垂直平分线经过点$F$,所以$|AF|=|BF|=2p$.不妨设$A(x_0,y_0)$且$y_0>0$,则$|AF|=x_0+\frac{p}{2}=2p$,可得$x_0=\frac{3p}{2}$,故$y_0=\sqrt{3}p$,所以$|AB|=\sqrt{\left(\frac{5p}{2}-\frac{3p}{2}\right)^2+3p^2}=2p$,所以$\frac{|AB|}{|AF|}=1$.故选B.

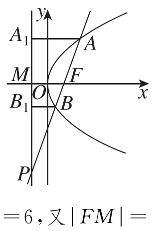
例2 解:(1)将双曲线方程$16x^2-9y^2=144$化为标准方程,得$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$,故双曲线的左顶点为$(-3,0)$,所以抛物线的焦点为$(-3,0)$,抛物线的开口方向向左,可设抛物线的标准方程为$y^2=-2px(p>0)$,则$\frac{p}{2}=3$,解得$p=6$,所以所求抛物线的方程是$y^2=-12x$.

(2)当焦点在x轴的正半轴上时,设抛物线的方程为$y^2=2px(p>0)$,当$y=-3$时,$x=\frac{9}{2p}$,由$|AF|=\frac{9}{2p}+\frac{p}{2}=5$,得$p^2-10p+9=0$,解得$p=1$或$p=9$,所以抛物线的方程为$y^2=2x$或$y^2=18x$.当焦点在$x$轴的负半轴上时,设抛物线的方程为$y^2=-2mx(m>0)$,当$y=-3$时,$x=-\frac{9}{2m}$,由$|AF|=\frac{9}{2m}+\frac{m}{2}=5$,得$m^2-10m+9=0$,解得$m=1$或$m=9$,所以抛物线的方程为$y^2=-2x$或$y^2=-18x$.综上可知,所求抛物线的方程为$y^2=\pm2x$或$y^2=\pm18x$.

(3)根据抛物线的对称性,可知$AB\perp x$轴.因为正三角形OAB的面积是$4\sqrt{3}$,所以$\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2=4\sqrt{3}$,故$|AB|=4$.设$AB$与$x$轴交于点$C$,则$|OC|=2\sqrt{3}$,故可设点$A$的坐标为$(2\sqrt{3},2)$,将点$A$的坐标代入抛物线方程得$4=4\sqrt{3}p$,解得$p=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故所求抛物线的方程为$y^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$.

变式题 (1)6 (2)$y^2=4x$ [解析](1)方法一:根据题意设直线的方程为$y=kx$,∵直线与圆$C:(x+2)^2+y^2=3$相切,∴圆心$C(-2,0)$到直线$y=kx$的距离$d=\frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$,解得$k=\pm\sqrt{3}$,不妨令$k=\sqrt{3}$.由$\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\y^2=2px,\end{cases}$得$P\left(\frac{2}{3}p,\frac{2\sqrt{3}}{3}p\right)$,∴$|OP|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}p\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}p\right)^2}=8$,可得$p=6$.

方法二:由题得,圆心$C(-2,0)$,半径$r=\sqrt{3}$,∵直线与圆相切,∴直线的斜率为$\pm\sqrt{3}$,不妨令$k=\sqrt{3}$,则直线的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$.过点P作x轴的垂线,垂足为A,在$\mathrm{Rt}\triangle OPA$中,$\angle POA=\frac{\pi}{3}$,$OP=8$,可得$P(4,4\sqrt{3})$,又点P在抛物线$y^2=2px$ $(p>0)$上,∴$p=6$.



(2)如图,记C的准线与x轴交于点M,过A,B分别作准线的垂线,垂足分别为A_1,B_1,因为$\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{BF}$,所以$|PB|=3|BF|$,即$|PB|=3|BB_1|$.因为$|AF|=3$,所以$|AA_1|=3$,由$\triangle PBB_1\backsim\triangle PAA_1$可知$|PA|=9$,所以$|PF|=6$,又$|FM|=p$,$\triangle PFM\backsim\triangle PBB_1$,所以$p=|FM|=2$,故$C$的方程为$y^2=4x$.

例3 (1)BD (2)$x=\frac{5p}{2}$ [解析](1)由题意,不妨设点A在第一象限内,直线l:$\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$与x轴的交点为$(1,0)$,又l经过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F,所以$F(1,0)$,可得$p=2$,故抛物线C的方程为$y^2=4x$,故A中说法正确.由$\begin{cases}\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0,\\y^2=4x,\end{cases}$可得$3x^2-10x+3=0$,解得$x=3$或$x=\frac{1}{3}$,可得$A(3,2\sqrt{3})$,$B\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,所以$|AB|=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{16}{3}$,故B中说法错误.易知$M(-1,2\sqrt{3})$,$N\left(-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,$F(1,0)$,可得$k_{NF}\cdot k_{MF}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}\times\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-1$,则$MF\perp NF$,即$\angle MFN=90°$,故C中说法正确.因为$A(3,2\sqrt{3})$,$B\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,所以线段$AB$的中点为$\left(\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,则线段$AB$的中点到$y$轴的距离为$\frac{5}{3}$,故D中说法错误.故选BD.

(2)由抛物线的性质知A,B两点关于x轴对称,设$A(x_0,y_0)$,则$B(x_0,-y_0)$.由题意知$AF\perp OB$,$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以$k_{AF}\cdot k_{OB}=\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}\cdot\frac{-y_0}{x_0}=-1$,所以$y_0^2=x_0\left(x_0-\frac{p}{2}\right)$,即$2px_0=x_0\left(x_0-\frac{p}{2}\right)$.因为$x_0\neq0$,所以$2p=x_0-\frac{p}{2}$,即$x_0=\frac{5p}{2}$,所以直线$AB$的方程为$x=\frac{5p}{2}$.

变式题 (1)A (2)C [解析](1)不妨设$P\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)\left(y_0<0,\frac{y_0^2}{4}>1\right)$,由抛物线的对称性及正方形的性质可得$-y_0=\frac{y_0^2}{4}-1$,可得$y_0=-(2+2\sqrt{2})$,∴$|PF|=\frac{y_0^2}{4}+1=4+2\sqrt{2}$.故选A.

(2)因为抛物线$y^2=4x$的焦点为$F(1,0)$,准线方程为$x=-1$,M在抛物线上,所以$|MF|=x_M+1=6$,故$x_M=5$.不妨设M在第一象限内,则$M(5,2\sqrt{5})$,所以$S_{\triangle MNF}=\frac{1}{2}\times(5-0)\times2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$.故选C.

例4 (1)B (2)BCD [解析](1)方法一:

因为抛物线 C 的焦点 F 到准线的距离为 2,所以 $p=2$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$,焦点为 $F(1,0)$. 设直线 l 的方程为 $x=ty+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=ty+1,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-4ty-4=0$,则 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-4$,故 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=1$. 又 $|AF|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1$,$|BF|=x_2+\frac{p}{2}=x_2+1$,所以 $2|AF|+3|BF|=2(x_1+1)+3(x_2+1)=2x_1+3x_2+5\geqslant2\sqrt{6x_1x_2}+5=2\sqrt{6}+5$,当且仅当 $x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立,故 $2|AF|+3|BF|$ 的最小值为 $2\sqrt{6}+5$. 故选 B.

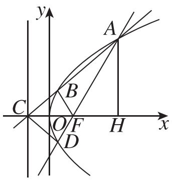
方法二:因为抛物线 C 的焦点 F 到准线的距离为 2,所以 $p=2$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$,焦点为 $F(1,0)$. 设直线 l 的方程为 $x=ty+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=ty+1,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-4ty-4=0$,则 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-4$,故 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=1$,$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=4t^2+2$,则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=1$,故 $2|AF|+3|BF|=(2|AF|+3|BF|)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}\right)=5+\frac{2|AF|}{|BF|}+\frac{3|BF|}{|AF|}\geqslant5+2\sqrt{\frac{3|BF|}{|AF|}\cdot\frac{2|AF|}{|BF|}}=5+2\sqrt{6}$,当且仅当 $|AF|=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$,$|BF|=1+\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立,故 $2|AF|+3|BF|$ 的最小值为 $2\sqrt{6}+5$. 故选 B.

(2)因为点 $A(1,1)$ 在抛物线 C 上,所以 $2p=1$,所以抛物线 C 的方程为 $x^2=y$,其准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$,故 A 选项错误;由 $y'=2x$,知抛物线 C 在点 A 处的切线的斜率为 2,则切线方程为 $y=2x-1$,恰过点 B,故 B 选项正确;由题意知直线 PQ 的斜率存在,设直线 PQ 的方程为 $y=kx-1$,代入 $x^2=y$ 并整理得 $x^2-kx+1=0$,则 $\Delta=k^2-4>0$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$,则 $x_1+x_2=k$,$x_1x_2=1$,所以 $|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{(x_1^2+x_1^4)\cdot(x_2^2+x_2^4)}=\sqrt{x_1^2x_2^2(1+x_1^2)\cdot(1+x_2^2)}=\sqrt{(1+x_1^2)\cdot(1+x_2^2)}=\sqrt{x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+2}>\sqrt{2x_1x_2+2}=2=|OA|^2$,故 C 选项正确;$|BP|\cdot|BQ|=\sqrt{[x_1^2+(y_1+1)^2]\cdot[x_2^2+(y_2+1)^2]}=\sqrt{(x_1^2+k^2x_1^2)\cdot(x_2^2+k^2x_2^2)}=\sqrt{x_1^2x_2^2(1+k^2)\cdot(1+k^2)}=\sqrt{(1+k^2)\cdot(1+k^2)}=1+k^2>5=|BA|^2$,故 D 选项正确. 故选 BCD.

变式题 1 (1)C (2)4 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

[解析] (1)抛物线 $E:y^2=3x$ 的焦点为 $F\left(\frac{3}{4},0\right)$,设直线 AB 的方程为 $x=my+n$,$n\neq0$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y^2=3x,\\x=my+n,\end{cases}$ 可得 $y^2-3my-3n=0$,则 $y_1+y_2=3m$,$y_1y_2=-3n$. 由 $OA\perp OB$,可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $\frac{(y_1y_2)^2}{9}+y_1y_2=0$,即 $n^2-3n=0$,可得 $n=3$,则直线 $AB:x=my+3$ 过定点 $P(3,0)$. 由 $OC\perp AB$,可得 C 的轨迹是以 OP 为直径的圆(除去原点),其轨迹方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}(x\neq0)$,所以 $|CF|$ 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right]$,即 $\left(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right]$. 故选 C.

(2)如图,延长 AF 交抛物线 E 于点 D,连接 CD,过点 A 作 $AH\perp x$ 轴于点 H,下面先证明直线 CA,CD 关于 x 轴对称. 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right)$,$D\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$,由抛物线焦点弦的性质可得 $y_1y_2=-p^2=-4$,又 $C(-1,0)$,



则 $k_{CA}=\frac{y_1-0}{\frac{y_1^2}{4}+1}$,$k_{CD}=\frac{y_2-0}{\frac{y_2^2}{4}+1}$,故 $k_{CA}+k_{CD}=\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}+1}+\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{4}+1}=\frac{4y_1}{y_1^2+4}+\frac{4y_2}{y_2^2+4}=\frac{4\times\left(-\frac{4}{y_2}\right)}{\left(-\frac{4}{y_2}\right)^2+4}+\frac{4y_2}{y_2^2+4}=-\frac{4y_2}{y_2^2+4}+\frac{4y_2}{y_2^2+4}=0$,所以直线 CA,CD 关于 x 轴对称. 又 BF 为 $\angle AFC$ 的平分线,所以 $\angle AFB=\angle CFB=\angle CFD=60°$,所以 $\angle AFH=60°$. 由焦半径公式得,$|AF|=\frac{p}{1-\cos\angle AFH}=\frac{2}{1-\cos60°}=4$,则 $|AH|=2\sqrt{3}$,$|FH|=2$. 又 $F(1,0)$,所以 $A(3,2\sqrt{3})$ 或 $A(3,-2\sqrt{3})$,又 $C(-1,0)$,所以直线 l 的斜率 $k=\frac{2\sqrt{3}-0}{3-(-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $k=\frac{-2\sqrt{3}-0}{3-(-1)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以直线 l 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

变式题 2 解:(1)设 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$,由 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\y^2=2px,\end{cases}$ 可得 $y^2-4py+2p=0$,所以 $y_A+y_B=4p$,$y_Ay_B=2p$,所以 $|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{5}|y_A-y_B|=\sqrt{5}\times\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=4\sqrt{15}$,即 $2p^2-p-6=0$,又 $p>0$,所以 $p=2$.

(2)由(1)可得 $F(1,0)$,因为直线 MN 的斜率不可能为零,所以设直线 $MN:x=my+n$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+n,\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$,所以 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4n$,由 $\Delta=16m^2+16n>0$,得 $m^2+n>0$. 因为 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$,所以 $(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=0$,即 $(my_1+n-1)(my_2+n-1)+y_1y_2=0$,即 $(m^2+1)y_1y_2+m(n-1)(y_1+y_2)+(n-1)^2=0$,将 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4n$ 代入上式得 $4m^2=n^2-6n+1$,故 $4(m^2+n)=(n-1)^2>0$,所以 $n\neq1$,由 $n^2-6n+1\geqslant0$,解得 $n\geqslant3+2\sqrt{2}$ 或 $n\leqslant3-2\sqrt{2}$. 设点 F 到直线 MN 的距离为 d,则 $d=\frac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}$,又 $|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{16m^2+16n}=\sqrt{1+m^2}\sqrt{4(n^2-6n+1)+16n}=2\sqrt{1+m^2}|n-1|$,所以 $\triangle MFN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times d\times|MN|=\frac{1}{2}\times\frac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}\times2\sqrt{1+m^2}|n-1|=(n-1)^2$,又 $n\geqslant3+2\sqrt{2}$ 或 $n\leqslant3-2\sqrt{2}$,所以当 $n=3-2\sqrt{2}$ 时,$\triangle MFN$ 的面积取到最小值 $(2-2\sqrt{2})^2=12-8\sqrt{2}$.

增分微课 8 圆锥曲线中的轨迹问题

例 1 A [解析] 由点 $M(-2\sqrt{5},0)$,$N(2\sqrt{5},0)$,可得 $|MN|=4\sqrt{5}$,则 $|PM|-|PN|=4<|MN|=4\sqrt{5}$,根据双曲线的定义,可得点 P 的轨迹为以 M,N 为焦点的双曲线的右支,且 $2a=4$,$2c=4\sqrt{5}$,可得 $a=2$,$c=2\sqrt{5}$,则 $b^2=c^2-a^2=16$,所以点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant2)$. 故选 A.

变式题 ABC [解析] 对于 A,连接 QA,OA,由已知得 $|QA|=|QP|$,所以 $|QO|+|QA|=|QO|+|QP|=|OP|=r$. 又因为点 A 在圆内,所以 $|OA|<|OP|$,根据椭圆的定义,可得点 Q 的轨迹是以 O,A 为焦点,r 为长轴长的椭圆,A 正确. 对于 B,当点 A 在圆 O 上时,点 Q 与圆心 O 重合,点 Q 的轨迹为定点,故 B 正确. 对于 C,连接 QA,OA,由已知得 $|QA|=|QP|$,所以 $||QO|-|QA||=||QO|-|QP||=|OP|=r$. 又因为点 A 在圆外,所以 $|OA|>|OP|$,根据双曲线的定义,可得点 Q 的轨迹是以 O,A 为焦点,r 为实轴长的双曲线,C 正确. 对于 D,当点 A 与圆心 O 重合时,点 Q 的轨迹为圆,所以点 Q 的轨迹不可能为抛物线,D 错误. 故选 ABC.

例 2 (1)B (2)$y^2=4x(x\neq0,x\neq1)$

[解析] (1)设动点 $M(x,y)(y>0)$,因为 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,直线 AM 与直线 BM 的斜率之积为 2,所以 $\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=2(y>0)$,化简得 $x^2-\frac{y^2}{2}=1(y>0)$. 故选 B.

(2)设 $B(x,y)$,因为 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k_3}$,所以 $\frac{1}{2}+\frac{x}{y}=\frac{x-1}{y-2}(x\neq0,x\neq1)$,化简可得 $y^2=4x(x\neq0,x\neq1)$,故曲线 E 的方程为 $y^2=4x(x\neq0,x\neq1)$.

变式题 解:设 $M(x,y)$,因为动点 M 到直线 $x=3$ 的距离是到点 $(2,0)$ 的距离的 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 倍,所以 $|x-3|=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,化简整理可得 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$,故动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

例 3 A [解析] 设 $M(x,y)$,则 $P'(x,0)$,$P(x,2y)$,因为 P 在曲线 $C:x^2+y^2=16(y>0)$ 上,所以 $x^2+(2y)^2=16(y>0)$,整理得点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$. 故选 A.

变式题 (1)A (2)$x^2+y^2=2(y\neq0)$

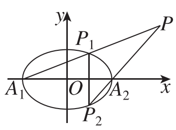
[解析] (1)设 $M(x,y)$,由 M 为线段 OP 的中点,得 $P(2x,2y)$,将点 P 的坐标代入双曲线方程,得 $\frac{(2x)^2}{4}-(2y)^2=1$,即 $x^2-4y^2=1$,故点 M 的轨迹方程是 $x^2-4y^2=1$. 故选 A.

(2)设 $M(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$，由题意可得 $N(x_0,0)$，设 $P(x,y)$，由点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$，可得 $(x-x_0,y)=\sqrt{2}(0,y_0)$，∴ $x-x_0=0$，$y=\sqrt{2}y_0$，则 $x_0=x$，$y_0=\frac{y}{\sqrt{2}}$，又 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1(y_0\neq 0)$，∴ $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1(y\neq 0)$，∴点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=2(y\neq 0)$.

例4 D [解析] 因为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 与直线 $l:y=kx+m(k\neq\pm 2)$ 有唯一的公共点 M，所以直线 l 与双曲线相切，由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(4-k^2)x^2-2kmx-m^2-4=0$，所以 $\Delta=4k^2m^2+4(4-k^2)(m^2+4)=0$，即 $m^2+4=k^2$，将 $m^2+4=k^2$ 代入 $(4-k^2)x^2-2kmx-m^2-4=0$，得 $-m^2x^2-2kmx-k^2=0$，即 $(mx+k)^2=0$. 因为 $k\neq\pm 2$，$m^2+4=k^2$，所以 $m\neq 0$，所以 $x=-\frac{k}{m}$，$y=-\frac{k}{m}\cdot k+m=\frac{m^2-k^2}{m}=-\frac{4}{m}$，即 $M\left(-\frac{k}{m},-\frac{4}{m}\right)$. 由 $m^2+4=k^2$ 可知 $k\neq 0$，所以过点 M 且与 l 垂直的直线方程为 $y+\frac{4}{m}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{k}{m}\right)$，令 $y=0$，得 $x_0=-\frac{5k}{m}$，令 $x=0$，得 $y_0=-\frac{5}{m}$，则 $A\left(-\frac{5k}{m},0\right)$，$B\left(0,-\frac{5}{m}\right)$，由 $\begin{cases}x_0=-\frac{5k}{m},\\ y_0=-\frac{5}{m},\end{cases}$ 得 $m=-\frac{5}{y_0}$，$k=\frac{x_0}{y_0}$，代入 $m^2+4=k^2$，得 $\frac{25}{y_0^2}+4=\frac{x_0^2}{y_0^2}$，即 $\frac{x_0^2}{25}-\frac{4y_0^2}{25}=1(y_0\neq 0)$，则点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}-\frac{4y^2}{25}=1(y\neq 0)$. 故选D.

变式题 解：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨设 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QB}$，则 $P\left(\frac{2x_1+x_2}{3},\frac{2y_1+y_2}{3}\right)$，易知 $F(1,0)$，因为点 P 位于线段 OF 上，所以 $\frac{2x_1+x_2}{3}\in[0,1]$，$\frac{2y_1+y_2}{3}=0$. 设 $y_1=t$，则 $y_2=-2t$，则 $x_1=\frac{t^2}{4}$，$x_2=t^2$，所以 $\frac{2x_1+x_2}{3}=\frac{t^2}{2}\in[0,1]$，由 A,B 不重合知 $t\neq 0$，所以 $t^2\in(0,2]$. 设 $Q(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{x_1+2x_2}{3}=\frac{3}{4}t^2$，$y_0=\frac{y_1+2y_2}{3}=-t$，所以 $y_0^2=\frac{4}{3}x_0$，又 $x_0=\frac{3}{4}t^2\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$，所以点 Q 的轨迹方程为 $y^2=\frac{4}{3}x\left(0<x\leqslant\frac{3}{2}\right)$.

例5 C [解析] 设直线 A_1P_1 与 A_2P_2 的交点为 $P(x,y)(x\neq\pm 3)$，由题可设 $A_1(-3,0)$，$A_2(3,0)$，$P_1(x_0,y_0)$，$P_2(x_0,-y_0)$，则 $x_0\neq\pm 3$.



如图，∵A_1,P_1,P 三点共线，∴ $\frac{y_0}{x_0+3}=\frac{y}{x+3}$ ①，∵ A_2,P_2,P 三点共线，∴ $\frac{-y_0}{x_0-3}=\frac{y}{x-3}$ ②. 由①②得 $\frac{-y_0^2}{x_0^2-9}=\frac{y^2}{x^2-9}(*)$，∵ $P_1(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上，∴ $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1$，可得 $y_0^2=4\left(1-\frac{x_0^2}{9}\right)$，将其代入(*)式，得 $\frac{y^2}{x^2-9}=\frac{-4\left(1-\frac{x_0^2}{9}\right)}{x_0^2-9}=\frac{4}{9}$，化简得 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$，∴点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1(x\neq\pm 3)$. 故选C.

变式题 解：由题可知，$E(0,-\sqrt{2})$，$G(0,\sqrt{2})$，$F(\sqrt{6},0)$，$C(\sqrt{6},\sqrt{2})$，设 $P(x,y)$，$R(x_R,0)$，$S(\sqrt{6},y_S)$，由 $\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OF}$，得 $x_R=\sqrt{6}\lambda$，则 $R(\sqrt{6}\lambda,0)$，由 $\overrightarrow{CS}=\lambda\overrightarrow{CF}$，得 $y_S=\sqrt{2}(1-\lambda)$，则 $S(\sqrt{6},\sqrt{2}(1-\lambda))$. 当 $\lambda\neq 0$ 时，直线 ER 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}\lambda}x-\sqrt{2}$，直线 GS 的方程为 $y=\frac{-\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{6}}x+\sqrt{2}$，联立消去参数 λ 得 $(y+\sqrt{2})(y-\sqrt{2})=-\frac{1}{3}x^2$，即 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1(x\neq 0)$. 当 $\lambda=0$ 时，易得 $P(0,\sqrt{2})$，满足上述方程. 所以直线 ER 与直线 GS 的交点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$(不含点 $(0,-\sqrt{2})$).

第56讲　圆锥曲线热点问题

/第1课时　长度、斜率、面积问题/

● 课堂考点探究

例1 解：(1)∵点 $P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 在椭圆 C 上，∴ $\frac{a^2}{5a^2}+\frac{a^2}{2b^2}=1$，整理得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{8}$，∴椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2)由题意可知，点 A 的坐标为 $(-a,0)$，$|AO|=a$. 易知直线 OQ 的斜率存在，设直线 OQ 的斜率为 k，则其方程为 $y=kx$，设点 Q 的坐标为 (x_0,y_0)，则 $\begin{cases}y_0=kx_0,\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y_0，整理得 $x_0^2=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$ ①. 由 $|AQ|=|AO|$，得 $(x_0+a)^2+k^2x_0^2=a^2$，整理得 $(1+k^2)x_0^2+2ax_0=0$，又 $x_0\neq 0$，∴ $x_0=-\frac{2a}{1+k^2}$ ②，把②代入①得 $\frac{4a^2}{(1+k^2)^2}=\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$，整理得 $(1+k^2)^2=4k^2\cdot\frac{a^2}{b^2}+4$，

由(1)知 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{8}{5}$，则 $(1+k^2)^2=\frac{32}{5}k^2+4$，即 $5k^4-22k^2-15=0$，可得 $k^2=5$，解得 $k=\pm\sqrt{5}$，

故直线 OQ 的斜率为 $\pm\sqrt{5}$.

变式题1 解：(1)因为椭圆 C 的一个顶点为 $(2,0)$，离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\begin{cases}a=2,\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$

又因为 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意可得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1,\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1,\end{cases}$ 两式相减，得 $\frac{1}{4}(x_1+x_2)(x_1-x_2)+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，所以 $\frac{1}{4}(x_1+x_2)(x_1-x_2)=-(y_1+y_2)(y_1-y_2)$，又因为线段 AB 的中点的横坐标为 $-\frac{1}{2}$，所以 $x_1+x_2=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，且线段 AB 的中点的纵坐标为 $k\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{k}{2}$，所以 $y_1+y_2=2\times\frac{k}{2}=k$，所以 $-\frac{1}{4}(x_1-x_2)=-k(y_1-y_2)$，所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-\frac{1}{4}}{-k}=\frac{1}{4k}$，又因为 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，所以 $k=\frac{1}{4k}$，所以 $k^2=\frac{1}{4}$，又因为 $k>0$，所以 $k=\frac{1}{2}$，所以直线 $l:y=\frac{1}{2}(x+1)$. 由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}(x+1),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 可得 $2x^2+2x-3=0$，所以 $x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=-\frac{3}{2}$，所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\times\sqrt{1+4\times\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{35}}{2}$，所以直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$，弦长 $|AB|$ 为 $\frac{\sqrt{35}}{2}$.

变式题2 解：(1)由题意知 $\frac{9}{a^2}-\frac{7}{b^2}=1$，$a^2+b^2=4$，可得 $a^4-20a^2+36=0$，则 $a^2=2$ 或 $a^2=18$. 当 $a^2=2$ 时，$b^2=2$；当 $a^2=18$ 时，$b^2=-14$，舍去. 故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+2$，由 $\begin{cases}x=ty+2,\\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(t^2-1)y^2+4ty+2=0$，则 $t^2-1\neq 0$，$\Delta=16t^2-8(t^2-1)=8t^2+8>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{4t}{t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{2}{t^2-1}$. 由直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A,B 两点，结合直线 l 的斜率大于0，可得 $\begin{cases}t>0,\\ y_1y_2=\frac{2}{t^2-1}<0,\end{cases}$ 解得 $0<t<1$. 由 PF 平分 $\angle APB$，得 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|AF|}{|BF|}$，即 $\frac{\sqrt{(x_1-3)^2+(y_1+\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(x_2-3)^2+(y_2+\sqrt{7})^2}}=\left|\frac{y_1}{y_2}\right|$，即 $\frac{\sqrt{(ty_1-1)^2+(y_1+\sqrt{7})^2}}{\sqrt{(ty_2-1)^2+(y_2+\sqrt{7})^2}}=\left|\frac{y_1}{y_2}\right|$，等号两边同时平方得

$\frac{(t^2+1)y_1^2+2(\sqrt{7}-t)y_1+8}{(t^2+1)y_2^2+2(\sqrt{7}-t)y_2+8}=\frac{y_1^2}{y_2^2}$，整理可得 $4(y_1+y_2)+(\sqrt{7}-t)y_1y_2=0$，将 $y_1+y_2=-\frac{4t}{t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{2}{t^2-1}$ 代入，可得 $\frac{-16t}{t^2-1}+\frac{2(\sqrt{7}-t)}{t^2-1}=0$，解得 $t=\frac{\sqrt{7}}{9}\in(0,1)$，符合题意，故直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{7}}{9}y+2$，即 $9x-\sqrt{7}y-18=0$.

例 2 解：(1)因为椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，以椭圆 E 的焦点和短轴端点为顶点的四边形是边长为 2 的正方形，

所以 $b=c=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故 $a^2=b^2+c^2=4$，可得 $a=2$，所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由题意知直线 AB 的斜率存在，且不为 0，设直线 $AB:y=kx+t(t>\sqrt{2},k\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-4=0$，由题意可知，$\Delta=16k^2t^2-8(2k^2+1)(t^2-2)=8(4k^2+2-t^2)>0$，即 k,t 应满足 $4k^2+2-t^2>0$. 由根与系数的关系可知，$x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-4}{1+2k^2}$.

方法一(斜率转化)：直线 $AC:y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$. 若直线 BD 的斜率为 0，则由椭圆的对称性可知点 B,D 关于 y 轴对称，所以 $k_{AC}+k_{BC}=0$，即 $\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=0$，

即 $\frac{kx_1+t-1}{x_1}+\frac{kx_2+t-1}{x_2}=0$，化简得 $2kx_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)=0$，将 $x_1+x_2=\frac{-4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-4}{1+2k^2}$ 代入，得 $t=2$. 经检验，$t=2$ 符合题意，所以若直线 BD 的斜率为 0，则 t 的值为 2.

方法二(三点共线)：若直线 BD 的斜率为 0，则由椭圆的对称性可设 $D(-x_2,y_2)$，故直线 $AD:y=\frac{y_1-y_2}{x_1+x_2}(x-x_1)+y_1$，令 $x=0$，则 $y_C=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{x_1+x_2}=\frac{x_1(kx_2+t)+x_2(kx_1+t)}{x_1+x_2}=\frac{2kx_1x_2+t(x_1+x_2)}{x_1+x_2}=\frac{4k(t^2-2)}{-4kt}+t=\frac{2}{t}=1$，解得 $t=2$. 经检验，$t=2$ 符合题意，所以若直线 BD 的斜率为 0，则 t 的值为 2.

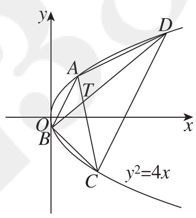
例 3 解：(1)将点 A 的坐标代入双曲线 C 的方程得 $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2-1}=1$，可得 $a^2=2$，故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$. 由题知，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，联立直线 l 与双曲线 C 的方程，可得 $(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$，则 $\Delta=8(m^2+1-2k^2)>0$，$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2-1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2+2}{2k^2-1}$. 由题知 $k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-2}=0$，化简得 $2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)=0$，则 $\frac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1}+(m-1-2k)\left(-\frac{4km}{2k^2-1}\right)-4(m-1)=0$，可得 $(k+1)(m+2k-1)=0$，因为直线 l 不过点 A，所以 $2k+m-1\neq 0$，所以 $k=-1$，即直线 l 的斜率为 -1.

(2)设直线 AP 的倾斜角为 $\alpha(\tan\alpha>0)$，由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，可得 $\tan\frac{\angle PAQ}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由 $2\alpha+\angle PAQ=\pi$，可得 $k_{AP}=\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\angle PAQ}{2}\right)=\sqrt{2}$，即 $\frac{y_1-1}{x_1-2}=\sqrt{2}$，又 $\frac{x_1^2}{2}-y_1^2=1$，所以 $x_1=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}$，$y_1=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$，代入直线 l 的方程，可得 $m=\frac{5}{3}$，则 $x_1+x_2=\frac{20}{3}$，$x_1x_2=\frac{68}{9}$. 因为 $|AP|=\sqrt{3}|x_1-2|$，$|AQ|=\sqrt{3}|x_2-2|$，

由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，可得 $\sin\angle PAQ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $S_{\triangle PAQ}=\frac{1}{2}|AP||AQ|\sin\angle PAQ=\sqrt{2}|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4|=\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

变式题 解：(1)设圆心为 $Q(x,y)$，由题意可得 $\sqrt{|x|^2+2^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，整理可得 $y^2=4x$，所以曲线 E 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由题意可知，直线 AB 的斜率存在且不为 0，如图，设直线 $AB:x=my+n(m\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$. 由 $\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=4x,\end{cases}$



消去 x 可得 $y^2-4my-4n=0$，则 $\Delta_1=16m^2+16n>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$. 直线 $AC:x=\frac{x_1-2}{y_1-1}(y-1)+2$，由 $\begin{cases}x=\frac{x_1-2}{y_1-1}(y-1)+2,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 可得 $y^2-\frac{4(x_1-2)}{y_1-1}y+\frac{4(x_1-2)}{y_1-1}-8=0$，则 $\Delta_2>0$，$y_1+y_3=\frac{4(x_1-2)}{y_1-1}$，即 $y_3=\frac{4x_1-8}{y_1-1}-y_1$，由 $y_1^2=4x_1$，可得 $y_3=\frac{4x_1-8}{y_1-1}-y_1=\frac{y_1^2-8}{y_1-1}-y_1=\frac{y_1-8}{y_1-1}$，

同理可得 $y_4=\frac{y_2-8}{y_2-1}$，则 $k_{CD}=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{y_3-y_4}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}=\frac{4}{y_3+y_4}=\frac{4}{\frac{y_1-8}{y_1-1}+\frac{y_2-8}{y_2-1}}=\frac{4[y_1y_2-(y_1+y_2)+1]}{2y_1y_2-9(y_1+y_2)+16}=\frac{4n+4m-1}{2n+9m-4}$.

因为 $AB/\!/CD$，所以 $k_{AB}=k_{CD}$，即 $\frac{1}{m}=\frac{4n+4m-1}{2n+9m-4}$，整理可得 $(2m-1)(m+n-2)=0$，由题意可知，点 $T(2,1)$ 不在直线 $AB:x=my+n$ 上，则 $m+n\neq 2$，即 $m+n-2\neq 0$，可得 $2m-1=0$，即 $m=\frac{1}{2}$，所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{1}{m}=2$.

例 4 解：(1)由已知得 $b=3$，将点 $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入椭圆 C 的方程，得 $\frac{9}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，解得 $a^2=12$，$\therefore c^2=a^2-b^2=3$，

$\therefore C$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

(2)方法一：设点 B 到直线 AP 的距离为 d，由已知得 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|PA|\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{9+\frac{9}{4}}\times d=9$，解得 $d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

$k_{AP}=\frac{3-\frac{3}{2}}{0-3}=-\frac{1}{2}$，易得直线 AP 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+3$. 设过点 B 且与直线 AP 平行的直线为 l'，又 l' 与直线 AP 间的距离为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$，点 B 在椭圆 C 上，$\therefore l':y=-\frac{1}{2}x-3$. 联立 $y=-\frac{1}{2}x-3$ 和 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$，解得 $x_1=0$，$x_2=-3$，

$\therefore B(0,-3)$ 或 $B\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$. 当点 B 的坐标为 $(0,-3)$ 时，l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$；当点 B 的坐标为 $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$ 时，l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$. $\therefore l$ 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$ 或 $y=\frac{1}{2}x$.

方法二：①当 l 的斜率不存在时，$B\left(3,-\frac{3}{2}\right)$，$\therefore|BP|=3$，点 A 到直线 BP 的距离为 3，$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}\neq 9$，不满足题意.

②当 l 的斜率存在时，设斜率为 k，则 l 的方程为 $y=k(x-3)+\frac{3}{2}$，

由 $\begin{cases}y=k(x-3)+\frac{3}{2},\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+12k(1-2k)x+(3-6k)^2-36=0$，

$\therefore\Delta=36(2k+3)^2>0$，故 $k\neq-\frac{3}{2}$，由根与系数的关系得 $3+x_B=\frac{12k(2k-1)}{3+4k^2}$，

$\therefore x_B=\frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$，$\therefore|BP|=\sqrt{1+k^2}\cdot|3-x_B|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{|12k+18|}{3+4k^2}$，又点 A 到直线 BP 的距离 $d=\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$，$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{|12k+18|}{3+4k^2}\cdot\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}=9$，$\therefore|2k+3|\cdot\left|k+\frac{1}{2}\right|=3+4k^2$，$\therefore|2k+3|\cdot|2k+1|=8k^2+6$，$\therefore 4k^2+8k+3=8k^2+6\left(k<-\frac{3}{2}\text{ 或 }k\geqslant-\frac{1}{2}\right)$ 或 $4k^2+8k+3=-8k^2-6\left(-\frac{3}{2}<k<-\frac{1}{2}\right)$，即

$4k^2-8k+3=0\left(k<-\frac{3}{2}\text{或}k\geqslant-\frac{1}{2}\right)$或$12k^2+8k+9=0\left(-\frac{3}{2}<k<-\frac{1}{2}\right)$，解得$k=\frac{3}{2}$或$\frac{1}{2}$，

∴l的方程为$y=\frac{3}{2}x-3$或$y=\frac{1}{2}x$.

变式题 解：(1)由题意可得$\begin{cases}2b=2\sqrt{3},\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=6,\\ b^2=3,\\ c^2=3,\end{cases}$所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)当直线l的斜率不存在时，直线l的方程为$x=\pm1$，当直线l的方程为$x=1$时，由四边形$OMPN$为平行四边形，可得$P(2,0)$，因为$\frac{4}{6}+\frac{0}{3}=\frac{2}{3}<1$，所以点$P(2,0)$不在椭圆$C$上，不符合题意.

当直线l的方程为$x=-1$时，由四边形$OMPN$为平行四边形，可得$P(-2,0)$，因为$\frac{4}{6}+\frac{0}{3}=\frac{2}{3}<1$，所以点$P(-2,0)$不在椭圆$C$上，不符合题意，所以直线$l$的斜率存在，设直线$l$的方程为$y=kx+m$，则$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，所以$m^2=k^2+1$①.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去$y$整理得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

则$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-6)=16k^2(k^2+1)-4(2k^2+1)[2(k^2+1)-6]=8(5k^2+2)>0$. 设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-6}{2k^2+1}$，故$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=-\frac{4k^2m}{2k^2+1}+\frac{2m(2k^2+1)}{2k^2+1}=\frac{2m}{2k^2+1}$，所以线段$MN$的中点坐标为$\left(-\frac{2km}{2k^2+1},\frac{m}{2k^2+1}\right)$. 因为四边形$OMPN$为平行四边形，所以$P\left(-\frac{4km}{2k^2+1},\frac{2m}{2k^2+1}\right)$，又因为点$P$在椭圆$C$上，所以$\frac{16k^2m^2}{6(2k^2+1)^2}+\frac{4m^2}{3(2k^2+1)^2}=1$②.

将①代入②得$\frac{8k^2(k^2+1)}{3(2k^2+1)^2}+\frac{4(k^2+1)}{3(2k^2+1)^2}=1$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$m=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以

$|MN|=\sqrt{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)^2-4\times\frac{2m^2-6}{2k^2+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{16k^2m^2}{(2k^2+1)^2}-4\times\frac{2m^2-6}{2k^2+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\times\sqrt{\frac{16\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}}{\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)^2}-4\times\frac{2\times\frac{3}{2}-6}{2\times\frac{1}{2}+1}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，所以$S_{\square OMPN}=2S_{\triangle OMN}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2}\times1=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

第2课时 最值与范围、证明问题

● 课堂考点探究

例1 解：(1)设$E(x,y)$为椭圆上任意一点，则$|PE|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{-11y^2-2y+13}=\sqrt{-11\left(y+\frac{1}{11}\right)^2+\frac{144}{11}}$，

因此，当E点坐标为$\left(\pm\frac{12\sqrt{10}}{11},-\frac{1}{11}\right)$时，$|PE|$取到最大值$\frac{12\sqrt{11}}{11}$.

(2)由题意，设AB的直线方程为$y=kx+\frac{1}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由AB的直线方程与椭圆方程联立得$\begin{cases}y=kx+\frac{1}{2},\\ x^2+12y^2=12,\end{cases}$则$(1+12k^2)x^2+12kx-9=0$，从而$x_1+x_2=\frac{-12k}{1+12k^2}$，$x_1x_2=\frac{-9}{1+12k^2}$.

设$C(x_C,y_C)$，$D(x_D,y_D)$，由PA与CD的直线方程联立得$\begin{cases}y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x,\\ y=-\frac{1}{2}x+3,\end{cases}$解得$x_C=\frac{4x_1}{(2k+1)x_1-1}$.

同理$x_D=\frac{4x_2}{(2k+1)x_2-1}$.

那么$|CD|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}|x_C-x_D|=2\sqrt{5}\left|\frac{x_2-x_1}{(2k+1)^2x_1x_2-(2k+1)(x_1+x_2)+1}\right|=\frac{3\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{16k^2+1}}{|3k+1|}$. 当$k=-\frac{1}{3}$时，$PA/\!/CD$或$PB/\!/CD$，不符合题意. 令$3k+1=t$，则$|CD|=\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{25}{9}\left(\frac{1}{t}-\frac{16}{25}\right)^2+\frac{16}{25}}$.

因此，当$k=\frac{3}{16}$时，$|CD|$取得最小值，且最小值为$\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

变式题 解：(1)由题意可知$2b=4$，故$b=2$，又渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm2x$，所以$a=1$，故双曲线C的标准方程为$x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)由题意知$F(\sqrt{5},0)$.

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_0,y_0)$，设直线AB的方程为$x=my+\sqrt{5}$($m\neq0$)，由$\begin{cases}x=my+\sqrt{5},\\ 4x^2-y^2=4\end{cases}$得$(4m^2-1)y^2+8\sqrt{5}my+16=0$，故$4m^2-1\neq0$，$\Delta=320m^2-64(4m^2-1)=64(m^2+1)>0$，$y_1+y_2=\frac{-8\sqrt{5}m}{4m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{16}{4m^2-1}>0$，

则$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{4\sqrt{5}m}{4m^2-1}$，$x_0=my_0+\sqrt{5}=-\frac{\sqrt{5}}{4m^2-1}$. 由$O,M,P$三点共线得$\frac{y_0}{x_0}=\frac{y_P}{x_P}=4m$①，由$PF\perp AB$得$k_{PF}\cdot k_{AB}=-1$，即$\frac{y_P-0}{x_P-\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{m}=-1$②.

由①②解得$\begin{cases}x_P=\frac{1}{\sqrt{5}},\\ y_P=\frac{4m}{\sqrt{5}},\end{cases}$即$P\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{4m}{\sqrt{5}}\right)$.

由$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$，可知四边形$PAQB$是平行四边形，所以$S_{\text{四边形}PAQB}=2S_{\triangle PAB}=d\cdot|AB|$，其中$d$为点$P$到直线$AB$的距离.

又$d=\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{4m^2}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}\right|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{1+m^2}$，

$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{8\sqrt{m^2+1}}{|4m^2-1|}=\frac{8(m^2+1)}{|4m^2-1|}$，

所以$S_{\text{四边形}PAQB}=\frac{4}{\sqrt{5}}\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{8(m^2+1)}{|4m^2-1|}=\frac{32}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(m^2+1)^{\frac{3}{2}}}{|4m^2-1|}=\frac{32}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{(m^2+1)^3}{(4m^2-1)^2}}$. 令$t=4m^2-1>0$，则$m^2=\frac{t+1}{4}$，$S_{\text{四边形}PAQB}=\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\frac{(t+5)^3}{t^2}}$.

令$f(t)=\frac{(t+5)^3}{t^2}$，$t>0$，则$f'(t)=\frac{3(t+5)^2\cdot t^2-2t\cdot(t+5)^3}{t^4}=\frac{(t+5)^2(t-10)}{t^3}$，

所以$f(t)$在$(0,10)$上单调递减，在$(10,+\infty)$上单调递增，所以$f(t)_{\min}=f(10)=\frac{135}{4}$，所以$(S_{\text{四边形}PAQB})_{\min}=\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{3\sqrt{15}}{2}=6\sqrt{3}$，当且仅当$t=10$，即$m=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$时取等号，故四边形$PAQB$面积的最小值为$6\sqrt{3}$.

例2 解：(1)方法一：设$P(x,y)$，则$|y|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$，化简得$y=x^2+\frac{1}{4}$，

即W的方程为$y=x^2+\frac{1}{4}$.

方法二：根据抛物线的定义可知，点P在以$F\left(0,\frac{1}{2}\right)$为焦点，$x$轴为准线的抛物线上，其中$p=\frac{1}{2}$，从而$x^2=2p\left(y-\frac{1}{4}\right)=y-\frac{1}{4}$，故$W$的方程为$y=x^2+\frac{1}{4}$.

(2)证明：不妨设A,B,D三点在W上，且有$BA\perp DA$，设$A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$，直线$BA,DA$的斜率分别为$k,-\frac{1}{k}$，由对称性不妨设$|k|\leqslant1$.

由$\begin{cases}y=x^2+\frac{1}{4},\\ y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4},\end{cases}$可得$x^2-kx+ka-a^2=0$，由根与系数的关系得$x_A+x_B=k$，所以$B\left(k-a,(k-a)^2+\frac{1}{4}\right)$，所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|k-2a|$.

同理可得$|AD|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\left|-\frac{1}{k}-2a\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\left|\frac{1}{k}+2a\right|$，所以$|AB|+|AD|=\sqrt{1+k^2}\cdot|k-2a|+\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\left|\frac{1}{k}+2a\right|\geqslant\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\frac{1}{k}+2a\right|\right)\geqslant\sqrt{1+k^2}\cdot\left|k+\frac{1}{k}\right|=\sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$. 令$m=k^2$，设

$f(m)=\frac{(1+m)^3}{m}=m^2+3m+\frac{1}{m}+3$ $(0<m\leqslant 1)$，可得 $f'(m)=2m+3-\frac{1}{m^2}=\frac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$，所以 $f(m)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，所以 $f(m)$ 在 $(0,1]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}$. 所以 $|AB|+|AD|=\sqrt{f(k^2)}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，分析可知，$|AB|+|AD|$ 取不到 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以矩形 $ABCD$ 的周长为 $2(|AB|+|AD|)>3\sqrt{3}$，故得证.

例 3 解：(1)因为 $MF\perp x$ 轴且 $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$，所以 $c=1$，所以 $a^2-b^2=1$①. 将点 $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入椭圆方程得 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$②，联立①②，解得 $b^2=3,a^2=4$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)证明：方法一：由题可知 $F(1,0)$，$N\left(\frac{5}{2},0\right)$. 当直线 AB 与 x 轴不重合时，设 $l_{AB}:x=ty+4$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=ty+4,\end{cases}$ 消去 x 可得 $(3t^2+4)y^2+24ty+36=0$，由 $\Delta>0$，得 $t^2>4$，由根与系数的关系可得 $y_1+y_2=-\frac{24t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{36}{3t^2+4}$.

$l_{NB}:y=\frac{y_2}{x_2-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)$，令 $x=1$，得 $y_Q=\frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2-\frac{5}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}y_2}{ty_2+\frac{3}{2}}$，所以 $y_Q-y_1=\frac{-\frac{3}{2}y_2}{ty_2+\frac{3}{2}}-y_1=\frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)-ty_1y_2}{ty_2+\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}\left(-\frac{24t}{3t^2+4}\right)-t\cdot\frac{36}{3t^2+4}}{ty_2+\frac{3}{2}}=0$，故 $k_{AQ}=0$，即 $AQ\perp y$ 轴. 当直线 AB 与 x 轴重合时，$y_Q=y_A=0$，故 $k_{AQ}=0$，即 $AQ\perp y$ 轴. 综上，$AQ\perp y$ 轴.

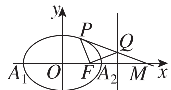
方法二：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ ($\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq\pm 1$)，

则 $\begin{cases}\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=4,\\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=4+4\lambda-\lambda x_2,\\ y_1=-\lambda y_2,\end{cases}$

又由 $\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12,\\ 3(\lambda x_2)^2+4(\lambda y_2)^2=12\lambda^2,\end{cases}$ 两式相减，整理可得 $3\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdot\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}+4\cdot\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdot\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}=12$，所以 $5\lambda-2\lambda x_2+3=0$. 由题可知 $N\left(\frac{5}{2},0\right)$，则 $l_{NB}:y=\frac{y_2}{x_2-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)$，令 $x=1$ 得 $y_Q=\frac{3y_2}{5-2x_2}=\frac{3\lambda y_2}{5\lambda-2\lambda x_2}=-\lambda y_2=y_1$，所以 $k_{AQ}=0$，故 $AQ\perp y$ 轴.

变式题 1 解：(1)由 $G:x^2+my^2=m$，得 $G:\frac{x^2}{m}+y^2=1$，由题意可得 $m>1$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{m-1}}{\sqrt{m}}$，解得 $m=2$，故 $G:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，则半焦距 $c=\sqrt{m-1}=1$，故 $F(1,0)$.

(2)证明：如图，设 $P(x_0,y_0)$，$x_0\neq 0$ 且 $-\sqrt{2}<x_0<\sqrt{2}$，则 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$.



由题知 $Q(2,y_Q)$，$M(x_M,0)$. 由 $PF\perp FQ$，得 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，故 $(x_0-1)\cdot(2-1)+y_0\cdot y_Q=0$，即 $y_Q=\frac{1-x_0}{y_0}$. 由 $k_{PQ}=k_{PM}$，得 $\frac{y_Q-y_0}{2-x_0}=\frac{y_0}{x_0-x_M}$，故 $x_M=x_0-\frac{y_0(2-x_0)}{y_Q-y_0}=x_0-\frac{y_0(2-x_0)}{\frac{1-x_0}{y_0}-y_0}=x_0-\frac{y_0^2(2-x_0)}{1-x_0-y_0^2}=x_0-\frac{\left(1-\frac{x_0^2}{2}\right)(2-x_0)}{\frac{x_0^2}{2}-x_0}=x_0-\frac{x_0^3-2x_0^2-2x_0+4}{x_0^2-2x_0}=\frac{2x_0-4}{x_0^2-2x_0}=\frac{2(x_0-2)}{x_0(x_0-2)}=\frac{2}{x_0}$. 由 $G:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 可得 $A_1(-\sqrt{2},0)$，$A_2(\sqrt{2},0)$，则 $|MP|^2=\left(\frac{2}{x_0}-x_0\right)^2+y_0^2=\frac{4}{x_0^2}-4+x_0^2+y_0^2=\frac{4}{x_0^2}-4+x_0^2+1-\frac{x_0^2}{2}=\frac{x_0^2}{2}-3+\frac{4}{x_0^2}$，

$|MA_1|\cdot|MA_2|=\left|\frac{2}{x_0}+\sqrt{2}\right|\left|\frac{2}{x_0}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{4}{x_0^2}-2\right|=\frac{4}{x_0^2}-2$，所以 $|MP|^2-|MA_1|\cdot|MA_2|=\frac{x_0^2}{2}-3+\frac{4}{x_0^2}-\frac{4}{x_0^2}+2=\frac{x_0^2}{2}-1$，由 $x_0\neq 0$ 且 $-\sqrt{2}<x_0<\sqrt{2}$，得 $\frac{x_0^2}{2}-1<0$，故 $|MP|^2<|MA_1|\cdot|MA_2|$.

变式题 2 解：(1)由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\\ 2b=2\sqrt{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2,\\ c^2=2,\end{cases}$ 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)证明：由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，则 $\Delta=8(4k^2-m^2+2)>0$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{2k^2+1}$. 因为 $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$，点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot d=\frac{1}{2}|m|\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}|m|\sqrt{\left(\frac{-4km}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\frac{2m^2-4}{2k^2+1}}=\sqrt{2}$，即 $m^4-(4k^2+2)m^2+(2k^2+1)^2=0$，可得 $m^2=2k^2+1$，满足 $\Delta=8(4k^2-m^2+2)>0$，所以 $k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=\frac{k^2(2m^2-4)+km(-4km)+m^2(2k^2+1)}{2m^2-4}=\frac{1-2k^2}{4k^2-2}=-\frac{1}{2}$. 设 $T(x_0,y_0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，即 $x_0^2=2(2-y_0^2)$，

又因为 $A(0,\sqrt{2})$，$B(0,-\sqrt{2})$，

所以 $k_{AT}\cdot k_{BT}=\frac{y_0-\sqrt{2}}{x_0}\cdot\frac{y_0+\sqrt{2}}{x_0}=\frac{y_0^2-2}{x_0^2}=-\frac{1}{2}$.

因为 $AT/\!/OM$，所以 $k_{AT}=k_{OM}$，

又 $k_{OM}\cdot k_{ON}=k_{AT}\cdot k_{BT}$，所以 $k_{BT}=k_{ON}$，所以 $BT/\!/ON$.

/第 3 课时　定点、定值、探索性问题/

● 课堂考点探究

例 1 解：(1)设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，

由题意得 $\begin{cases}c=2\sqrt{5},\\ \frac{c}{a}=\sqrt{5},\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=2,\\ b=4,\\ c=2\sqrt{5},\end{cases}$ 故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)证明：由(1)得 $A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$.

当直线 MN 的斜率不存在时，直线 MN 的方程为 $x=-4$，则易知 $M(-4,4\sqrt{3})$，$N(-4,-4\sqrt{3})$，∴直线 MA_1 的方程为 $y=-2\sqrt{3}(x+2)$，直线 NA_2 的方程为 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2)$，

由 $\begin{cases}y=-2\sqrt{3}(x+2),\\ y=\frac{2\sqrt{3}}{3}(x-2),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-2\sqrt{3},\end{cases}$

∴ $P(-1,-2\sqrt{3})$.

当直线 MN 的斜率存在时，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $y=k(x+4)$，由题意知 $k\neq 0$ 且 $k\neq\pm 2$，

直线 MA_1 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

直线 NA_2 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

联立直线 MA_1 与直线 NA_2 的方程，消去 y 得 $\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，则 $\frac{k(x_1+4)}{x_1+2}(x+2)=\frac{k(x_2+4)}{x_2-2}(x-2)$，即 $(x_1+4)(x_2-2)(x+2)=(x_2+4)(x_1+2)(x-2)$，解得 $x=2\cdot\frac{x_1x_2+x_1+3x_2}{3x_1-x_2+8}$①.

由 $\begin{cases}y=k(x+4),\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1,\end{cases}$ 可得 $(4-k^2)x^2-8k^2x-16k^2-16=0$，则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{4-k^2},\\ x_1x_2=-16\cdot\frac{k^2+1}{4-k^2},\end{cases}$

可得 $\begin{cases}x_1x_2=-2\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2),\\ 8=\left(\frac{4}{k^2}-1\right)(x_1+x_2),\end{cases}$

代入①可得 $x=2\cdot$

$$\frac{-2\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)(x_1+x_2)+x_1+3x_2}{3x_1-x_2+\left(\frac{4}{k^2}-1\right)(x_1+x_2)}=$$

$$-\frac{\left(\frac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\frac{2}{k^2}\right)x_2}{\left(\frac{-2}{k^2}-1\right)x_1+\left(1-\frac{2}{k^2}\right)x_2}=-1,$$

∴当直线 MN 的斜率存在时，点 P 在直线 $x=-1$ 上. 又点 $(-1,-2\sqrt{3})$ 在直线 $x=-1$ 上，故点 P 在定直线 $x=-1$ 上.

变式题 解:(1)设 E 的方程为 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ $(m>0,n>0)$. 将 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点的坐标分别代入 E 的方程得 $\begin{cases}\frac{4}{n^2}=1,\\ \frac{9}{4m^2}+\frac{1}{n^2}=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}m^2=3,\\ n^2=4,\end{cases}$ 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)证明:由 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 可得直线 AB 的方程为 $y=\frac{2}{3}x-2$.

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线的斜率不存在，则该直线的方程为 $x=1$，将 $x=1$ 代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，可得 $M\left(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$N\left(1,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，将 $y=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入 $y=\frac{2}{3}x-2$，可得 $x=3-\sqrt{6}$，则 $T\left(3-\sqrt{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. 由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，得 $H\left(5-2\sqrt{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，则直线 HN 的方程为 $y=\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x-2$，此时直线 HN 过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线的斜率存在，则设该直线的方程为 $y=k(x-1)-2$，$M(x_1,y_1)(-2<y_1<-1)$，$N(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1)-2,\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4},\\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4},\end{cases}$

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4},\\ y_1y_2=\frac{8(2+2k-k^2)}{3k^2+4},\end{cases}$ 且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$. 由 $\begin{cases}y=y_1,\\ y=\frac{2}{3}x-2,\end{cases}$ 可得 $T\left(\frac{3y_1}{2}+3,y_1\right)$，则 $H(3y_1+6-x_1,y_1)$，则直线 HN 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，将 $(0,-2)$ 的坐标代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

可得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$，显然成立，此时直线 HN 过点 $(0,-2)$.

综上，直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

例 2 解:(1)在 $y=\sqrt{3}x-3$ 中，令 $y=0$，得 $x=\sqrt{3}$，∴$a=\sqrt{3}$，又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴$c=\sqrt{2}$，∴$b^2=a^2-c^2=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=1$，

∴椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)证明:设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

∵$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，

∴$p+x_1+x_2=0$，$q+y_1+y_2=0$，∴$p=-(x_1+x_2)$，$q=-(y_1+y_2)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 可得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，$\Delta=(6km)^2-12(1+3k^2)(m^2-1)=12(3k^2+1-m^2)>0$，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=\frac{-6km}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}$，∴$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+3k^2}$，∴$p=-(x_1+x_2)=\frac{6km}{1+3k^2}$，$q=-(y_1+y_2)=-\frac{2m}{1+3k^2}$.

∵点 $A(p,q)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上，

∴$\left(\frac{6km}{1+3k^2}\right)^2+3\left(\frac{-2m}{1+3k^2}\right)^2=3$，化简可得 $4m^2=1+3k^2$，∴$|BC|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-6km}{1+3k^2}\right)^2-4\cdot\frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3k^2+1-m^2}}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4m^2-m^2}}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|m|}{1+3k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{6|m|}{4m^2}=\frac{3\sqrt{1+k^2}}{2|m|}$，又点 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{|pk-q+m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|\frac{6km}{1+3k^2}\cdot k+\frac{2m}{1+3k^2}+m\right|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{k^2+1}}{2|m|}\cdot\frac{|3m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{9}{4}$，

∴$\triangle ABC$ 的面积为定值 $\frac{9}{4}$.

变式题 解:(1)因为椭圆 C 的短轴长为 2，所以 $b=1$. 因为 $|MF_2|=7|MF_1|$，$|MF_2|+|MF_1|=7|MF_1|+|MF_1|=8|MF_1|=2a$，所以 $|MF_1|=\frac{a}{4}$，$|MF_2|=7|MF_1|=\frac{7a}{4}$，又因为 $MF_1\perp x$ 轴，所以 $|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2$，即 $\left(\frac{7a}{4}\right)^2=\left(\frac{a}{4}\right)^2+4c^2$，结合 $a^2-b^2=a^2-1=c^2$，可得 $a^2=4$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $A_1(-x_1,-y_1)$，$A_2(x_1,-y_1)$，

由 $\begin{cases}x=ty+m,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2+2tmy+m^2-4=0$，则 $y_1y_2=\frac{m^2-4}{t^2+4}$，$y_1+y_2=\frac{-2tm}{t^2+4}$，所以 $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4-m^2}{2tm}$，直线 BA_2 的方程为 $y-y_2=\frac{y_1+y_2}{x_2-x_1}(x-x_2)$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(ty_1+m)y_2+(ty_2+m)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=m+2t\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4}{m}-m+m=\frac{4}{m}$，则 $D\left(\frac{4}{m},0\right)$，所以 A_1D 的中点的坐标为 $\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1,-\frac{1}{2}y_1\right)$. 由题知 A_1D 的中点在直线 $x=ty+m$ 上，可得 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}x_1=-\frac{1}{2}ty_1+m$，即 $\frac{2}{m}-\frac{1}{2}(ty_1+m)=\frac{2}{m}-\frac{1}{2}ty_1-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}ty_1+m$，

即 $\frac{2}{m}=\frac{3}{2}m$，解得 $m^2=\frac{4}{3}$，又 $0<m<2$，所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

例 3 解:(1)因为曲线 C_1 绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$，所以曲线 C_1 绕原点逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到曲线 $C_2: xy=2$. 设 $T(x,y)$ 是 C_1 上任意一点，$T(x,y)$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{7\pi}{4}$ 后得到点 $T'(x',y')$，则 $x'=x\cos\frac{7\pi}{4}-y\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$，$y'=x\sin\frac{7\pi}{4}+y\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$，因为 $T'(x',y')$ 在曲线 $C_2: xy=2$ 上，所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\times\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)=2$，化简得 $y^2-x^2=4$，

故曲线 C_1 的方程为 $y^2-x^2=4$.

(2)设直线 $MN: x=ty+n(n\neq0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$y_1>0$，$y_2<0$，$x_1x_2>0$，易知 $F_1(0,2\sqrt{2})$，$F_2(0,-2\sqrt{2})$.

联立直线 MN 与双曲线 $y^2-x^2=4$ 的方程，消去 x 得 $(t^2-1)y^2+2tny+n^2+4=0$，$\Delta=4t^2n^2-4(t^2-1)(n^2+4)=4(n^2+4-4t^2)>0$，所以由根与系数的关系可得 $y_1+y_2=\frac{-2tn}{t^2-1}$，$y_1y_2=\frac{n^2+4}{t^2-1}$. 因为 $MF_1/\!/NF_2$，所以 $\overrightarrow{F_1M}/\!/\overrightarrow{F_2N}$，又 $\overrightarrow{F_1M}=(x_1,y_1-2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{F_2N}=(x_2,y_2+2\sqrt{2})$，

所以 $x_1(y_2+2\sqrt{2})=x_2(y_1-2\sqrt{2})$，

即 $(ty_1+n)(y_2+2\sqrt{2})=(ty_2+n)(y_1-2\sqrt{2})$，化简得 $2\sqrt{2}t(y_2+y_1)+n(y_2-y_1)=-4\sqrt{2}n$，将 $y_1+y_2=\frac{-2tn}{t^2-1}$ 代入，可得 $2\sqrt{2}t\times\frac{-2tn}{t^2-1}+n(y_2-y_1)=-4\sqrt{2}n$，故 $y_2-y_1=\frac{4\sqrt{2}}{t^2-1}$，由 $(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2=4y_1y_2$，可得 $4t^2+4=n^2$. 由 $|MF_1|+|NF_2|=\lambda|MF_1|\cdot|NF_2|$，可得 $\lambda=\frac{|MF_1|+|NF_2|}{|MF_1|\cdot|NF_2|}=$

$$\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|NF_2|}=\frac{1}{\sqrt{x_1^2+(y_1-2\sqrt{2})^2}}+\frac{1}{\sqrt{x_2^2+(y_2+2\sqrt{2})^2}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{(y_1^2-4)+(y_1-2\sqrt{2})^2}}+$$

$\frac{1}{\sqrt{(y_2^2-4)+(y_2+2\sqrt{2})^2}}=$

$\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}y_1-2)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}y_2+2)^2}}=$

$\frac{1}{|\sqrt{2}y_1-2|}+\frac{1}{|\sqrt{2}y_2+2|}$. 因为点 M,N 均在双曲线 $y^2-x^2=4$ 上，所以 $y_1\geqslant 2$，$y_2\leqslant -2$，所以 $\lambda=\frac{1}{|\sqrt{2}y_1-2|}+\frac{1}{|\sqrt{2}y_2+2|}=\frac{1}{\sqrt{2}y_1-2}-\frac{1}{\sqrt{2}y_2+2}=\frac{\sqrt{2}(y_2-y_1)+4}{(\sqrt{2}y_1-2)(\sqrt{2}y_2+2)}=\frac{\sqrt{2}(y_2-y_1)+4}{2y_2y_1-2\sqrt{2}(y_2-y_1)-4}$，将 $y_2-y_1=\frac{4\sqrt{2}}{t^2-1}$ 和 $y_1y_2=\frac{n^2+4}{t^2-1}$ 代入，可得 $\lambda=\frac{\sqrt{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{t^2-1}+4}{2\times\frac{n^2+4}{t^2-1}-2\sqrt{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{t^2-1}-4}=\frac{8+4(t^2-1)}{2(n^2+4)-16-4(t^2-1)}=\frac{4(t^2+1)}{2n^2-4(1+t^2)}=\frac{n^2}{2n^2-n^2}=1$，故 $\lambda=1$.

(3)由双曲线方程 $y^2-x^2=4$ 可得 $a=2$，$b=2$，$c=2\sqrt{2}$，不妨设 $|MF_1|=m|NF_2|$，由(2)知 $\frac{1}{|MF_1|}+\frac{1}{|NF_2|}=1$，故 $\frac{1}{m|NF_2|}+\frac{1}{|NF_2|}=1$，可得 $|NF_2|=\frac{m+1}{m}$，$|MF_1|=m+1$. 由 $MF_1/\!/NF_2$，得 $|PF_1|=m|PN|$，$|PF_1|=\frac{m}{m+1}|NF_1|$，$|PF_2|=\frac{1}{m}|PM|$，$|PF_2|=\frac{1}{m+1}|MF_2|$，故 $|PF_1|+|PF_2|=\frac{m}{m+1}|NF_1|+\frac{1}{m+1}|MF_2|=\frac{m}{m+1}(2a+|NF_2|)+\frac{1}{m+1}(2a+|MF_1|)=2a+\frac{m}{m+1}|NF_2|+\frac{1}{m+1}|MF_1|=2a+\frac{m}{m+1}\times\frac{m+1}{m}+\frac{1}{m+1}(m+1)=2a+2=6$，故存在两个定点 T_1,T_2，使得 $|PT_1|+|PT_2|$ 为定值，且 $T_1(0,2\sqrt{2})$，$T_2(0,-2\sqrt{2})$ 或 $T_1(0,-2\sqrt{2})$，$T_2(0,2\sqrt{2})$，且定值为 6.

变式题 解：(1)若 B 为椭圆的上顶点，则 $B(0,1)$. 又直线 AB 过点 $(2,0)$，故直线 AB：$x+2y-2=0$，由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\x+2y-2=0,\end{cases}$ 可得 $3y^2-4y+1=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=\frac{1}{3}$，即点 $A\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$，又 $F(1,0)$，故直线 AF 的方程为 $y=x-1$.

(2)证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，设直线 AB 的方程为 $x=ty+2(t\neq 0)$，代入椭圆方程可得 $(t^2+2)y^2+4ty+2=0$，$\Delta>0$，所以 $y_1+y_2=\frac{-4t}{t^2+2}$，$y_1y_2=\frac{2}{t^2+2}$，所以 $\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=-\frac{1}{2t}$，即 $ty_1y_2=-\frac{y_1+y_2}{2}$，所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\frac{y_1}{x_1-1}}{\frac{y_2}{x_2-1}}=\frac{y_1(x_2-1)}{y_2(x_1-1)}=\frac{y_1(ty_2+1)}{y_2(ty_1+1)}=\frac{ty_1y_2+y_1}{ty_1y_2+y_2}=\frac{-\frac{y_1+y_2}{2}+y_1}{-\frac{y_1+y_2}{2}+y_2}=-1$，即 $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 -1.

例 4 解：(1)设 $T(x_0,y_0)$ 为椭圆 E 上任意一点，$-2\leqslant x_0\leqslant 2$，则 $|TC|^2=(x_0-1)^2+y_0^2=\frac{3}{4}x_0^2-2x_0+2$，

则 $r^2<\left(\frac{3}{4}x_0^2-2x_0+2\right)_{\min}=\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{8}{3}+2=\frac{2}{3}$，故 $0<r<\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)由题意可知 $P(0,1)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，因为 $r<1$，所以切线 PM，PN 的斜率都存在. 直线 PM 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$，即 $(y_1-1)x-x_1y+x_1=0$，直线 PN 的方程为 $(y_2-1)x-x_2y+x_2=0$，则 $\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}}=r$，故 $x_1^2+2x_1(y_1-1)+(y_1-1)^2=r^2x_1^2+r^2(y_1-1)^2$，又 $x_1^2=4(1-y_1^2)$，故 $4(1-r^2)(1-y_1^2)+2x_1(y_1-1)+(y_1-1)^2=r^2(y_1-1)^2$，又因为 $y_1\neq 1$，所以 $2x_1+3(r^2-1)y_1+5(r^2-1)=0$，同理可得 $2x_2+3(r^2-1)y_2+5(r^2-1)=0$，
故直线 MN 的方程为 $2x+3(r^2-1)y+5(r^2-1)=0$. 若直线 MN 与圆 C 相切，则 $\frac{|5r^2-3|}{\sqrt{9(r^2-1)^2+4}}=r$，令 $t=r^2\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$. 故 $9t^3-43t^2+43t-9=0$，即 $(t-1)(9t^2-34t+9)=0$，解得 $t=1$ 或 $t=\frac{17\pm 4\sqrt{13}}{9}$. 又 $t\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$，故 $t=\frac{17-4\sqrt{13}}{9}$，故存在满足条件的圆 C，其方程为 $(x-1)^2+y^2=\frac{17-4\sqrt{13}}{9}$.

变式题 解：(1)由题意知，椭圆 C 的焦距 $2c=2$，则其焦点为 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$，由椭圆的定义得，椭圆 C 的长轴长 $2a=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}$，则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设 $P(x_0,y_0)$，显然 $x_0\neq\pm\sqrt{2}$，设过点 P 的直线 l 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，由 $\begin{cases}y-y_0=k(x-x_0),\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$，若直线 l 与椭圆 C 相切，则 $\Delta=16k^2(y_0-kx_0)^2-8(1+2k^2)[(y_0-kx_0)^2-1]=0$，得 $(y_0-kx_0)^2=1+2k^2$，即 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$. 设直线 l_1,l_2 的斜率分别为 k_1,k_2，显然 k_1,k_2 是上述关于 k 的一元二次方程的两个根，则 $k_1k_2=\frac{y_0^2-1}{x_0^2-2}=-1$，化简得 $x_0^2+y_0^2=3(x_0\neq\pm\sqrt{2})$，故点 P 在以原点 O 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆上(除去 $(\pm\sqrt{2},\pm 1)$ 四个点)，而点 A 为该圆上的一个定点，
当满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 时，点 P 与点 A 或 B 重合，或 AB 为圆 O 的直径，即点 B 的坐标为 $(\sqrt{3},0)$，所以存在定点 $B(\sqrt{3},0)$，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

培优专题(六) 解析几何运算优化策略

例 1 B [解析] 方法一：设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,y_C)$，由点 A,B 在抛物线上，知 $k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_A-y_B}{\frac{y_A^2}{2p}-\frac{y_B^2}{2p}}=\frac{2p}{y_A+y_B}$，又因为 M 为 AB 的中点，则 $y_A+y_B=2y_1$，所以 $k_{AB}=\frac{2p}{2y_1}=\frac{p}{y_1}$，同理可得 $k_{BC}=\frac{p}{y_2}$，$k_{AC}=\frac{p}{y_3}$，又 $k_{AB}+k_{BC}+k_{AC}=-1$，所以 $\frac{p}{y_1}+\frac{p}{y_2}+\frac{p}{y_3}=-1$，则 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=-\frac{1}{p}$. 故选 B.

方法二：设直线 AB 的方程为 $x=m_1y+t_1$，直线 BC 的方程为 $x=m_2y+t_2$，直线 AC 的方程为 $x=m_3y+t_3$，联立直线 AB 的方程与抛物线方程得 $\begin{cases}y^2=2px,\\x=m_1y+t_1,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-2pm_1y-2pt_1=0$，则 $y_A+y_B=2pm_1=2y_1$，即 $y_1=pm_1$. 同理可得 $y_2=pm_2$，$y_3=pm_3$. 因为 $k_{AB}+k_{BC}+k_{AC}=-1$，所以 $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=-1$，所以 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right)=-\frac{1}{p}$. 故选 B.

方法三：不妨设抛物线的方程为 $y^2=4x$，$A(0,0)$，$B(1,2)$，$C(x_C,y_C)$，则 $k_{AB}=2$，$k_{BC}=\frac{y_C-2}{x_C-1}$，$k_{AC}=\frac{y_C}{x_C}$，由 $k_{AB}+k_{BC}+k_{AC}=-1$，得 $2+\frac{y_C-2}{x_C-1}+\frac{y_C}{x_C}=2+\frac{y_C-2}{\frac{y_C^2}{4}-1}+\frac{y_C}{\frac{y_C^2}{4}}=-1$，化简得 $3y_C^2+14y_C+8=0$，解得 $y_C=-\frac{2}{3}$ 或 -4，不妨取 $y_C=-4$，则 $x_C=4$，则 $y_1=\frac{0+2}{2}=1$，$y_2=\frac{2+(-4)}{2}=-1$，$y_3=\frac{0+(-4)}{2}=-2$，所以 $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}=1+(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{p}$. 故选 B.

【自测题】

证明：方法一：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN：$y=kx+m$，$k\neq 0$，$m\neq 0$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$. 由 $AM\perp AN$，得 $\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_2}{x_2+2}=-1$，所以 $(k^2+1)x_1x_2+(km+2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$，整理得 $(k^2+1)\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+(km+2)\frac{-8km}{1+4k^2}+m^2+4=0$，化简得 $5m^2-16km+12k^2=0$.

因为 $k\neq 0$，所以两边同时除以 k^2 得 $5\left(\frac{m}{k}\right)^2-16\cdot\frac{m}{k}+12=0$，解得 $\frac{m}{k}=\frac{6}{5}$ 或 $\frac{m}{k}=2$(舍)，所以直线 MN 的方程为 $y=k\left(x+\frac{6}{5}\right)$，其过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

方法二：设直线 AM：$y=k(x+2)(k\neq 0)$，则直线 AN：$y=-\frac{1}{k}(x+2)$，

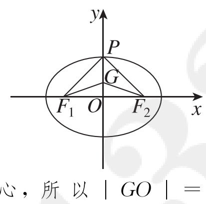
联立 $\begin{cases}y=k(x+2),\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-4=0$，所以 $-2x_M=\dfrac{16k^2-4}{1+4k^2}$，所以 $x_M=\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}$，所以 $y_M=\dfrac{4k}{1+4k^2}$，所以点 $M\left(\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2},\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)$，同理得点 $N\left(\dfrac{2k^2-8}{4+k^2},\dfrac{-4k}{4+k^2}\right)$，所以 $k_{MN}=\dfrac{\dfrac{4k}{1+4k^2}+\dfrac{4k}{4+k^2}}{\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}-\dfrac{2k^2-8}{4+k^2}}=\dfrac{5k}{4(1-k^2)}$，则直线 MN：$y-\dfrac{4k}{1+4k^2}=\dfrac{5k}{4(1-k^2)}\left(x-\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}\right)$，令 $y=0$，得 $x=\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}-\dfrac{16(1-k^2)}{5(1+4k^2)}=\dfrac{-6(1+4k^2)}{5(1+4k^2)}=-\dfrac{6}{5}$，

所以直线 MN 过定点 $\left(-\dfrac{6}{5},0\right)$.

方法三：以 A 为坐标原点，建立新的平面直角坐标系(新的 x 轴与原 x 轴重合)，则椭圆的方程为 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+y^2=1$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，易知 $m\neq0$，则 $\dfrac{y-kx}{m}=1$，所以 $x^2+4y^2-4x\cdot\dfrac{y-kx}{m}=0$，两边同时除以 x^2，得 $4\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{4}{m}\cdot\dfrac{y}{x}+\dfrac{4k}{m}+1=0$，所以 $\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{k}{m}+\dfrac{1}{4}=-1$，即 $k=-\dfrac{5m}{4}$，所以直线 MN 的方程为 $y=-\dfrac{5m}{4}x+m=-m\left(\dfrac{5}{4}x-1\right)$，其过定点 $\left(\dfrac{4}{5},0\right)$，所以直线 MN 过定点 $\left(-\dfrac{6}{5},0\right)$.

例 2 B [解析] 因为 P 是椭圆上一点，且 $\angle F_1GF_2\leqslant\dfrac{2}{3}\pi$ 恒成立，所以不妨设点 P 为上顶点，如图所示，因为 G 为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心，所以 $|GO|=\dfrac{1}{3}|PO|=\dfrac{1}{3}b$，而 $|GO|\geqslant\tan\dfrac{\pi}{6}\cdot|F_1O|$，即 $|GO|\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}|F_1O|$，所以 $\dfrac{1}{3}b\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$，所以 $b^2\geqslant3c^2$，所以 $a^2-c^2\geqslant3c^2$，即 $e^2\leqslant\dfrac{1}{4}$，解得 $0<e\leqslant\dfrac{1}{2}$. 故选 B.



【自测题】

C [解析] 由 PG 平行于 x 轴得 $y_G=y_P=a$，则 $y_A=3y_G=3a$，所以 $\triangle AF_1F_2$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2c\times3a=\dfrac{1}{2}\cdot(|AF_1|+|AF_2|+2c)\cdot a$，又 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，所以 $|AF_1|=2c+a$，$|AF_2|=2c-a$，又 $|AF_1|=a+ex_A$，所以 $x_A=2a$，因此 $A(2a,3a)$，代入双曲线方程得 $\dfrac{4a^2}{a^2}-\dfrac{9a^2}{b^2}=1$，可得 $b=\sqrt{3}a$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，所以 $e=\dfrac{c}{a}=2$. 故选 C.

例 3 证明：设直线 AB 的方程为 $mx+ny=1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}mx+ny=1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-4n\left(\dfrac{y}{x}\right)-4m=0$，$\therefore\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-4m$. $\because k_{OA}k_{OB}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}$，$\therefore-4m=-1$，$\therefore m=\dfrac{1}{4}$，$\therefore$ 直线 AB：$\dfrac{1}{4}x+ny=1$ 过定点 $(4,0)$.

【自测题】

解：设 $Q_1(x_1,y_1)$，$Q_2(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$. 当直线 Q_1Q_2 的斜率存在时，设直线 Q_1Q_2 的方程为 $y=kx+m$，联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2(m^2-b^2)=0$，所以 $x_1+x_2=\dfrac{-4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2(m^2-b^2)}{2k^2+1}$，则 $y_1y_2=\dfrac{m^2-2b^2k^2}{2k^2+1}$. 因为 $OQ_1\perp OQ_2$，所以 $\overrightarrow{OQ_1}\cdot\overrightarrow{OQ_2}=0$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{2(m^2-b^2)}{2k^2+1}+\dfrac{m^2-2b^2k^2}{2k^2+1}=0$，所以 $3m^2=2b^2(1+k^2)$①.

又直线 Q_1Q_2 的方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$，即 $y=-\dfrac{x_0}{y_0}x+\dfrac{x_0^2}{y_0}+y_0$，

与 $y=kx+m$ 对比，所以 $\begin{cases}-\dfrac{x_0}{y_0}=k,\\ \dfrac{x_0^2}{y_0}+y_0=m,\end{cases}$

代入①中，化简可得 $x_0^2+y_0^2=\dfrac{2}{3}b^2$ $(y_0\neq0)$. 当直线 Q_1Q_2 的斜率不存在时，易知点 D 在 x 轴上，此时 $D\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}b,0\right)$ 或 $D\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}b,0\right)$，满足 $x_0^2+y_0^2=\dfrac{2}{3}b^2$.

综上，点 D 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\dfrac{2}{3}b^2$.

培优专题(七) 圆锥曲线中的交汇、创新问题

例 1 解：(1)由已知可得 $\overrightarrow{AB}=(2\sqrt{3},-4\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AP}=(6+\sqrt{3},3-2\sqrt{3})$.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x_0+\sqrt{3},y_0-2\sqrt{3})=(6+\sqrt{3},3-2\sqrt{3})$，

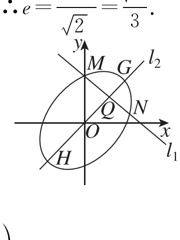
$\therefore x_0=6$，$y_0=3$，即点 P 的坐标为 $(6,3)$.

(2)(i)由 $y=x$ 与 $x^2+y^2-xy=1$ 的交点为 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$，得 $a^2=2$，

由 $y=-x$ 与 $x^2+y^2-xy=1$ 的交点为 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

得 $b^2=\dfrac{2}{3}$，$\therefore c^2=\dfrac{4}{3}$，$\therefore e=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(ii)方法一：如图，设直线 l_1：$y-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=k\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

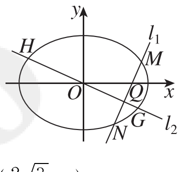


由 $\begin{cases}y-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=k\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),\\ x^2+y^2-xy=1,\end{cases}$ 可得 $(k^2-k+1)x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3k-2k^2-1)x+\dfrac{2}{3}k^2-\dfrac{4}{3}k-\dfrac{1}{3}=0$，$\therefore x_1+x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2k^2-3k+1}{k^2-k+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{k^2-2k-\dfrac{1}{2}}{k^2-k+1}$，

$\therefore|MN|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2k^2-3k+1}{k^2-k+1}\right)^2-4\times\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{k^2-2k-\frac{1}{2}}{k^2-k+1}\right]}=\dfrac{\sqrt{2}(1+k^2)}{k^2-k+1}$. 易知直线 l_2：$y=-\dfrac{1}{k}x$，与斜椭圆方程 $x^2+y^2-xy=1$ 联立，得 $x^2+\dfrac{1}{k^2}x^2+\dfrac{1}{k}x^2=1$，$\therefore x^2=\dfrac{k^2}{k^2+k+1}$，

$\therefore|OH|^2=\dfrac{k^2+1}{k^2+k+1}$，故 $\dfrac{\sqrt{2}}{|MN|}+\dfrac{1}{|OH|^2}=\dfrac{k^2-k+1}{k^2+1}+\dfrac{k^2+k+1}{k^2+1}=2$.

方法二：将斜椭圆 C 顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$，由(i)可得新椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3y^2}{2}=1$.



点 Q 旋转后的坐标为 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$.

当直线 l_1 旋转后斜率不存在时，$|MN|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$|OH|=\sqrt{2}$，则 $\dfrac{\sqrt{2}}{|MN|}+\dfrac{1}{|OH|^2}=2$. 如图，当直线 l_1 旋转后斜率存在时，设直线 l_1 旋转后的方程为 $x=my+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $(m\neq0)$，旋转后 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，将 $x=my+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 与椭圆方程 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3y^2}{2}=1$ 联立，得 $\begin{cases}x=my+\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3y^2}{2}=1,\end{cases}$ 可得 $3(m^2+3)y^2+4\sqrt{3}my-2=0$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{4\sqrt{3}m}{3(m^2+3)}$，$y_1y_2=-\dfrac{2}{3(m^2+3)}$，

$\therefore|MN|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{6\sqrt{2}(1+m^2)}{3(m^2+3)}$. 易知直线 l_2 旋转后为 $y=-mx$，代入椭圆方程 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3y^2}{2}=1$ 中，得 $x^2=\dfrac{2}{1+3m^2}$，则 $|OH|^2=\dfrac{2+2m^2}{1+3m^2}$，$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{|MN|}+\dfrac{1}{|OH|^2}=\dfrac{3\sqrt{2}(m^2+3)}{6\sqrt{2}(m^2+1)}+\dfrac{3m^2+1}{2(m^2+1)}=2$. 综上所述，$\dfrac{\sqrt{2}}{|MN|}+\dfrac{1}{|OH|^2}=2$.

【自测题】

解：(1)设 $|OP|=|OP'|=r$，$\angle POx=\theta$，则 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$\angle P'Ox=\theta+\varphi$，故 $x'=r\cos(\theta+\varphi)=r\cos\theta\cos\varphi-r\sin\theta\sin\varphi=x\cos\varphi-y\sin\varphi$，$y'=r\sin(\theta+\varphi)=r\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta\sin\varphi=x\sin\varphi+y\cos\varphi$，所以坐标变换公式为 $\begin{cases}x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,\\ y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi,\end{cases}$ 该变换所对应的二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.

(2)设双曲线 $xy=1$ 上任意一点 (x,y) 在旋转角是 $\dfrac{\pi}{4}$ 的旋转变换下所得点的坐标为 (x',y')，则由(1)知 $\begin{cases}x'=x\cos\dfrac{\pi}{4}-y\sin\dfrac{\pi}{4},\\ y'=x\sin\dfrac{\pi}{4}+y\cos\dfrac{\pi}{4},\end{cases}$

即 $\begin{cases}x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\end{cases}$ 得 $(y')^2-(x')^2=2xy=2$，则 $\frac{y'^2}{2}-\frac{x'^2}{2}=1$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$.

(3)证明：①当直线 AB 的斜率存在时，可设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=k\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\\ y^2-x^2=2,\end{cases}$ 得 $3(k^2-1)x^2-2\sqrt{6}k^2x+2k^2-6=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{2\sqrt{6}k^2}{3(k^2-1)}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-6}{3(k^2-1)}$，且由 $\Delta>0$，可得 $4k^2-3>0$，即 $k^2>\frac{3}{4}$.

当 $x_1=0$ 时，则 $A(0,-\sqrt{2})$，又 $T\left(\frac{\sqrt{6}}{3},0\right)$，所以 $k_{TA}=\sqrt{3}$，所以直线 TA 的方程为 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{2}$，将直线 TA 的方程与双曲线 C 的方程联立可得 $x^2-\sqrt{6}x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=\sqrt{6}$，所以 $B(\sqrt{6},2\sqrt{2})$，又 $D(0,\sqrt{2})$，所以 $k_{DB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$，易知 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$；当 $x_1\neq0$ 时，设 DA，DB 的斜率分别为 k_1，k_2，

则 $k_1=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}=k-\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k+\sqrt{2}}{x_1}$，$k_2=k-\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k+\sqrt{2}}{x_2}$，所以 $k_1+k_2=2k-\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k+\sqrt{2}}{x_1}-\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k+\sqrt{2}}{x_2}=2k-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}k+\sqrt{2}\right)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}$，$k_1k_2=\left(k-\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k+\sqrt{2}}{x_1}\right)\left(k-\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}k+\sqrt{2}}{x_2}\right)=-\frac{\sqrt{3}+k}{k-\sqrt{3}}$，

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{k_1+k_2}{1-k_1k_2}=-\sqrt{3}$.

因为 B 在第一象限，所以 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，所以 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.

②当直线 AB 的斜率不存在时，可得 $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$B\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，则 $k_{DA}=-2-\sqrt{3}$，$k_{DB}=2-\sqrt{3}$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{k_{DA}+k_{DB}}{1-k_{DA}k_{DB}}=-\sqrt{3}$，同理可得 $\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$.

综上可得，$\alpha+\beta$ 为定值 $\frac{2\pi}{3}$.

例 2 解：(1)∵点 $P_1(5,4)$ 在 C 上，∴ $25-16=m$，得 $m=9$. 过点 $P_1(5,4)$ 且斜率 $k=\frac{1}{2}$ 的直线的方程为 $y-4=\frac{1}{2}(x-5)$，即 $x-2y+3=0$. 由 $\begin{cases}x-2y+3=0,\\ x^2-y^2=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\ y=4,\end{cases}$ ∴ $Q_1(-3,0)$，∴ $P_2(3,0)$，得 $x_2=3$，$y_2=0$.

(2)证明：由题知，当 $n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$P_n(x_n,y_n)$ 关于 y 轴的对称点是 $Q_{n-1}(-x_n,y_n)$，$P_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ 与 $Q_{n-1}(-x_n,y_n)$ 在同一条斜率为 k 的直线上，则 $x_{n-1}\neq-x_n$，即 $x_{n-1}+x_n\neq0$，且 $y_n-y_{n-1}=-k(x_n+x_{n-1})$①，

又 P_{n-1}，Q_{n-1} 都在双曲线 C 上，

∴ $\begin{cases}x_n^2-y_n^2=9②,\\ x_{n-1}^2-y_{n-1}^2=9③,\end{cases}$ 由②−③得 $(x_n-x_{n-1})(x_n+x_{n-1})=(y_n-y_{n-1})(y_n+y_{n-1})$，将①式代入上式得 $x_n-x_{n-1}=-k(y_n+y_{n-1})$④，由④−①得 $x_n-y_n-(x_{n-1}-y_{n-1})=k(x_n-y_n)+k(x_{n-1}-y_{n-1})$，即 $(1-k)(x_n-y_n)=(1+k)(x_{n-1}-y_{n-1})$，由题知 $x_n-y_n\neq0$，∴ $\frac{x_n-y_n}{x_{n-1}-y_{n-1}}=\frac{1+k}{1-k}$，又 $x_1-y_1=5-4=1\neq0$，∴数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

(3)证明：由(2)得数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列，∵ $x_1-y_1=5-4=1$，∴ $x_n-y_n=(x_1-y_1)\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1}=\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1}$. 记 $q=\frac{1+k}{1-k}$，则 $q>1$，$x_n-y_n=q^{n-1}$，∵ $x_n^2-y_n^2=9=(x_n-y_n)(x_n+y_n)$，∴ $x_n+y_n=9q^{1-n}$，

∴ $x_n=\frac{1}{2}(q^{n-1}+9q^{1-n})$. ∵ $k_{P_{n+1}P_{n+2}}=\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}}=\frac{x_{n+2}-q^{n+1}-(x_{n+1}-q^n)}{x_{n+2}-x_{n+1}}=1-\frac{q^{n+1}-q^n}{\frac{1}{2}(q^{n+1}+9q^{-1-n})-\frac{1}{2}(q^n+9q^{-n})}=1-\frac{2q^n(q-1)}{q^n(q-1)-9q^{-1-n}(q-1)}=1-\frac{2q^n}{q^n-9q^{-1-n}}$，$k_{P_nP_{n+3}}=\frac{y_{n+3}-y_n}{x_{n+3}-x_n}=\frac{x_{n+3}-q^{n+2}-(x_n-q^{n-1})}{x_{n+3}-x_n}=1-\frac{q^{n+2}-q^{n-1}}{\frac{1}{2}(q^{n+2}+9q^{-2-n})-\frac{1}{2}(q^{n-1}+9q^{1-n})}=1-\frac{2q^{n-1}(q^3-1)}{q^{n-1}(q^3-1)-9q^{-2-n}(q^3-1)}=1-\frac{2q^{n-1}}{q^{n-1}-9q^{-2-n}}=1-\frac{2q^n}{q^n-9q^{-1-n}}=k_{P_{n+1}P_{n+2}}$，

∴ $P_nP_{n+3}\,/\!/\,P_{n+1}P_{n+2}$，∴ $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{\triangle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}}$，即 $S_n=S_{n+1}$.

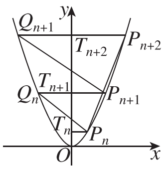
【自测题】

解：(1)因为点 $P_1(t+1,t)$ 在抛物线 $C:x^2=4y$ 上，所以可得 $(t+1)^2=4t$，解得 $t=1$.

(2)方法一：由(1)知，$P_1(2,1)$，即 $x_1=2$，$y_1=1$. 因为点 $P_n(x_n,y_n)$ 在抛物线 C：$x^2=4y$ 上，所以 $y_n=\frac{x_n^2}{4}$，且 $Q_{n-1}(-x_n,y_n)$，$n\geqslant2$. 过点 $P_{n-1}\left(x_{n-1},\frac{x_{n-1}^2}{4}\right)$，$n\geqslant2$，且斜率为 -1 的直线 $P_{n-1}Q_{n-1}$ 的方程为 $y-\frac{x_{n-1}^2}{4}=-(x-x_{n-1})$，由方程组 $\begin{cases}y-\frac{x_{n-1}^2}{4}=-(x-x_{n-1}),\\ x^2=4y,\end{cases}$ 可得 $x^2+4x-4x_{n-1}-x_{n-1}^2=0$，解得 $x=x_{n-1}$ 或 $x=-x_{n-1}-4$，所以 $-x_n=-x_{n-1}-4$，可得 $x_n-x_{n-1}=4(n\geqslant2)$，所以数列 $\{x_n\}$ 是首项为 2，公差为 4 的等差数列，所以 $x_n=2+4(n-1)=4n-2$，$y_n=\frac{x_n^2}{4}=\frac{(4n-2)^2}{4}=(2n-1)^2$.

方法二：由(1)知，$P_1(2,1)$，即 $x_1=2$，$y_1=1$. 因为当 $n\geqslant2$ 时点 $P_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$，$P_n(x_n,y_n)$，$Q_{n-1}(-x_n,y_n)$ 在抛物线 $C:x^2=4y$ 上，所以 $\begin{cases}x_{n-1}^2=4y_{n-1},\\ x_n^2=4y_n,\end{cases}$ 两式相减，得 $(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}+x_n)=4(y_{n-1}-y_n)$，$n\geqslant2$，所以 $k_{P_{n-1}Q_{n-1}}=\frac{y_{n-1}-y_n}{x_{n-1}+x_n}=\frac{x_{n-1}-x_n}{4}=-1$，可得 $x_n-x_{n-1}=4(n\geqslant2)$，所以数列 $\{x_n\}$ 是首项为 2，公差为 4 的等差数列，所以 $x_n=2+4(n-1)=4n-2$，$y_n=\frac{x_n^2}{4}=\frac{(4n-2)^2}{4}=(2n-1)^2$.

(3)如图，设线段 $P_{n+1}Q_n$ 与 y 轴交于点 T_{n+1}. 由(2)知，$P_n(4n-2,(2n-1)^2)$，$P_{n+1}(4n+2,(2n+1)^2)$，$P_{n+2}(4n+6,(2n+3)^2)$，可得



$S_{梯形T_nP_nP_{n+1}T_{n+1}}=\frac{1}{2}|T_nT_{n+1}|(|T_nP_n|+|P_{n+1}T_{n+1}|)=\frac{1}{2}[(2n+1)^2-(2n-1)^2](4n-2+4n+2)=32n^2$，即 $S_{梯形T_nP_nP_{n+1}T_{n+1}}=32n^2$，同理可得 $S_{梯形T_{n+1}P_{n+1}P_{n+2}T_{n+2}}=32(n+1)^2$.

又 $S_{梯形T_nP_nP_{n+2}T_{n+2}}=\frac{1}{2}|T_nT_{n+2}|(|T_nP_n|+|P_{n+2}T_{n+2}|)=\frac{1}{2}[(2n+3)^2-(2n-1)^2](4n-2+4n+6)=16(2n+1)^2$，即 $S_{梯形T_nP_nP_{n+2}T_{n+2}}=16(2n+1)^2$，所以 $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{梯形T_nP_nP_{n+1}T_{n+1}}+S_{梯形T_{n+1}P_{n+1}P_{n+2}T_{n+2}}-S_{梯形T_nP_nP_{n+2}T_{n+2}}=32n^2+32(n+1)^2-16(2n+1)^2=16$.

例 3 解：(1)证明：$\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}+\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}\geqslant0$ 显然成立，

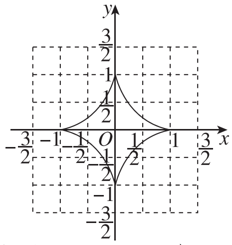
令 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}=-\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}$，由于 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}\geqslant0$，$-\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}\leqslant0$，故当且仅当 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}=\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}=0$ 时，等号成立. 令 $f(x)=\frac{x}{1+x}(x\geqslant0)$，则 $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}>0$，所以 $f(x)=\frac{x}{1+x}(x\geqslant0)$ 单调递增，所以 $|x_1-x_2|=|y_1-y_2|=0$，即 $\begin{cases}x_1=x_2,\\ y_1=y_2,\end{cases}$ 当且仅当 $A=B$ 时等号成立，所以 A，B 两点的"ρ 距离"满足关于 A，B 两点的一个"度量"定义中的①. A，B 两点的"ρ 距离"显然满足关于 A，B 两点的一个"度量"定义中的②.

设 $C(x_3,y_3)$，由于 $f(x)$ 单调递增，故由 $|x_1-x_2|\leqslant|x_1-x_3|+|x_2-x_3|$ 可得 $\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}\leqslant\frac{|x_1-x_3|+|x_2-x_3|}{1+|x_1-x_3|+|x_2-x_3|}=\frac{|x_1-x_3|}{1+|x_1-x_3|+|x_2-x_3|}+\frac{|x_2-x_3|}{1+|x_1-x_3|+|x_2-x_3|}\leqslant\frac{|x_1-x_3|}{1+|x_1-x_3|}+\frac{|x_2-x_3|}{1+|x_2-x_3|}$，

同理得 $\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}\leqslant\frac{|y_1-y_3|}{1+|y_1-y_3|}+$

$\frac{|y_2-y_3|}{1+|y_2-y_3|}$，故$\frac{|x_1-x_2|}{1+|x_1-x_2|}+\frac{|y_1-y_2|}{1+|y_1-y_2|}\leqslant\frac{|x_1-x_3|}{1+|x_1-x_3|}+\frac{|y_1-y_3|}{1+|y_1-y_3|}+\frac{|x_2-x_3|}{1+|x_2-x_3|}+\frac{|y_2-y_3|}{1+|y_2-y_3|}$，即 $\rho(A,B)\leqslant\rho(B,C)+\rho(C,A)$，所以 A,B 两点的"ρ 距离"满足关于 A,B 两点的一个"度量"定义中的③.故 A,B 两点的"ρ 距离"是关于 A,B 两点的一个"度量".

(2)(i)如图，



(ii)证明：设 $P(x,y)$，则 $\rho(O,P)=\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}=\frac{|x|+|y|+2|xy|}{1+|x|+|y|+|xy|}<2\cdot\frac{|x|+|y|+|xy|}{1+|x|+|y|+|xy|}$，

令 $|x|+|y|+|xy|=m>0$，则 $g(m)=\frac{2m}{1+m}=2-\frac{2}{1+m}<2$，即 $\rho(O,P)<2$.

(3)证明：设 $A\left(a,ka+\frac{1}{2}\right)$，$B\left(b,kb-\frac{1}{2}\right)$，则 $\rho(A,B)=\frac{|a-b|}{1+|a-b|}+\frac{|k(a-b)+1|}{1+|k(a-b)+1|}$，令 $a-b=t\in\mathbf{R}$，则 $\rho(A,B)=\frac{|t|}{1+|t|}+\frac{|kt+1|}{1+|kt+1|}$.

当 $k=0$ 时，$\rho(A,B)_{\min}=\frac{1}{2}+\left(\frac{|t|}{1+|t|}\right)_{\min}=\frac{1}{2}$ 成立，不妨设 $k>0$，

设 $h(t)=\begin{cases}\frac{t}{t-1}+\frac{kt+1}{kt},t<-\frac{1}{k},\\ \frac{1}{1+k},t=-\frac{1}{k},\\ \frac{t}{t-1}+\frac{kt+1}{kt+2},-\frac{1}{k}<t<0,\\ \frac{1}{2},t=0,\\ \frac{t}{1+t}+\frac{kt+1}{kt+2},t>0,\end{cases}$

令 $\varphi_1(x)=\frac{x}{1+x}+\frac{kx+1}{kx+2}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{kx+2}(x>0)$，则 $\varphi_1(x)$ 单调递增.

令 $\varphi_2(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{kx+1}{kx}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}+\frac{1}{kx}+1\left(x<-\frac{1}{k}\right)$，则 $\varphi_2(x)$ 单调递减，令 $\varphi_3(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{kx+1}{kx+2}\left(-\frac{1}{k}<x<0\right)$，

则 $\varphi_3'(x)=\frac{k(1-k)x^2-6kx+k-4}{(x-1)^2(kx+2)^2}$，

令 $\psi(x)=k(1-k)x^2-6kx+k-4\left(-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant0\right)$，

①当 $k=1$ 时，$\psi\left(-\frac{1}{k}\right)=3>0$，$\psi(0)=-3<0$，

②当 $0<k<1$ 时，$k(1-k)>0$，$\psi(0)=k-4<0$，$\psi\left(-\frac{1}{k}\right)=\frac{1+k+k^2}{k}>0$，

③当 $1<k<4$ 时，$\psi(0)<0$，$\psi\left(-\frac{1}{k}\right)>0$，由于 $\psi(x)$ 为一次或二次函数，故①②③中均存在唯一 $x_0\in\left(-\frac{1}{k},0\right)$，使得 $\psi(x_0)=0$，故 $\varphi_3(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{k},x_0\right)$ 上单调递增，在 $(x_0,0)$ 上单调递减.

④当 $k>4$ 时，$\psi(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增.

综上，$h(t)_{\min}=\min\left\{h(0),h\left(-\frac{1}{k}\right)\right\}$，

所以 $h\left(-\frac{1}{k}\right)\geqslant h(0)=\frac{1}{2}$，解得 $k\in(0,1]$.当 $k<0$ 时，同理可求得 $k\in[-1,0)$，所以 $k\in[-1,1]$.

【自测题】

解：(1)因为当 l 垂直于 x 轴时，$|AB|=2\sqrt{6}$，而直线 $l:x=\pm a$ 与 Γ 相切，所以 $2\sqrt{3a^2-a^2}=2\sqrt{6}$，可得 $a=\sqrt{3}$，

又椭圆 Γ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，则椭圆 Γ 的半焦距 $c=\sqrt{2}$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)(i)当 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=kx+m$，由 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+3y^2=3,\end{cases}$ 消去 y 得 $(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$.

由直线 l 与椭圆 Γ 相切，得 $\Delta=(6km)^2-4(3k^2+1)(3m^2-3)=0$，整理得 $m^2=3k^2+1$，于是圆心 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{3k^2+1}{k^2+1}}=\sqrt{3-\frac{2}{k^2+1}}\in[1,\sqrt{3})$，则 $S_{\triangle PAB}\leqslant\frac{1}{2}(d+3)\cdot|AB|=\frac{1}{2}(d+3)\cdot2\sqrt{9-d^2}=\sqrt{(3-d)(d+3)^3}$.

设 $f(d)=(3-d)(d+3)^3$，$1\leqslant d<\sqrt{3}$，则 $f'(d)=2(d+3)^2(3-2d)$，当 $1\leqslant d<\frac{3}{2}$ 时，$f'(d)>0$，函数 $f(d)$ 单调递增，当 $\frac{3}{2}<d<\sqrt{3}$ 时，$f'(d)<0$，函数 $f(d)$ 单调递减，因此当 $d=\frac{3}{2}$ 时，$f(d)$ 取得最大值，此时 $(S_{\triangle PAB})_{\max}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

当 l 的斜率不存在时，由(1)知，$S_{\triangle PAB}\leqslant\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+3)\times2\sqrt{6}=3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$.

由 $\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2-(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2=\frac{115}{16}-4\sqrt{3}>7-4\sqrt{3}>0$，得 $\frac{27\sqrt{3}}{4}>3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$，则 $d=\frac{3}{2}$.对于线段 AB 上任意点 E，连接 OE 并延长与圆 O 交于点 F，则 F 是圆上与 E 最近的点，当 E 为线段 AB 的中点时，EF 取得最大值 $\frac{3}{2}$，所以 $d(M,N)=\frac{3}{2}$.

(ii)证明：因为 $H(X,Y)$，$H(Y,Z)$，$H(X,Z)$ 均存在，

所以可设点 $X_1,X_2\in X$，$Y_1,Y_2,Y_3\in Y$，$Z_1,Z_2,Z_3\in Z$，且 $H(X,Z)=|X_1Z_1|$，$H(Y,Z)=|Y_1Z_2|$，$H(X,Y)=|X_2Y_2|$.

设 Y_2 是集合 Y 中到 X_2 的最近点，根据对称性，不妨设 $H(X,Y)=d(X,Y)=|X_2Y_2|$，令点 X_2 到集合 Z 的最近点为 Z_3，点 Z_3 到集合 Y 的最近点为 Y_3，因为 $|X_1Z_1|$ 是集合 X 中所有点到集合 Z 最近点距离的最大值，所以 $|X_1Z_1|\geqslant|X_2Z_3|$，因为 $|Y_1Z_2|$ 是集合 Y 中所有点到集合 Z 最近点距离的最大值，所以 $|Y_1Z_2|\geqslant|Y_3Z_3|$.因此 $H(X,Z)+H(Y,Z)=|X_1Z_1|+|Y_1Z_2|\geqslant|X_2Z_3|+|Y_3Z_3|$，而在坐标平面中，$|X_2Z_3|+|Y_3Z_3|\geqslant|X_2Y_3|$，又点 Y_2 是集合 Y 中到点 X_2 的最近点，则 $|X_2Y_3|\geqslant|X_2Y_2|$，所以 $H(X,Z)+H(Y,Z)\geqslant H(X,Y)$.

第九单元 统计

第 57 讲 随机抽样

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 总体 每个对象 样本 个体数目
2. 抽签法 随机数表法
3. 明显差别的 互不重叠 层 比例

【对点演练】

1. 分层随机抽样 简单随机抽样
[解析]①中该社区500户家庭的收入有明显差异，所以应选用分层随机抽样法；②中15个个体间没有明显差异，所以应选用简单随机抽样法.
2. 150 [解析]依题意，得 $\frac{n}{200+1600+1200}=\frac{60}{1200}$，解得 $n=150$.
3. 一批炮弹的杀伤半径 每发炮弹的杀伤半径 50发炮弹的杀伤半径 50
[解析]在这次调查中，总体是一批炮弹的杀伤半径，个体是每发炮弹的杀伤半径，样本是50发炮弹的杀伤半径，样本容量是50.
4. $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ [解析]从6个个体中抽1个个体，每个个体被抽到的概率均为 $\frac{1}{6}$，与抽取的次数无关，第二次被抽到的概率仍为 $\frac{1}{6}$.但由于在整个抽样过程中是从6个个体中抽2个，故个体 a 被抽到的概率为 $\frac{1}{3}$.
5. 300 [解析]由题意可知，$\frac{60}{n}=\frac{2}{5+2+3}$，解得 $n=300$.

● 课堂考点探究

例1 (1)AC (2)$\frac{7}{33}$ [解析](1)在平面直角坐标系中有无数个点，这与总体中的个体数有限不相符，故A中的抽样方法不是简单随机抽样；易知B中的抽样方法是简单随机抽样；挑选的5名同学是最优秀的，不符合简单随机抽样的等可能性，故C中的抽样方法不是简单随机抽样；易知D中的抽样方法是简单随机抽样.故选AC.

(2)第二次抽取时，余下的每个个体被抽到的概率为 $\frac{1}{5}$，则 $\frac{14-1}{n-1}=\frac{1}{5}$，即 $n-1=65$，则 $n=66$，∴在整个抽样过程中，每个个体被抽到的概率为 $\frac{14}{66}=\frac{7}{33}$.

变式题 (1)C (2)8 $\frac{3}{8}$ [解析](1)对于A，总体容量较大，有明显的层次性，如男、女生在身高、体重等方面有较大差异，宜采用分层随机抽样方法；对于B，总体容量较大，且各村庄人口、地域、发展等方面有差异，收入可能有明显的差异，不宜

采用简单随机抽样方法;对于C,总体个数少,且家访活动学生个体平等,宜采用简单随机抽样方法;对于D,总体容量大,不同年龄的人传染病发病情况不同,有明显的差异,不宜采用简单随机抽样方法.综上比较,最适合用简单随机抽样方法的是C.故选C.
(2)简单随机抽样中第一次抽样可以理解为从n个个体中抽取一个个体,则每个个体被抽到的可能性是$\frac{1}{n}$,因此$n=8$.在整个抽样过程中,每个个体被抽到的可能性是$\frac{3}{8}$.

例2 (1)9 (2)B [解析](1)设中年人抽取x人,青少年抽取y人,由分层随机抽样可知$\frac{200}{480}=\frac{x}{36}$,$\frac{80}{480}=\frac{y}{36}$,解得$x=15$,$y=6$,故中年人比青少年多抽取9人.
(2)由扇形图可知,三个年级的学生总人数为$400+600+1000=2000$,所以样本容量为$2000\times30\%=600$.因为抽取的高二年级学生人数为$600\times30\%=180$,所以抽取的高二年级学生中满意的人数为$180\times60\%=108$.故选B.

变式题 (1)A (2)4000 [解析](1)由题意,全校参与跑步的人数占总人数的$\frac{3}{5}$,所以样本中参与跑步的人数为$200\times\frac{3}{5}=120$,则从高二年级参与跑步的学生中应抽取的人数为$120\times\frac{3}{2+3+5}=36$.故选A.
(2)由题可知$\frac{3200+x}{x+2400}=\frac{90}{80}$,解得$x=4000$.

第58讲 用样本估计总体

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

1. (1)条形图 扇形图 折线图 频率分布直方图 茎叶图
(2)①极差 ②分组 区间 ③数据
2. (1)①最极端 max min ②最小整数 x_n
(2)①$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$
②$\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$ ③最多
(3)①最大值 最小值 离散程度
②$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$
$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ 平均数
③$\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$
$\frac{1}{m+n}\left[(ms^2+nt^2)+\frac{mn}{m+n}(\bar{x}-\bar{y})^2\right]$

【对点演练】

1. 4.5 5.5 [解析]由题意得中位数$m=\frac{4+5}{2}=4.5$,而$10\times60\%=6$,则60%分位数$a=\frac{5+6}{2}=5.5$.
2. 丙 [解析]从表格中可以看出乙和丙的平均环数最高,即平均成绩最好,又乙、丙两人之间丙的方差较小,所以丙发挥得比乙稳定,故最佳人选应为丙.
3. $\frac{8}{5}$ [解析]由茎叶图可知评委打出的最低分为78,最高分为94,其余得分为85,85,85,87,88,故平均分为$(85+85+85+87+88)\div5=86$,方差为$\frac{1}{5}\times[3\times(85-86)^2+(87-86)^2+(88-86)^2]=\frac{8}{5}$.
4. 165.4 cm [解析]由题知,抽取男生的人数为$\frac{490}{490+510}\times100=49$,抽取女生的人数为$\frac{510}{490+510}\times100=51$,则高二年级全体学生的平均身高估计为$\frac{49}{100}\times170.2+\frac{51}{100}\times160.8=165.406\approx165.4$(cm).
5. 7 8.5 [解析]由题意知,这10名学生的得分为3,6,6,6,6,6,7,8,9,10,其极差是$10-3=7$,因为$10\times80\%=8$,所以80%分位数是$\frac{8+9}{2}=8.5$.
6. 70 70 68 [解析]由题意知众数为$\frac{60+80}{2}=70$.因为$0.005\times20+0.010\times20=0.3<0.5$,$(0.005+0.010+0.020)\times20=0.7>0.5$,所以中位数位于$[60,80)$内,设中位数为$x$,则$(0.005+0.010)\times20+(x-60)\times0.020=0.5$,解得$x=70$.平均数为$30\times0.1+50\times0.2+70\times0.4+90\times0.3=68$.
7. 19 4 [解析]∵$x_1,x_2,\cdots,x_n$的平均数为10,标准差为2,∴$2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_n-1$的平均数为$2\times10-1=19$,标准差为$\sqrt{2^2\times2^2}=4$.

● **课堂考点探究**

例1 (1)AB (2)D [解析](1)对于A,甲的每日行走步数依次为16 000,7965,12 700,2435,16 800,9500,11 600,从小到大排列为2435,7965,9500,11 600,12 700,16 000,16 800,则中位数是11 600,故A正确;对于B,这一星期内甲的每日行走步数的极差为16 800−2435=14 365,这一星期内乙的每日行走步数的极差为14 200−5340=8860,因为14 365>8860,所以这一星期内甲的每日行走步数的极差大于乙的每日行走步数的极差,故B正确;对于C,由图知甲数据的波动幅度更大,则乙的每日行走步数的方差小于甲的每日行走步数的方差,故C错误;对于D,乙的每日行走步数从小到大排列为5340,7030,10 060,11 600,12 300,12 970,14 200,$7\times75\%=5.25$,则这一星期内乙的每日行走步数的75%分位数是12 970,故D错误.故选AB.
(2)由题图可知,快递行业从业人员中,"90后"占总人数的56%,超过一半,A中结论正确;快递行业从业人员中,从事技术岗位的"90后"的人数占总人数的百分比为$56\%\times39.6\%=22.176\%$,超过20%,所以快递行业从业人员中,从事技术岗位的"90"后的人数超过总人数的20%,B中结论正确;快递行业从业人员中,从事运营岗位的"90后"的人数占总人数的百分比为$56\%\times17\%=9.52\%$,超过"80前"的人数占总人数的百分比,C中结论正确;快递行业从业人员中,从事技术岗位的"90后"的人数占总人数的百分比为22.176%,小于"80后"的人数占总人数的百分比,但"80后"从事技术岗位的人数占"80后"人数的百分比未知,D中结论不一定正确.故选D.

变式题 (1)ACD (2)C [解析](1)由题可知最大的数是11.7,最小的数是7.8,则极差为3.9,故A正确.中位数为$\frac{9.7+9.8}{2}=9.75$,众数为9.7,平均数为$\frac{1}{14}\times(7.8+8.6+8.9+9.1+9.6+9.7+9.7+9.8+10.0+10.2+10.6+10.7+11.2+11.7)\approx9.83$,因为$14\times0.75=10.5$,所以75%分位数为10.6,由以上数字特征可知,B错误,C,D正确.故选ACD.
(2)对于A,由图可知,2016年至2023年,知识付费用户数量逐年增加,故A中说法正确.对于B和C,2017年知识付费用户数量的逐年增加量为$0.96-0.48=0.48$,2018年知识付费用户数量的逐年增加量为$1.88-0.96=0.92$,2019年知识付费用户数量的逐年增加量为$2.95-1.88=1.07$,2020年知识付费用户数量的逐年增加量为$3.56-2.95=0.61$,2021年知识付费用户数量的逐年增加量为$4.15-3.56=0.59$,2022年知识付费用户数量的逐年增加量为$4.77-4.15=0.62$,2023年知识付费用户数量的逐年增加量为$5.27-4.77=0.5$,则知识付费用户数量逐年增加量2019年最多,知识付费用户数量的逐年增加量不是逐年递增,故B中说法正确,C中说法错误.对于D,由$5.27>10\times0.48$知,2023年知识付费用户数量超过2016年知识付费用户数量的10倍,故D中说法正确.故选C.

例2 (1)C (2)ABD [解析](1)对于A,根据频数分布表可知,$6+12+18=36<50$,所以亩产量的中位数不小于1050 kg,故A错误;对于B,亩产量不低于1100 kg的频数为$24+10=34$,所以低于1100 kg的稻田占比为$\frac{100-34}{100}=66\%$,故B错误;对于C,稻田亩产量的极差小于$1200-900=300$,大于$1150-950=200$,故C正确;对于D,由频数分布表可得,平均值为$\frac{1}{100}\times(6\times925+12\times975+18\times1025+30\times1075+24\times1125+10\times1175)=1067$,故D错误.故选C.
(2)对于A,因为体重在$[65,70)$所占的频率最高,所以估计样本的众数为$\frac{65+70}{2}=67.5$,故A正确;对于B,因为$5\times(0.03+0.05+0.06)=0.70$,$5\times0.04=0.20$,所以样本的80%分位数为$70+5\times\frac{10\%}{20\%}=72.5$,故B正确;对于C,样本的平均数为$57.5\times15\%+62.5\times25\%+67.5\times30\%+72.5\times20\%+77.5\times10\%=66.75$,故C错误;对于D,根据频率分布直方图,体重低于60 kg的学生的频率为$5\times0.03=15\%$,所以估计该校男生中体重低于60 kg的学生人数为$2000\times15\%=300$,故D正确.故选ABD.

变式题 (1)AD (2)BCD [解析](1)将原数据按从小到大的顺序排列为12,16,22,24,25,31,33,35,45,其中位数为25,平均数是$(12+16+22+24+25+31+33+35+45)\div9=27$,方差是$\frac{1}{9}\times[(-15)^2+(-11)^2+(-5)^2+(-3)^2+(-2)^2+4^2+6^2+8^2+18^2]=\frac{824}{9}$,由$40\%\times9=3.6$,得原数据的40%分位数是第4个数24.将原数据去掉12和45,得16,22,24,25,31,33,35,其中位数为25,平均数是$(16+22+24+25+31+33+35)\div7=\frac{186}{7}$,方差是$\frac{1}{7}\times\left[\left(-\frac{74}{7}\right)^2+\left(-\frac{32}{7}\right)^2+\left(-\frac{18}{7}\right)^2+\left(-\frac{11}{7}\right)^2+\left(\frac{31}{7}\right)^2+\left(\frac{45}{7}\right)^2+\left(\frac{59}{7}\right)^2\right]=\frac{1916}{49}$,由$40\%\times7=2.8$,得新数据的40%分位数是第3个数24,故中位数和40%分位数不变,平均数和方差改变,故A,D正确,B,C错误.故选AD.
(2)对于A,甲的数据在区间$[1.5,7.5]$内,极差小于或等于6,乙的数据在区间$[2.5,8.5]$内,极差小于或等于6,从而甲

和乙的极差可能相等,故A说法错误;对于B,根据频率分布直方图可知,甲的众数在区间[2.5,5.5)内,乙的众数在区间[5.5,6.5)内,乙的众数大于甲的众数,故B说法正确;对于C,甲的数据比较分散,乙的数据比较集中,因此乙的方差小于甲的方差,故C说法正确;对于D,甲的各组频率依次为0.15,0.20,0.20,0.20,0.15,0.10,其中位数在区间[3.5,4.5)内,乙的各组频率依次为0.05,0.10,0.15,0.35,0.20,0.15,其中位数在区间[5.5,6.5)内,所以甲的中位数小于乙的中位数,故D说法正确.故选BCD.

例3 (1)8.43 (2)ACD [解析](1)该武警大队共有30+30+40=100(人),用分层随机抽样的方法得第一中队参加射击考核的人数为$\frac{30}{100}\times30=9$,第二中队参加射击考核的人数为$\frac{30}{100}\times30=9$,第三中队参加射击考核的人数为$\frac{40}{100}\times30=12$,所以参加射击考核的30人的平均射击环数为$\frac{9}{30}\times8.8+\frac{9}{30}\times8.5+\frac{12}{30}\times8.1=8.43$,所以估计该武警大队队员的平均射击水平为8.43环.

(2)对于A,当$m=n$时,$\overline{z}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\frac{1}{2}\overline{x}+\frac{1}{2}\overline{y}=\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$,故A正确;对于B,当$\overline{z}=\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$时,取$x_1=x_2=\cdots=x_m=0$,$y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,则$m$与$n$不一定相等,故B错误;对于C,当$\overline{x}=\overline{y}$时,$\overline{z}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{x}=\frac{m+n}{m+n}\overline{x}=\overline{x}=\frac{\overline{x}+\overline{y}}{2}$,故C正确;对于D,当$\overline{z}>\overline{x}$时,$\overline{z}=\frac{m}{m+n}\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}>\overline{x}$,则$\left(\frac{m}{m+n}-1\right)\overline{x}+\frac{n}{m+n}\overline{y}>0$,所以$\frac{n}{m+n}\overline{y}-\frac{n}{m+n}\overline{x}>0$,即$\frac{n}{m+n}\overline{y}-\frac{n}{m+n}\overline{x}=\frac{n}{m+n}(\overline{y}-\overline{x})>0$,所以$\overline{y}>\overline{x}$,故D正确.故选ACD.

变式题 (1)13 (2)84 [解析](1)3个年级抽取的学生数分别为3人、3人、4人,则这10名学生体重的平均数为$\frac{1}{10}\times(3\times48+3\times52+4\times55)=52$,所以样本的方差$s^2=\frac{3}{10}\times[4+(48-52)^2]+\frac{3}{10}\times[10+(52-52)^2]+\frac{4}{10}\times[1+(55-52)^2]=13$.

(2)由分层随机抽样的方法可得C车间应抽取的件数为60×30%=18.总样本平均值为$\overline{x}=\frac{12\times220+30\times240+18\times230}{60}=233$,总样本方差为$s^2=\frac{1}{60}\times\{12\times[20+(220-233)^2]+30\times[20+(240-233)^2]+18\times[30+(230-233)^2]\}=84$.

例4 (1)BD [解析]对于A,该校高中学生平均每周英语训练时间不足4 h的人数为(0.03×2+0.10×2)×5000=1300,故A错误;对于B,估计该校高中学生平均每周英语训练时间不少于8 h的人数所占比例为0.08×2+0.03×2=0.22=22%,故B正确;对于C,假设该校高中学生平均每周英语训练时间的中位数为5 h,而训练时间小于5 h的频率为$0.03\times2+0.10\times2+\frac{1}{2}\times0.14\times2=0.4$,与频率为0.5矛盾,所以平均每周英语训练时间的中位数不为5 h,故C错误;对于D,估计该校高中学生平均每周英语训练时间为0.03×2×1+0.10×2×3+0.14×2×5+0.12×2×7+0.08×2×9+0.03×2×11=5.84(h),故D正确.故选BD.

(2)解:①∵(0.004+0.008+0.016+0.034+m+0.008+0.004+0.002)×10=1,∴m=0.024,故估计事件A发生的概率为(0.024+0.008+0.004+0.002)×10=0.38.

②估计本次数学考试成绩的平均数为(75×0.004+85×0.008+95×0.016+105×0.034+115×0.024+125×0.008+135×0.004+145×0.002)×10=106.6,估计本次数学考试成绩的方差为(998.56×0.004+466.56×0.008+134.56×0.016+2.56×0.034+70.56×0.024+338.56×0.008+806.56×0.004+1 474.56×0.002)×10=205.44.

变式题 (1)BCD (2)C [解析](1)对于A,由$(2a+3a+7a+6a+2a)\times10=200a=1$,解得$a=0.005$,故A错误;对于B,前两个矩形的面积之和为$(2a+3a)\times10=50a=0.25<0.5$,前三个矩形的面积之和为$(2a+3a+7a)\times10=120a=0.6>0.5$,设该年级学生成绩的中位数为$m$,则$m\in[70,80)$,根据中位数的定义可得$0.25+(m-70)\times0.035=0.5$,解得$m\approx77.14$,所以估计该年级学生成绩的中位数约为77.14,故B正确;对于C,估计成绩在80分及以上的学生成绩的平均数为$\frac{6a}{6a+2a}\times85+\frac{2a}{6a+2a}\times95=87.5$,故C正确;对于D,估计该年级成绩在80分及以上的学生成绩的方差为$\frac{3}{4}[12+(87.5-85)^2]+\frac{1}{4}[10+(87.5-95)^2]=30.25$,故D正确.故选BCD.

(2)由题意得,年夜饭消费金额在(2400,3200]内的频率为$\frac{35}{100}=0.35>\frac{1}{3}$,故A中说法正确;若该地区有2000个家庭,则估计年夜饭消费金额超过2400元的家庭个数为$2000\times\frac{35+8+4}{100}=940$,故B中说法正确;估计该地区家庭年夜饭消费金额的平均数为400×0.08+1200×0.2+2000×0.25+2800×0.35+3600×0.08+4400×0.04=2216(元),故C中说法不正确;估计该地区家庭年夜饭消费金额的中位数为$1600+\frac{50-20-8}{25}\times800=2304$(元),故D中说法正确.故选C.

第59讲 统计模型

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

一、1. (2)正相关 负相关 (3)一次函数

2. (2)①$r>0$ $r<0$ ②小 大 ③1

3. (2)①$(\overline{x},\overline{y})$ ②(i)$\hat{b}>0$ (ii)$\hat{b}<0$ (3)预测值

二、(2)①不超过α $1-\alpha$

【对点演练】

1. $r_2<r_4<r_3<r_1$ [解析]根据散点图可知,图①③中的样本数据正相关,图②④中的样本数据负相关,∴$r_1>0$,$r_2<0$,$r_3>0$,$r_4<0$.又图①②中的散点近似在一条直线上,则图①②中的样本数据的线性相关程度比较高.图③④中的散点比较分散,故图③④中的样本数据的线性相关程度比较低,即$|r_1|$与$|r_2|$比较大,$|r_4|$与$|r_3|$比较小,∴$r_2<r_4<r_3<r_1$.

2. 6.1 [解析]由表格数据知$\overline{x}=4$,设污损的数据为a,则$\overline{y}=\frac{25.4+a}{6}$,∴$\frac{25.4+a}{6}=1.03\times4+1.13$,解得$a=6.1$,即污损的数据为6.1.

3. 88 [解析]因为样本中志愿者的总人数为100,所以$a+b+d+12=100$,解得$a+b+d=88$.

4. ④ [解析]根据y关于x的回归直线方程$\hat{y}=0.85x-85.71$,可知y与x具有正的线性相关关系,①中结论正确;回归直线过点$(\overline{x},\overline{y})$,②中结论正确;由回归直线方程知,若该大学某女生身高增加1 cm,则其体重约增加0.85 kg,故③中结论正确;若该大学某女生身高为170 cm,则可预测其体重为58.79 kg,不可断定其体重必为58.79 kg,故④中结论不正确.故填④.

5. ① [解析]因为$\chi^2\approx3.918>3.841$,所以认为"这种血清能起到预防感冒的作用",这种推断犯错误的概率不超过0.05,故①正确;我们检验的是假设是否成立,与某人患感冒的可能性及该血清预防感冒的有效率没有关系,不是同一个问题,故②③④错误.故填①.

6. (2.5,4) [解析]令$z=\sqrt{x}$,则$\hat{y}=\hat{b}z+\hat{a}$恒过点$(\overline{z},\overline{y})$,又$\overline{z}=\frac{1}{4}\times(\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16})=2.5$,$\overline{y}=\frac{1}{4}\times(1+2.98+5.01+7.01)=4$,所以此曲线必过点(2.5,4).

● 课堂考点探究

例1 (1)A (2)AB [解析](1)由题中图①知气压随海拔高度的增加而减小,由题中图②知沸点随气压的升高而升高,所以气压与海拔高度呈负相关,沸点与气压呈正相关,沸点与海拔高度呈负相关.由于两个散点图中的点都呈线性分布,所以沸点与海拔高度、沸点与气压的线性相关性都很强,故B,C,D中说法正确,A中说法错误.故选A.

(2)由回归直线方程$\hat{z}=7.54+0.33x$可知,人均GDP和女性平均受教育年限正相关,A正确.因为$\hat{z}=7.54+0.33x$,$\hat{y}=2.89-0.21x$,所以$\hat{y}=2.89-0.21\times\frac{\hat{z}-7.54}{0.33}$,所以女性平均受教育年限和总和生育率负相关,B正确.由散点图可知,数据(x_i,y_i)的线性相关程度比数据(x_i,z_i)的线性相关程度弱,所以$|r_1|<|r_2|$,C错误.根据回归直线方程$\hat{y}=2.89-0.21x$可知,未来三年总和生育率有降低的趋势,但不一定继续降低,D错误.故选AB.

变式题 (1)C (2)A [解析](1)因为$r_1=0.837$,$r_2=-0.957$,所以变量X与Y正相关,变量U与V负相关,且X与Y之间的线性相关程度弱于U与V之间的线性相关程度.故选C.

(2)由题意可知,$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,因为回归直线$\hat{y}=0.28x+0.16$过点$(\overline{x},\overline{y})$,所以$\overline{y}=0.28\times3+0.16=1$,所以$m=5\times1-0.5-0.6-1.4-1.5=1$,则$r_1=\frac{(-2)\times(-0.5)+(-1)\times(-0.4)+0+1\times0.4+2\times0.5}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2}\times\sqrt{(-0.5)^2+(-0.4)^2+0^2+0.4^2+0.5^2}}=\frac{14\sqrt{205}}{205}$.易知去掉(3,1)后,$\overline{x}$,$\overline{y}$不变,则$r_2=\frac{(-2)\times(-0.5)+(-1)\times(-0.4)+1\times0.4+2\times0.5}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2+2^2}\times\sqrt{(-0.5)^2+(-0.4)^2+0.4^2+0.5^2}}=\frac{14\sqrt{205}}{205}$,所以$r_1=r_2$.故选A.

例 2 解：(1) $\bar{x}=\frac{2021\times5+(-2)+(-1)+0+1+2}{5}=2021$，$\bar{y}=\frac{0.40+0.70+1.10+1.50+1.80}{5}=1.10$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=(-0.7)^2+(-0.4)^2+0^2+0.4^2+0.7^2=1.3$，所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{3.6}{\sqrt{10}\times\sqrt{1.3}}\approx\frac{3.6}{3.605\,6}\approx0.998$.

(2) 由(1)知 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{3.6}{10}=0.36$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=1.10-2021\times0.36=-726.46$，所以 y 关于 x 的回归直线方程是 $\hat{y}=0.36x-726.46$，当 $x=2025$ 时，$\hat{y}=0.36\times2025-726.46=2.54$，所以预测该地区 2025 年新能源汽车购买数量为 2.54 万辆.

变式题 (1)AD [解析] 因为回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 经过点$(10,m)$，所以 $m=10\hat{b}+\hat{a}$，$5m=11+10+m+6+5$，因为相对于点$(11,5)$的残差为 0.2，所以 $5-(11\hat{b}+\hat{a})=0.2$，所以 $m=8$，$\hat{b}=-3.2$，$\hat{a}=40$，故 A 正确，B 错误，C 错误；$\hat{y}=-3.2x+40$，当 $x=9$ 时，$\hat{y}=-3.2\times9+40=11.2$，当 $x=9.5$ 时，$\hat{y}=-3.2\times9.5+40=9.6$，当 $x=10$ 时，$\hat{y}=-3.2\times10+40=8$，当 $x=10.5$ 时，$\hat{y}=-3.2\times10.5+40=6.4$，当 $x=11$ 时，$\hat{y}=-3.2\times11+40=4.8$，所以残差和为 $11-11.2+10-9.6+8-8+6-6.4+5-4.8=0$，故 D 正确.故选 AD.

(2)解：①设利润 y 关于原材料投入 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，由已知得 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(82+84+85+86+88)=85$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(770+800+830+850+900)=830$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-3)\times(-60)+(-1)\times(-30)+0+1\times20+3\times70=440$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=9+1+0+1+9=20$，所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=22$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=830-22\times85=-1040$.

所以利润 y 关于原材料投入 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=22x-1040$.

②由(1)知，当 $x=100$ 时，$\hat{y}=22\times100-1040=1160$，

所以当原材料投入为 100 万元时，预测该产品的利润为 1160 万元.

例 3 解：(1)由题意知 $r_1=\frac{\sum_{i=1}^{12}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{12}(u_i-\bar{u})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{12}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{21\,500}{\sqrt{3\,125\,000\times200}}=\frac{21\,500}{25\,000}=0.86$，

$r_2=\frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{12}(v_i-\bar{v})^2}}=\frac{14}{\sqrt{770\times0.308}}=\frac{14}{15.4}\approx0.91$.

因为 $0.86<0.91$，

所以 $|r_1|<|r_2|$，

故从样本相关系数的角度，模型 $y=e^{\lambda x+t}$ 中 y 与 x 的相关性较强.

(2)(i)由 $y=e^{\lambda x+t}$，得 $\ln y=t+\lambda x$，即 $v=t+\lambda x$.

因为 $\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{14}{770}\approx0.02$，所以 $\hat{t}=\bar{v}-\hat{\lambda}\bar{x}=4.20-\frac{14}{770}\times20\approx3.84$，故 v 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{v}=0.02x+3.84$，即 $\ln\hat{y}=0.02x+3.84$，所以 $\hat{y}=e^{0.02x+3.84}$.

(ii)将 $y=80$ 代入 $\hat{y}=e^{0.02x+3.84}$，得 $80=e^{0.02x+3.84}$，又 $e^{4.382}\approx80$，所以 $0.02x+3.84\approx4.382$，解得 $x\approx27.1$，故预测下一年的研发资金投入量约为 27.1 亿元.

变式题 (1)B [解析] 将 $u=\ln y$，$v=(x-4)^2$ 代入回归直线方程 $\hat{u}=-0.5v+2$ 得 $\ln\hat{y}=-0.5(x-4)^2+2$，即 $\hat{y}=e^{-0.5(x-4)^2+2}$.当 $x=4$ 时，$-0.5(x-4)^2+2$ 取得最大值 2，则此时 $\hat{y}$ 取得最大值 e^2.故选 B.

(2)解：①因为 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(4+6+8+10+12)=8$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(27+42+55+56+60)=48$，所以 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(4-8)^2+(6-8)^2+(8-8)^2+(10-8)^2+(12-8)^2=40$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=(27-48)^2+(42-48)^2+(55-48)^2+(56-48)^2+(60-48)^2=734$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(4-8)\times(27-48)+(6-8)\times(42-48)+(8-8)\times(55-48)+(10-8)\times(56-48)+(12-8)\times(60-48)=160$.模型(i)中，样本相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{160}{\sqrt{40\times734}}\approx\frac{160}{171.35}\approx0.93$.

② 因为 $r\approx0.93<0.95$，所以选择模型(ii).令 $v_i=\sqrt{x_i}$，先建立 y 关于 v 的回归直线方程，由于 $\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(v_i-\bar{v})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(v_i-\bar{v})^2}\approx\frac{29.91}{1.33}\approx22.49$，$\hat{c}=\bar{y}-\hat{d}\bar{v}\approx48-22.49\times2.78\approx-14.52$，所以 y 关于 v 的回归直线方程为 $\hat{y}=-14.52+22.49v$，即 $\hat{y}=-14.52+22.49\sqrt{x}$，当 $x=16$ 时，$\hat{y}=-14.52+22.49\sqrt{16}=75.44$，所以当 $x=16$ 时，y 的预测值为 75.44.

例 4 解：(1)(400,600]组的频率为 $1-0.20-0.15-t=0.65-t$，

估计学生与最近食堂间的平均距离 $\bar{d}=100\times0.20+300t+500(0.65-t)+700\times0.15=450-200t=370$，解得 $t=0.40$，所以补全频率分布表如下：

学生与最近食堂间的距离 d(m)	(0,200]	(200,400]	(400,600]	(600,800]	总计
在食堂就餐频率	0.15	0.20	0.10	0.05	0.50
点外卖频率	0.05	0.20	0.15	0.10	0.50
总计	0.20	0.40	0.25	0.15	1.00

(2)由(1)知，2000 名学生中距最近食堂较近的有 $2000\times0.6=1200$(名)，其中在食堂就餐的有 $2000\times0.35=700$(名)，

距最近食堂较远的学生中，在食堂就餐的有 $2000\times0.15=300$(名).

因此补全 2×2 列联表如下：

	学生距最近食堂较近	学生距最近食堂较远	总计
在食堂就餐	700	300	1000
点外卖	500	500	1000
总计	1200	800	2000

则 $\chi^2=\frac{2000\times(700\times500-300\times500)^2}{1000\times1000\times1200\times800}=\frac{250}{3}>10.828$，所以有 99.9% 的把握认为学生中午的用餐方式与学生距最近食堂的远近有关.

变式题 (1)21 [解析] 由题意得 $\chi^2=\frac{100[(60-m)(40-m)-(m-10)(m+10)]^2}{50\times50\times70\times30}=\frac{(2500-100m)^2}{30\times50\times35}$，令 $\chi^2=\frac{(2500-100m)^2}{30\times50\times35}<3.841$，由 $m\in\mathbf{N}^*$ 可得 $21\leqslant m\leqslant29$，故 m 的最小值为 21.

(2)解：①将表格补充完整为

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

K^2 的观测值 $k=\frac{150\times(26\times30-70\times24)^2}{96\times54\times50\times100}\approx4.688$.

因为 $4.688>3.841$，所以有 95% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

因为 $4.688<6.635$，所以没有 99% 的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

②由题意可知，生产线智能化升级改造后，

该工厂产品的优级品的频率为 $\frac{96}{150}=0.64$，用频率估计概率可得 $\bar{p}=0.64$.

又因为升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$，所以 $p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=0.5+1.65\sqrt{\frac{0.5\times(1-0.5)}{150}}\approx0.5+1.65\times\frac{0.5}{12.247}\approx0.567$，

可知 $\bar{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，

所以可以认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了.

第 60 讲　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

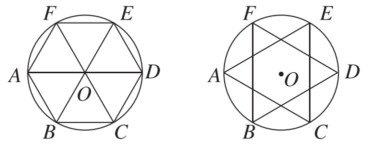
1. $m_1+m_2+\cdots+m_n$
2. $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$

【对点演练】

1. 120　[解析] 根据分步乘法计数原理可知，可选择的不同的方案有 $10\times12=120$(种).
2. 21　[解析] 依题意知共有 $10+8+3=21$(种)不同的选法.
3. 32　1024　[解析] 若每位同学限报其中一个小组，则每位同学都有 2 种报名方法，由分步乘法计数原理知，不同的报名方法共有 $2\times2\times2\times2\times2=32$(种). 若没有任何限制，则每位同学可以都不报，可以报一个，也可以都报，则每位同学有 $1+2+1=4$(种)报名方法，由分步乘法计数原理知，不同的报名方法共有 $4\times4\times4\times4\times4=1024$(种).
4. 15　120　[解析] 从书架上任取 1 本书，有三类方案：第 1 类，从第 1 层取 1 本语文书，有 6 种方法；第 2 类，从第 2 层取 1 本数学书，有 5 种方法；第 3 类，从第 3 层取 1 本外语书，有 4 种方法. 根据分类加法计数原理，不同取法的种数为 $6+5+4=15$. 从书架的第 1 层、第 2 层、第 3 层各取 1 本书，可以分三步完成：第 1 步，从第 1 层取 1 本语文书，有 6 种方法；第 2 步，从第 2 层取 1 本数学书，有 5 种方法；第 3 步，从第 3 层取 1 本外语书，有 4 种方法. 根据分步乘法计数原理，不同取法的种数为 $6\times5\times4=120$.
5. 20　[解析] 由三位"凸数"的特点知，中间的数字只能是 3,4,5，即分三类. 第一类，当中间数字为"3"时，此时有 2 个"凸数"，即 132,231；第二类，当中间数字为"4"时，个位数字有 3 种选择，百位数字有 2 种选择，则"凸数"有 $2\times3=6$(个)；第三类，当中间数字为"5"时，个位数字有 4 种选择，百位数字有 3 种选择，则"凸数"有 $4\times3=12$(个). 由分类加法计数原理得，由 1,2,3,4,5 可以组成无重复数字的三位"凸数"的个数是 $2+6+12=20$.
6. (1)60　(2)125　[解析] (1)从 5 本不同的书中选出 3 本分别送给 3 名同学，对应于从 5 个不同元素中任取 3 个元素的一个排列，因此不同送法的种数是 $5\times4\times3=60$.
   (2)由于有 5 种不同的书(每种不少于 3 本)，故每名同学都有 5 种不同的送法，因此送给 3 名同学，每人各 1 本书的不同送法的种数是 $5\times5\times5=125$.

● 课堂考点探究

例 1　(1)10　(2)8　[解析] (1)要组成十位数字小于个位数字的两位数，可分如下情况：当个位数字为 9 时，十位上的数字有 4 种取法，能组成 4 个十位数字小于个位数字的两位数；当个位数字为 7 时，十位上的数字有 3 种取法，能组成 3 个十位数字小于个位数字的两位数；当个位数字为 5 时，十位上的数字有 2 种取法，能组成 2 个十位数字小于个位数字的两位数；当个位数字为 3 时，十位上的数字有 1 种取法，能组成 1 个十位数字小于个位数字的两位数. 故能组成的十位数字小于个位数字的两位数有 $1+2+3+4=10$(个).
(2)根据圆的对称性，分两类讨论. 如图①，由圆上相邻 2 个点和圆心可构成等边三角形，这样的等边三角形有 6 个；如图②，由圆上相间隔的 3 个点可构成等边三角形，这样的等边三角形有 2 个. 由分类加法计数原理可得，共能构成不同的等边三角形的个数为 $6+2=8$.



①　　②

变式题　(1)A　(2)B　[解析] (1)因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以 $m>n$. 以 m 的值为标准分类，可分为四类：第一类，当 $m=5$ 时，使 $m>n$，n 有 4 种选择；第二类，当 $m=4$ 时，使 $m>n$，n 有 3 种选择；第三类，当 $m=3$ 时，使 $m>n$，n 有 2 种选择；第四类，当 $m=2$ 时，使 $m>n$，n 有 1 种选择. 故符合条件的椭圆共有 $4+3+2+1=10$(个). 故选 A.
(2)符合题目要求的分类方法有甲 3 张乙 1 张，甲 2 张乙 2 张，甲 1 张乙 3 张三类. ①若甲 3 张乙 1 张，则有 4 种分法；②若甲 2 张乙 2 张，则有 6 种分法；③若甲 1 张乙 3 张，则有 4 种分法. 所以不同分法的种数为 $4+6+4=14$. 故选 B.

例 2　(1)B　(2)C　[解析] (1)根据题意，分 2 步进行分析：首先选取 1 种相同课外读物的选法有 5 种，再选取另外两种不同的课外读物，有 $4\times3=12$(种). 所以这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有 $5\times12=60$(种). 故选 B.
(2)先安排 2 名男生，保证每个小组都有男生，则有 2 种分配方案；再安排 5 名女生，若将每名女生随机安排，则有 $2^5=32$(种)分配方案，若 5 名女生都在同一小组，则有 2 种分配方案，因为每个小组都有女生，所以女生共有 $2^5-2=30$(种)分配方案. 所以共有 $2\times30=60$(种)分配方案，故选 C.

变式题　(1)B　(2)B　[解析] (1)完成这个事情需要三步：第 1 步，在第二、三、四笔选一笔写卧钩，有 3 种方法；第 2 步，在前四笔剩下的三笔中写左点、上点、撇，有 $3\times2\times1=6$(种)方法；第 3 步，最后一笔写右点，有 1 种方法. 根据分步乘法计数原理可知，共有 $3\times6\times1=18$(种)笔顺. 故选 B.
(2)求不同填法需要 4 步：填中间一列有 2 种方法，再填 1 有 3 种方法，与 1 同列的只能是 3 或 4，有 2 种方法，最后两个区域填两个数字，有 2 种方法，所以不同的填法种数是 $2\times3\times2\times2=24$. 故选 B.

例 3　(1)C　(2)A　[解析] (1)根据题意，分 2 种情况讨论：①若 0 在个位，此时只需从 1,2,3,4,5 中任取 2 个数字，作为十位和百位数字即可，有 $5\times4=20$(个)没有重复数字的三位偶数；②若 0 不在个位，此时必须从 2 和 4 中任取 1 个数字作为个位数字，有 2 种取法，0 不能作为百位数字，则百位数字有 4 种取法，十位数字也有 4 种取法，此时有 $2\times4\times4=32$(个)没有重复数字的三位偶数. 综上可得，共有 $20+32=52$(个)没有重复数字的三位偶数. 故选 C.
(2)先涂 E，有 4 种选择，接下来涂 C，有 3 种选择，再涂 F，有 2 种选择. ①当 C,D 颜色相同时，涂色方法种数是 $4\times3\times2\times1\times2=48$；②当 C,D 颜色不相同时，涂色方法种数是 $4\times3\times2\times1\times(1+2)=72$. 故满足题意的涂色方法种数是 $48+72=120$. 故选 A.

变式题　(1)B　(2)43　[解析] (1)按照 $S\to A\to B\to C\to D$ 的顺序进行染色，按照 A,C 是否同色分类：第一类，A,C 同色，由分步乘法计数原理，有 $5\times4\times3\times1\times3=180$(种)不同的染色方法；第二类，$A$,$C$ 不同色，由分步乘法计数原理，有 $5\times4\times3\times2\times2=240$(种)不同的染色方法. 根据分类加法计数原理，共有 $180+240=420$(种)不同的染色方法. 故选 B.
(2)设直线 $ax+by+c=0$ 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=-\frac{a}{b}>0$. 不妨设 $a>0$，则 $b<0$. 当 $c=0$ 时，a 有 3 种取法，b 有 3 种取法，其中 $3x-3y=0$, $2x-2y=0$ 与 $x-y=0$ 为同一直线，故符合要求的直线有 $3\times3-2=7$(条)；当 $c\neq0$ 时，a 有 3 种取法，b 有 3 种取法，c 有 4 种取法，且其中任意两条直线均不重合，故符合要求的直线有 $3\times3\times4=36$(条). 故符合要求的直线有 $7+36=43$(条).

第 61 讲　排列与组合

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 一定的顺序　2. (1)A_n^m　(2)C_n^m
3. $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$　$\frac{A_n^m}{A_m^m}$

【对点演练】

1. 4　[解析] 4 名学生中，来自高一、高二年级的各 2 名，所以随机选 2 名学生，来自不同年级的选择方法有 $C_2^1C_2^1=4$(种).
2. 2400　[解析] 安排甲和乙在 3 日至 7 日中的两天值班，然后安排其他五人在剩余五天值班，所以不同的安排方法有 $A_5^2\times A_5^5=20\times120=2400$(种).
3. 20　[解析] A 项工作安排 3 人有 $C_5^3=10$(种)安排方式，B,C 两项工作均只安排 1 人，有 $A_2^2=2$(种)安排方式，则不同的安排方式共有 $10\times2=20$(种).
4. 5　120　96　[解析] 从 5 名学生中选出 4 名去参加学科竞赛，有 $C_5^4=5$(种)选法. 若这 4 名学生分别参加数学、物理、化学、生物四科竞赛，则不同的参赛方案有 $A_5^4=120$(种). 由于甲不参加生物竞赛，因此安排甲参加另外三门学科的竞赛或甲不参加任何竞赛. ①当甲参加另外三门学科的竞赛时，有 $C_3^1A_4^3=72$(种)方案；②当甲不参加任何竞赛时，有 $A_4^4=24$(种)方案. 故甲不参加生物竞赛的不同参赛方案种数为 $72+24=96$.
5. 720　720　[解析] 要将这 7 人站成一排，且 3 个女生排在一起，可以分 2 个步骤：第 1 步，将 3 个女生全排列，有 $A_3^3=6$(种)方法；第 2 步，将 3 个女生"捆绑"看作 1 个整体与男生 4 人全排列，有 $A_5^5=120$(种)方法. 根据分步乘法计数原理，3 个女生排在一起共有 $6\times120=720$(种)排法. 要将这 7 人站成一排，且甲、乙 2 人之间恰好有 3 个人，可以分 3 个步骤：第 1 步，甲、乙 2 人全排列，有 $A_2^2=2$(种)方法；第 2 步，从其余 5 个人中选出 3 个人，在甲、乙 2 人之间排列，有 $A_5^3=60$(种)方法；第 3 步，将甲、乙 2 人及之间的 3 个人"捆绑"为 1 个元素，与另外 2 个人共 3 个元素全排列，有 $A_3^3=6$(种)方法. 根据分步乘法计数原理，甲、乙 2 人之间恰好有 3 个人共有 $2\times60\times6=720$(种)排法.
6. 150　[解析] 依题意分两类情况：第一类为(2,2,1)，则有 $\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}A_3^3=90$(种)参加方式；第二类为(1,1,3)，则有 $\frac{C_5^3C_2^1}{A_2^2}A_3^3=60$(种)参加方式. 所以共有 $90+60=150$(种)参加方式.

● 课堂考点探究

例 1　(1)D　(2)D　[解析] (1)由题意，从星期一至星期五值班，2 天相连的情况有 4 种，则不同的安排方法共有 $4A_4^4=96$(种). 故选 D.
(2)方法一：先安排喀什的顺序有 4 种，再安排剩下的四个城市有 $A_4^4=24$(种)，所

以共有 $4A_4^4=96$(种)顺序.

方法二:最后目的地没有限制条件的情况有 A_5^5 种,而最后一个目的城市是喀什的情况有 A_4^4 种,所以最后一个目的城市不是喀什的情况有 $A_5^5-A_4^4=96$(种). 故选 D.

变式题 (1)C (2)C [解析](1)3 名男医生各去一个区域,有 A_3^3 种派遣方法,2 名女医生有 3^2 种派遣方法,共有 $A_3^3\cdot 3^2=54$(种)派遣方法.

(2)先进行分类:①3 人到 A 队伍,考虑 3 人在 A 队的排队顺序,此时有 $A_3^3=6$(种)排队方案;②2 人到 A 队伍,同样要考虑 2 人在 A 队的排队顺序,此时有 $A_3^2=6$(种)排队方案;③1 人到 A 队伍,要考虑 2 人在 B 队的排队顺序,此时有 $A_3^2=6$(种)排队方案;④0 人到 A 队伍,要考虑 3 人在 B 队的排队顺序,此时有 $A_3^3=6$(种)排队方案. 所以甲、乙、丙三人不同的排队方案共有 $6+6+6+6=24$(种). 故选 C.

例 2 (1)D (2)64 [解析](1)从平行直线 $x+y-a=0(a=0,1,2,3,4,5)$ 中选 2 条,再从平行直线 $2x-y+b=0(b=0,1,2,3,4,5)$ 中选 2 条,即可确定 1 个平行四边形,所以可确定平行四边形的个数为 $C_6^2C_6^2=15\times15=225$(个). 故选 D.

(2)若选修 2 门课,则需要从体育类和艺术类选修课中各选 1 门,有 $C_4^1C_4^1=16$(种)方案;若选择 3 门课,则包含两种情况:选 2 门体育类,1 门艺术类或 2 门艺术类,1 门体育类,有 $C_4^2C_4^1+C_4^1C_4^2=48$(种)方案. 故不同的选课方案共有 $16+48=64$(种).

变式题 (1)AD (2)42 [解析](1)对于 A,若 4 人中男、女生各 2 人,则有 $C_4^2C_3^2=6\times3=18$(种)选法,故 A 正确;对于 B,若男生甲和女生乙必选,则有 $C_5^2=10$(种)选法,故 B 错误;对于 C,从 7 名同学中任选 4 人,共有 $C_7^4=35$(种)选法,而甲、乙都不被选有 $C_5^4=5$(种)选法,故甲、乙至少有 1 人被选有 $C_7^4-C_5^4=35-5=30$(种)选法,故 C 错误;对于 D,若 4 人中既有男生又有女生,则有 $C_7^4-C_4^4=35-1=34$(种)选法,故 D 正确. 故选 AD.

(2)依题意,问题相当于从 $1,2,3,\cdots,10$ 这 10 个数中任取 3 个,这 3 个数的和能被 3 整除. 10 个数中能被 3 整除的有 3,6,9;除以 3 余数是 1 的有 1,4,7,10;除以 3 余数是 2 的有 2,5,8. 所以编号之和能被 3 整除的取法共有 $2C_3^3+C_4^3+C_3^1C_3^1C_4^1=42$(种).

例 3 (1)C (2)276 [解析](1)对于 A,从 7 人中任选 3 人相互调整位置,其余 4 人位置不变,则不同的调整方案有 $C_7^3\times2\times1=70$(种),故 A 中说法正确;对于 B,先排女生,将 4 名女生全排列,有 A_4^4 种方法,再排男生,由于男生互不相邻,因此可以在女生之间及首尾空出的 5 个空位中任选 3 个空位排男生,有 A_5^3 种方法,故共有 $A_4^4\cdot A_5^3=1440$(种)站法,故 B 中说法正确;对于 C,将女生看成一个整体,考虑女生之间的顺序,有 A_4^4 种情况,再将女生的整体与 3 名男生进行全排列,有 A_4^4 种情况,故共有 $A_4^4\cdot A_4^4=576$(种)站法,故 C 中说法错误;对于 D,若甲站在排尾,则有 A_6^6 种站法,若甲不站在排尾,则有 $A_5^1A_5^1A_5^5$ 种站法,故共有 $A_6^6+A_5^1A_5^1A_5^5=3720$(种)站法,故 D 中说法正确. 故选 C.

(2)依题意,由甲、乙至少有一人参加,分甲参加与甲不参加乙必参加两种情况:当甲参加时,有 $C_3^1A_5^3$ 种选派方法;当甲不参加时,有 $C_4^3A_4^4$ 种选派方法. 所以不同的选派方法种数是 $C_3^1A_5^3+C_4^3A_4^4=180+96=276$.

变式题 (1)C (2)864 [解析](1)若乙担任数学课代表,则不同的安排方式有 $C_2^1\cdot A_4^4=48$(种);若丙担任数学课代表,则不同的安排方式有 $C_2^1\cdot C_2^1\cdot A_3^3=24$(种). 所以不同的安排方式共有 $48+24=72$(种). 故选 C.

(2)首先从"诗""酒""花""茶"中选"两雅",有 C_4^2 种选法;"琴""棋"相邻用捆绑法看作一个整体,与除"书"与"画"外的"两雅"全排列,有 $A_3^3A_2^2$ 种排法;最后将"书"与"画"插入到所形成的 4 个空中的 2 个空,有 A_4^2 种插法. 按照分步乘法计数原理可得,共有 $C_4^2A_3^3A_2^2A_4^2=864$(种)排课方法.

例 4 C [解析]A,B 相邻有 A_2^2 种站法,将 A,B 看成一个整体与 C,D,E,F 进行全排列,共有 $A_2^2A_5^5$ 种站法,则 C 在 D 的左边的站法有 $\frac{A_2^2A_5^5}{A_2^2}=120$(种). 故选 C.

变式题 D [解析]方法一:依题意,7 名棋手作全排列为 A_7^7,其中原有 5 名棋手的排列为 A_5^5,所以不改变一班棋手出场次序的不同排法种数为 $\frac{A_7^7}{A_5^5}=7\times6=42$.

方法二:由 5 名棋手位置固定,有 6 个空隙,先插入二班的第一名棋手有 6 种插法,此时有 7 个空隙,再插入二班的第二名棋手有 7 种插法,所以不同的排法有 $7\times6=42$(种).

例 5 D [解析]将 8 个参赛名额看成 8 个元素,之间会产生 7 个空隙,则分配方法共有 $C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2}=35$(种),故选 D.

变式题 15 [解析]由于每只羊羔的价格均为 300 元,因此共有 10 个购买羊羔的指标,可以看成 10 个无差别的小球,3 种不同的羊羔可以看成 3 个编号分别为 1,2,3 的盒子,要求每种羊羔至少买 2 只,则先取出 3 个小球放入盒子中,每盒 1 个,则问题转化为把 7 个无差别的小球装入 3 个不同的盒子中,每个盒子至少装 1 个小球. 用隔板法,7 个小球之间共有 6 个空隙,从中选 2 个插入隔板,则共有 $C_6^2=15$(种)不同的购买方案.

例 6 360 [解析]由题意,先不考虑专家 A 不能去甲乡镇的情况,将六名农业专家分成三组,有(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2)三种情况. 按(1,1,4)分组有 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}=15$(种)方法,按(1,2,3)分组有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$(种)方法,按(2,2,2)分组有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$(种)方法. 再将三组农业专家分配到甲、乙、丙三个乡镇上,有 A_3^3 种方法. 所以共有 $(15+60+15)A_3^3=540$(种)安排方案. 上述安排方案中,专家 A 去甲乡镇,去乙乡镇和去丙乡镇的安排方案种数相等,故专家 A 不去甲乡镇的安排方案有 $540\times\frac{2}{3}=360$(种).

变式题 ABC [解析]对于 A,先从 6 本书中选出 2 本分给甲,有 C_6^2 种方法;再从其余的 4 本书中选出 2 本分给乙,有 C_4^2 种方法;最后的 2 本书分给丙,有 C_2^2 种方法. 所以不同的分配方法有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$(种),A 正确. 对于 B,先把 6 本书分成 3 堆:4 本、1 本、1 本,有 C_6^4 种方法;再分给甲、乙、丙三人,有 A_3^3 种方法. 故不同的分配方法有 $C_6^4A_3^3=90$(种),B 正确. 对于 C,6 本不同的书先分给甲、乙每人各 2 本,有 $C_6^2C_4^2$ 种方法;其余 2 本分给丙、丁每人各 1 本,有 A_2^2 种方法. 所以不同的分配方法有 $C_6^2C_4^2A_2^2=180$(种),C 正确. 对于 D,先把 6 本不同的书分成 4 堆:2 本、2 本、1 本、1 本,有 $\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}\cdot\frac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}$ 种方法;再分给甲、乙、丙、丁四人,有 A_4^4 种方法. 故不同的分配方法有 $\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}\cdot\frac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_4^4=1080$(种),D 错误. 故选 ABC.

第 62 讲 二项式定理

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. $C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n$ $C_n^ka^{n-k}b^k$ $k+1$
2. (2)① $C_n^{\frac{n}{2}}$ ② $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ (3)① 2^n ② 2^{n-1}

【对点演练】

1. 160 [解析]$(1+2x)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r1^{6-r}(2x)^r=C_6^r2^rx^r$,令 $r=3$,则展开式中 x^3 的系数为 $C_6^3\times2^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times8=160$.
2. 2 [解析]设 $f(x)=\left(ax^2-\frac{1}{x}\right)^9$,则由题意得 $f(1)=(a-1)^9=1$,解得 $a=2$.
3. 672 [解析]由题意得 $2^n=128$,则 $n=7$,则 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r(2x)^{7-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r2^{7-r}C_7^rx^{7-2r}$,令 $7-2r=3$,可得 $r=2$,所以展开式中 x^3 的系数为 $(-1)^2\times2^5C_7^2=672$.
4. 10^n-1 [解析]$C_n^0\cdot3^{2n}+C_n^1\cdot3^{2n-2}+C_n^2\cdot3^{2n-4}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot3^2=C_n^0\cdot(3^2)^n+C_n^1\cdot(3^2)^{n-1}+C_n^2\cdot(3^2)^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot(3^2)^1+C_n^n\cdot(3^2)^0-C_n^n\cdot(3^2)^0=(3^2+1)^n-1=10^n-1$.
5. 6 [解析]$(x+\sqrt[4]{3}y)^{20}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{20}^rx^{20-r}(\sqrt[4]{3}y)^r=C_{20}^rx^{20-r}y^r\cdot3^{\frac{r}{4}}$,当 $\frac{r}{4}$ 为整数时,系数为有理数. 因为 $0\leqslant r\leqslant20$,且 $r\in\mathbf{N}$,所以 $r=0,4,8,12,16,20$,所以展开式中系数为有理数的项共有 6 项.
6. 3 [解析]令 $x=1$,得展开式各项系数的和为 4^n,又各二项式系数的和为 2^n,所以 $4^n-2^n=56$,即 $(2^n)^2-2^n-56=0$,可得 $2^n=8$,故 $n=3$.

● 课堂考点探究

例 1 (1)20 (2)±1 [解析](1)$\left(\frac{3}{x^3}+\frac{x^3}{3}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\left(\frac{3}{x^3}\right)^{6-r}\left(\frac{x^3}{3}\right)^r=3^{6-2r}C_6^rx^{6(r-3)}$,$r=0,1,\cdots,6$,令 $6(r-3)=0$,可得 $r=3$,所以常数项为 $3^0C_6^3=20$.

(2)$(\sqrt{x}+a)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^{\frac{1}{2}})^{6-r}a^r=a^rC_6^rx^{\frac{6-r}{2}}$,因为 x 的系数与 x^2 的系数相等,所以 $a^4C_6^4=a^2C_6^2$,即 $a^4=a^2$,所以 $a^2(a^2-1)=0$,又 $a\neq0$,所以 $a=\pm1$.

变式题 (1)B (2)D [解析](1)$\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^3$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_3^r(x^2)^{3-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=C_3^r\left(-\frac{1}{2}\right)^rx^{6-3r}$,令 $6-3r=0$,可得 $r=2$,所以 $T_3=C_3^2\times$

$\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,故选B.

(2)$\left(x^2-\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$的展开式中第7项为$T_7=C_n^6(x^2)^{n-6}\left(-\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^6=(-a)^6C_n^6x^{2n-14}$,由题意得$2n-14=0$,$(-a)^6C_n^6=7(a>0)$,所以$n=7$,$a=1$,则展开式的通项为$T_{k+1}=(-1)^kC_7^kx^{14-2k}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=(-1)^kC_7^kx^{\frac{42-7k}{3}}$,$k=0,1,2,\cdots,7$,令$\frac{42-7k}{3}\in\mathbf{Z}$,则$k=0,3,6$,所以展开式中有理项共有3项.故选D.

例2 (1)B (2)5 [解析](1)因为$(x-2y)^n$的展开式中第4项与第5项的二项式系数相等,所以$C_n^3=C_n^4$,则$n=7$.$(x-2y)^7$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_7^rx^{7-r}(-2y)^r$,令$r=2$,则展开式中$x^5y^2$的系数为$C_7^2(-2)^2=84$.故选B.

(2)展开式的通项为$T_{r+1}=C_{10}^r\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r}x^r$,$0\leqslant r\leqslant 10$,且$r\in\mathbf{Z}$,设展开式中系数最大的项为第$r+1$项,则需要满足$\begin{cases}C_{10}^r\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r}\geqslant C_{10}^{r-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{11-r},\\ C_{10}^r\left(\frac{1}{3}\right)^{10-r}\geqslant C_{10}^{r+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{9-r},\end{cases}$解得$\frac{29}{4}\leqslant r\leqslant\frac{33}{4}$,又$r\in\mathbf{Z}$,所以$r=8$,即展开式中,各项系数中的最大值为$C_{10}^8\left(\frac{1}{3}\right)^2=5$.

变式题 (1)$240x^6$ (2)$\frac{21}{2}$ [解析](1)由题可得$\frac{n}{2}+1=4$,解得$n=6$,所以$T_5=C_6^4\left(\frac{1}{x}\right)^2(-2x^2)^4=240x^6$.

(2)∵$C_n^1+C_n^2=45$,∴$n=9$,$\left(\frac{1}{2x}+\sqrt{x}\right)^9$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_9^k\left(\frac{1}{2}\right)^{9-k}x^{-(9-k)}x^{\frac{k}{2}}=C_9^k2^{k-9}x^{\frac{3k-18}{2}}$,令$\frac{3k-18}{2}=0$,得$k=6$,∴展开式中的常数项为$C_9^6\cdot 2^{-3}=\frac{21}{2}$.

例3 (1)BCD (2)240 [解析](1)令$x=0$,则$a_0=1$,A选项错误;令$x=1$,则$(-1)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$,所以$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(-1)^5-a_0=-2$,B选项正确;$(1-2x)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\times1^{5-r}\times(-2x)^r$,所以$a_4=C_5^4(-2)^4=80$,C选项正确;令$x=-1$,则$3^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$,所以$a_1+a_3+a_5=\frac{1}{2}\times[a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5)]=\frac{(-1)^5-3^5}{2}=-122$,D选项正确.故选BCD.

(2)$(3x-4)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+a_3(x-1)^3+a_4(x-1)^4+a_5(x-1)^5$,对式子两边同时求导,得$15(3x-4)^4=a_1+2a_2(x-1)+3a_3(x-1)^2+4a_4(x-1)^3+5a_5(x-1)^4$,令$x=2$,得$15\times(3\times2-4)^4=a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=240$.

变式题 (1)$\frac{121}{122}$ (2)0 [解析](1)令$x=1$,得$(1+2)^5=a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=243$,令$x=-1$,得$(-1+2)^5=-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=1$,则$a_5+a_3+a_1=\frac{1}{2}\times[(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)-(-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0)]=\frac{243-1}{2}=121$,且$a_4+a_2+a_0=\frac{1}{2}\times[(a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)+(-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0)]=\frac{243+1}{2}=122$,故$\frac{a_5+a_3+a_1}{a_4+a_2+a_0}=\frac{121}{122}$.

(2)令$x=-\frac{1}{e}$,可得$0=a_0-\frac{a_1}{e}+\frac{a_2}{e^2}-\frac{a_3}{e^3}+\frac{a_4}{e^4}-\cdots-\frac{a_{2025}}{e^{2025}}$.

例4 B [解析]由题意得$x^4+(x+1)^7=[(x+2)-2]^4+[(x+2)-1]^7=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_7(x+2)^7$,故$a_3=C_4^1(-2)^1+C_7^4(-1)^4=-8+35=27$,故选B.

变式题 78 [解析]令$x=0$,可得$a_0=2$,令$x=1$,可得$2^7=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7$①,令$x=-1$,可得$2^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$②,所以由①+②可得$2(a_0+a_2+a_4+a_6)=2^5+2^7=160$,所以$2+a_2+a_4+a_6=80$,则$a_2+a_4+a_6=78$.

例5 (1)-28 (2)A [解析](1)因为$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8-\frac{y}{x}(x+y)^8$,所以$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中含$x^2y^6$的项为$C_8^6x^2y^6-\frac{y}{x}C_8^5x^3y^5=-28x^2y^6$,$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$的展开式中$x^2y^6$的系数为$-28$.

(2)5个因式中3个因式选择x,2个因式选择常数,则含x^3的项的系数是$(-4)\times5+3\times5+3\times(-4)+(-2)\times5+(-2)\times3+(-2)\times(-4)+1\times5+1\times(-4)+1\times3+1\times(-2)=-23$.故选A.

变式题 (1)D (2)C [解析](1)根据二项式定理得$(1-x)(1+2x)^4=(1-x)(1+8x+24x^2+32x^3+16x^4)$,所以$a_0=1$,$a_4x^4=-x\cdot32x^3+1\times16x^4=-16x^4$,则$a_4=-16$,所以$a_4-a_0=-16-1=-17$.故选D.

(2)由题意得$(2-1)\times(1+a)^3=27$,解得$a=2$,所以$(2-x)(1+2x)^3$的展开式中x^2的系数为$2C_3^2\times2^2-C_3^1\times2=18$.故选C.

例6 C [解析]$\left(x^3+\frac{1}{x}-1\right)^5$可看作5个$\left(x^3+\frac{1}{x}-1\right)$相乘,展开式中含$x^3$的项可由2种情况获得:从5个式子中取2个式子提供$x^3$,余下3个式子提供$\frac{1}{x}$,可得$C_5^2(x^3)^2\cdot C_3^3\left(\frac{1}{x}\right)^3=10x^3$;从5个式子中取1个式子提供$x^3$,余下4个式子提供$-1$,则可得到$C_5^1(x^3)^1\cdot C_4^4(-1)^4=5x^3$.所以$\left(x^3+\frac{1}{x}-1\right)^5$的展开式中$x^3$的系数为$10+5=15$.故选C.

变式题 (1)A (2)49 [解析](1)$(x-2y+3z)^6$相当于6个因式$(x-2y+3z)$相乘,其中1个因式取x,有C_6^1种取法,余下5个因式中有2个取$-2y$,有C_5^2种取法,最后3个因式全部取$3z$,有C_3^3种取法,故$(x-2y+3z)^6$的展开式中xy^2z^3的系数为$C_6^1\times1\times C_5^2\times(-2)^2\times C_3^3\times3^3=6480$.

(2)$\left(x+\frac{2}{x}-1\right)^4$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_4^r\left(x+\frac{2}{x}\right)^{4-r}\times(-1)^r=(-1)^rC_4^rC_{4-r}^mx^{4-r-m}\left(\frac{2}{x}\right)^m=(-1)^r2^mC_4^rC_{4-r}^mx^{4-r-2m}$,当$m=0,r=4$时,常数项为1;当$m=1,r=2$时,常数项为$(-1)^22^1C_4^2C_2^1=24$;当$m=2,r=0$时,常数项为$(-1)^02^2C_4^0C_4^2=24$.所以$\left(x+\frac{2}{x}-1\right)^4$的展开式中常数项为$1+24+24=49$.

第63讲 随机事件与概率、古典概型

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. $B\supseteq A$ $A=B$
$A\cup B=\Omega$,且$A\cap B=\varnothing$

3. (2)$\frac{m}{n}$

4. $P(A)\geqslant0$ 1 0 $P(A)+P(B)$
$1-P(A)$ $1-P(B)$ $\leqslant$
$P(A)+P(B)-P(AB)$

【对点演练】

1. $\{yy,yn,ny,nn\}$ [解析]由题意可知该试验的样本空间$W=\{yy,yn,ny,nn\}$.

2. 3件中至多有2件一级品 [解析]由题可知,"3件都是一级品"为事件A,则A的对立事件为"3件不都是一级品",即"3件中至多有2件一级品".

3. 0.58 [解析]由数表知,取到卡片号码为奇数的次数是$17+5+6+18+12=58$,所以取到卡片号码为奇数的频率为$\frac{58}{100}=0.58$.

4. ③ [解析]①中,硬币质地不均匀,不是等可能事件,所以不是古典概型;②④的样本空间的样本点不是有限个,不是古典概型;③符合古典概型的特点,是古典概型.故填③.

5. 3,2 [解析]三辆车的出车顺序的样本空间$\Omega=\{123,132,213,231,312,321\}$.按方案一乘坐到序号为3的车包含的样本点有132,213,231,共3个;按方案二乘坐到序号为3的车包含的样本点有312,321,共2个.

6. $\frac{2}{3}$ [解析]记"朝上一面的数是1,2,3"为事件C,"朝上一面的数是5"为事件D,则$A+B=C+D$,且C与D两个事件互斥,所以$P(A+B)=P(C+D)=P(C)+P(D)=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

● 课堂考点探究

例1 (1)D (2)B [解析](1)对于A,恰好有1件次品和恰好有2件次品互斥,但不是对立事件;对于B,至少有1件次品和全是次品可以同时发生,不是对立事件;对于C,至少有1件正品和至少有1件次品可以同时发生,不是对立事件;对于D,至少有1件次品即存在次品,与全是正品是对立事件.故选D.

(2)从装有红球、白球和黑球各2个的口袋内一次取出2个球,则样本空间$\Omega=\{$(红,红),(红,白),(红,黑),(白,白),(白,黑),(黑,黑)$\}$.设事件$A=$"两球都不是白球",事件$B=$"两球恰有一个白球",事件$C=$"两球至少有一个白球",事件$D=$"两球都为白球",则$A=\{$(红,红),(红,黑),(黑,黑)$\}$,$B=\{$(红,白),(白,黑)$\}$,$C=\{$(红,白),(白,白),(白,黑)$\}$,$D=\{$(白,白)$\}$,由互斥事件及对立事件的定义可知事件A、事件B与事件

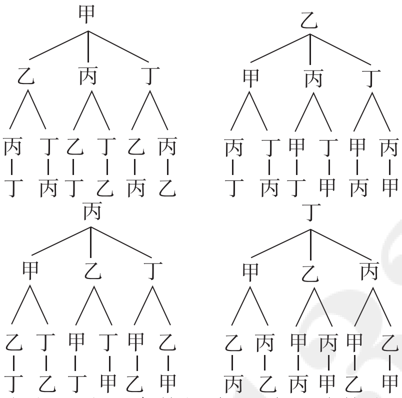
D 均是互斥而非对立的事件.故选 B.

变式题 (1)C (2)CD [解析](1)事件 A,B,C 都是随机事件,可能发生,也可能不发生,故 A 选项不正确;$A+B+C$ 不一定发生,故 B 选项不正确;A,B 可能同时发生,故 A 与 B 不是互斥事件,故 C 选项正确;B 与 C 既不是互斥事件也不是对立事件,故 D 选项不正确.故选 C.

(2)对于是否选择崇圣寺三塔与蝴蝶泉这两个景点,可能的结果有:两个景点都不选择,选择一个景点,选择两个景点.事件"至少选择其中一个景点"包括选择一个景点和选择两个景点,事件"至多选择其中一个景点"包括两个景点都不选和选择一个景点.所以事件"至少选择其中一个景点"与事件"至多选择其中一个景点"可能同时发生,故不是互斥事件,A 错误;事件"两个景点均未选择"与事件"至多选择其中一个景点"可能同时发生,故不是对立事件,B 错误;事件"只选择其中一个景点"与事件"两个景点均选择"不能同时发生,是互斥事件,C 正确;事件"两个景点均选择"与事件"至多选择其中一个景点"不能同时发生,并且必有一个发生,是对立事件,D 正确.故选 CD.

例 2 (1)D (2)B [解析](1)从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数,共有 $C_7^2=21$(种)情况,其中不互质的包括从 2,4,6,8 中取 2 个不同的数,或取 3 和 6,共有 $C_4^2+1=7$(种)情况,所以互质的共有 $21-7=14$(种)情况,所以所求概率 $P=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$.

(2)方法一:画出树状图,如图,由树状图可得,甲、乙、丙、丁四人排成一列,共有 24 种排法,其中丙不在排头,且甲或乙在排尾的排法共有 8 种,故所求概率 $P=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.故选 B.



方法二:当甲在排尾时,丙有 2 种排法,乙、丁有 $A_2^2=2$(种)排法,此时共有 $2\times2=4$(种)排法;当乙在排尾时,丙有 2 种排法,甲、丁有 $A_2^2=2$(种)排法,此时共有 $2\times2=4$(种)排法.故丙不在排头,且甲或乙在排尾共有 $4+4=8$(种)排法.根据古典概型的概率计算公式,丙不在排头,且甲或乙在排尾的概率是 $\frac{8}{A_4^4}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.故选 B.

变式题 (1)A (2)$\frac{6}{25}$ [解析](1)甲、乙从中随机抽取一个主题,共包含 36 个样本点,甲、乙抽到同一个主题包含 6 个样本点,所以甲、乙抽到不同主题的概率 $P=1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$.故选 A.

(2)把 5 人分成 3 个小组有 3,1,1 和 2,2,1 两种分法,3,1,1 的分法有 $\frac{C_5^3C_2^1C_1^1}{2}=10$(种),甲和乙在一个小组的分法有 $C_3^1=3$(种);2,2,1 的分法有 $\frac{C_5^2C_3^2}{2}=15$(种),甲和乙在一个小组的分法有 $C_3^1=3$(种).故所有的分组方法有 25 种,甲和乙在同一个小组的情况有 6 种,故所求概率 $P=\frac{6}{25}$.

例 3 (1)D (2)$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$

[解析](1)由题意,事件 $A\cap B$ 为两个点数都是奇数,事件 $A\cap B$ 的对立事件的概率为 $1-P(A\cap B)$,而事件 $A\cap B$ 的对立事件为至多有一个点数是奇数.故选 D.

(2)方法一:从袋中随机取 1 个球,记事件"取到红球""取到黑球""取到黄球""取到绿球"分别为 A,B,C,D,则事件 A,B,C,D 彼此互斥且 $A\cup B\cup C\cup D$ 为必然事件.由已知可得,$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{5}{12}$,$P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{5}{12}$,则 $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{3}$,即 $P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{2}{3}$,所以 $P(D)=\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$,$P(C)=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$,$P(B)=\frac{5}{12}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$.故从袋中随机取 1 个球,取到黑球、黄球和绿球的概率分别是 $\frac{1}{4}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{4}$.

方法二:设红球有 n 个,则 $\frac{n}{12}=\frac{1}{3}$,所以 $n=4$,即红球有 4 个.因为取到黑球或黄球的概率是 $\frac{5}{12}$,所以黑球和黄球共有 5 个,所以绿球有 $12-4-5=3$(个),又取到绿球或黄球的概率也是 $\frac{5}{12}$,所以绿球和黄球共有 5 个,而绿球有 3 个,所以黄球有 $5-3=2$(个),所以黑球有 $12-4-3-2=3$(个).因此从袋中随机取 1 个球,取到黑球、黄球和绿球的概率分别是 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$,$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$,$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

变式题 (1)0.2 (2)ABC [解析](1)由题意得 $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)]=1-(0.3+0.5)=0.2$.

(2)依题意得 $P(A_1)=0.15$,$P(A_2)=0.06$,$P(A_3)=0.04$.因为 A_0,A_1,A_2,A_3 两两互斥,所以 $P(A_0)=1-[P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)]=0.75$.对于 A,记事件 A 为"一年内需要维修",则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$,所以 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0.15+0.06+0.04=0.25$,故 A 正确;对于 B,记事件 B 为"一年内不需要维修",则 $B=A_0$,所以 $P(B)=P(A_0)=0.75$,故 B 正确;对于 C,记事件 C 为"在一年内维修不超过 1 次",则 $C=A_0\cup A_1$,所以 $P(C)=P(A_0)+P(A_1)=0.75+0.15=0.90$,故 C 正确;对于 D,记事件 D 为"一年内最多需要维修 2 次",则 $\overline{D}=A_3$,所以 $P(D)=1-P(\overline{D})=1-P(A_3)=1-0.04=0.96$,故 D 错误.故选 ABC.

第 64 讲 随机事件的相互独立性与条件概率

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. (1)$P(A)P(B)$ (2)B $\overline{B}$
2. (1)大于 0(即 $P(B)>0$) $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

(2)①1 ②$P(B|A)+P(C|A)$ ③对立事件 (3)①$\frac{n(AB)}{n(A)}$ ②$P(A)P(B|A)$ 相互独立

【对点演练】

1. 0.7 [解析]由事件 A 与 B 相互独立,得 $P(AB)=P(A)P(B)$,即 $0.6\times P(B)=0.42$,所以 $P(B)=0.7$.
2. $\frac{5}{6}$ [解析]设"甲独立地破解出该谜题"为事件 A,"乙独立地破解出该谜题"为事件 B,"该谜题被破解"为事件 C,且事件 A 与 B 相互独立,则 $P(C)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}$.
3. $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{4}$ [解析]由题意可知 $P(A)=\frac{4}{15}$,$P(B)=\frac{2}{15}$,$P(AB)=\frac{1}{10}$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{15}}=\frac{3}{8}$,$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{15}}=\frac{3}{4}$.
4. $\frac{1}{8}$ [解析]由事件 A 和事件 B 相互独立,得事件 A 和事件 $\overline{B}$ 也相互独立,所以 $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{8}$.
5. $\frac{2}{3}$ [解析]记事件 A 为"小明选择篮球",事件 B 为"小明、小红的选择不同",则 $P(A)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{1\times2}{3\times3}=\frac{2}{9}$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$.
6. $\frac{1}{5}$ [解析]设"第 1 次按对"为事件 A_1,"第 2 次按对"为事件 A_2,则不超过 2 次就按对的概率 $P=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{5}$.

● 课堂考点探究

例 1 B [解析]$P(甲)=\frac{1}{6}$,$P(乙)=\frac{1}{6}$,$P(丙)=\frac{5}{36}$,$P(丁)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$,$P(甲丙)=0\neq P(甲)P(丙)$,$P(甲丁)=\frac{1}{36}=P(甲)P(丁)$,$P(乙丙)=\frac{1}{36}\neq P(乙)P(丙)$,$P(丙丁)=0\neq P(丁)P(丙)$,故选 B.

例 2 解:(1)第一轮比赛选手的对战安排可以为$\{AB,CD\}$,$\{AC,BD\}$,$\{AD,BC\}$,故共有 3 种对战方案.

(2)设事件 M 为"选手 A 与选手 D 相遇",当对战安排为$\{AD,BC\}$时,A,D 两选手相遇的概率为 1;当对战安排为$\{AB,CD\}$时,A,D 两选手相遇的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$;当对战安排为$\{AC,BD\}$时,$A,D$ 两选手相遇的概率为 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$.抽到三种对战安排的概率均为 $\frac{1}{3}$,则

$P(M)=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{16}=\frac{23}{48}$，即选手 A 与选手 D 相遇的概率为$\frac{23}{48}$.

(3)设采用方案一、二种子选手夺冠的概率分别为 P_1,P_2. 若采用方案一，假设第一轮对战安排为$\{AC,BD\}$，第一轮比赛两种子选手获胜，则第二轮比赛种子选手一定夺冠，其概率为$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$；第一轮比赛选手 A,D 获胜，第二轮比赛 A 获胜，其概率为$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$；第一轮比赛选手 C,B 获胜，第二轮比赛 B 获胜，其概率为$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$；第一轮比赛选手 C,D 获胜，则种子选手不能夺冠. 所以 $P_1=\frac{9}{16}+\frac{9}{64}\times 2=\frac{27}{32}$. 若采用方案二，则第一轮对战安排为$\{AB,CD\}$，第一轮比赛选手 A,C 获胜，第二轮比赛 A 获胜，其概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$；第一轮比赛选手 A,D 获胜，第二轮比赛 A 获胜，其概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$；第一轮比赛选手 B,C 获胜，第二轮比赛 B 获胜，其概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$；第一轮比赛选手 B,D 获胜，第二轮比赛 B 获胜，其概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$. 所以 $P_2=\frac{3}{16}\times 4=\frac{3}{4}$. 因为 $P_1>P_2$，所以方案一种子选手夺冠的概率更大.

变式题 (1)ABD [解析] 对于 A，发送 1，0，1，收到 1，0，1 的概率分别为 $1-\beta,1-\alpha,1-\beta$，因为信号传输是相互独立的，所以由相互独立事件的概率公式得，所求概率为$(1-\alpha)(1-\beta)^2$，故 A 正确. 对于 B，采用三次传输方案，发送 1，1，1，收到 1，0，1 的概率分别为 $1-\beta,\beta,1-\beta$，由相互独立事件的概率公式得，所求概率为 $\beta(1-\beta)^2$，故 B 正确. 对于 C，采用三次传输方案，发送 1，1，1，收到的译码为 1，则收到的信号可能为(1，1，0)，(1，0，1)，(0，1，1)，(1，1，1)，故所求概率为 $3\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$，故 C 错误. 对于 D，若采用三次传输方案，发送 0，收到的译码为 0，则收到的信号可能为(0，0，0)，(0，0，1)，(0，1，0)，(1，0，0)，故所对应的概率 $P_1=3\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3$，若采用单次传输方案，发送 0，则收到信号 0 即为译码，所对应的概率 $P_2=1-\alpha$，因为 $0<\alpha<0.5$，所以 $P_1-P_2=3\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3-(1-\alpha)=(1-\alpha)^2(1+2\alpha)-(1-\alpha)=(1-\alpha)(1-2\alpha)\alpha>0$，所以 $P_1>P_2$，故 D 正确. 故选 ABD.

(2)解：①三人各自独立闯关，其中甲闯关成功的概率为$\frac{1}{2}$，甲、乙都闯关成功的概率为$\frac{2}{7}$，甲、丙都闯关成功的概率为$\frac{3}{10}$，设乙闯关成功的概率为 P_1，丙闯关成功的概率为 P_2，根据相互独立事件同时发生时的概率公式得$\begin{cases}\frac{1}{2}P_1=\frac{2}{7},\\ \frac{1}{2}P_2=\frac{3}{10},\end{cases}$

解得$\begin{cases}P_1=\frac{4}{7},\\ P_2=\frac{3}{5},\end{cases}$即乙闯关成功的概率为$\frac{4}{7}$，丙闯关成功的概率为$\frac{3}{5}$.

②团体总分为 4 分，即甲、乙、丙三人中恰有两人闯关成功，设"团体总分为 4 分"为事件 A，则 $P(A)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{4}{7}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{29}{70}$，即团体总分为 4 分的概率是$\frac{29}{70}$.

③团体总分不小于 4 分，即团体总分为 4 分或 6 分，设"团体总分不小于 4 分"为事件 B，由②可知团体总分为 4 分的概率为$\frac{29}{70}$，团体总分为 6 分，即三人闯关都成功，其概率为$\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$，则 $P(B)=\frac{29}{70}+\frac{6}{35}=\frac{41}{70}$，所以该小组参加下一轮比赛的概率为$\frac{41}{70}$.

例 3 (1)A (2)C [解析] (1)设"在该校高二年级的学生中随机调查一名学生，该学生喜欢打篮球"为事件 A，"在该校高二年级的学生中随机调查一名学生，该学生喜欢打排球"为事件 B，则 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.4$，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8$，所以 $P(AB)=0.2$，则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$.

(2)设"从 1 号箱中取到红球"为事件 A，"从 2 号箱中取到红球"为事件 B，由题意知 $P(A)=\frac{4}{2+4}=\frac{2}{3}$，$P(B|A)=\frac{3+1}{8+1}=\frac{4}{9}$，所以 $P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$. 故选 C.

变式题 (1)B (2)0.24 0.36

[解析] (1)方法一：设"第一次摸出白球"为事件 A，"第二次摸出黑球"为事件 B，则"第一次摸出黑球"为事件 $\overline{A}$. $\because P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{3}{10}$，$\therefore P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}}{\frac{3}{10}}=\frac{7}{9}$.

方法二：设"第一次摸出白球"为事件 A，"第二次摸出黑球"为事件 B，则 $n(B)=7\times 3+3\times 2=27$，$n(AB)=7\times 3=21$，$\therefore P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{21}{27}=\frac{7}{9}$. 故选 B.

(2)设"第一问做出"为事件 A，"第二问做出"为事件 B，由题意可得 $P(A)=\frac{6}{10}=0.6$，$P(B|\overline{A})=0.1$，$P(\overline{B}|A)=0.6$，则 $P(\overline{A})=0.4$，$P(\overline{B}|\overline{A})=0.9$，$P(B|A)=0.4$，所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.24$，$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=0.36$，即此题得满分的概率是 0.24，得 0 分的概率是 0.36.

第 65 讲　全概率公式及应用

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

2. $\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$

【对点演练】

1. 0.65 [解析] 设 A_1 为"第一天选择一餐厅就餐"，B_1 为"第一天选择二餐厅就餐"，A_2 为"第二天选择一餐厅就餐"，则 $P(A_1)=P(B_1)=0.5$，$P(A_2|A_1)=0.6$，$P(A_2|B_1)=0.7$，由全概率公式可知 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)=0.5\times 0.6+0.5\times 0.7=0.65$.
2. 86.4% [解析] 用 A 表示生产线初始状态良好，B 表示第一件产品为合格品，则 $P(A)=80\%$，$P(B|A)=95\%$，$P(B|\overline{A})=60\%$，所以 $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{80\%\times 95\%}{80\%\times 95\%+(1-80\%)\times 60\%}\approx 86.4\%$.
3. 0.25 [解析] 设事件 A_i 为"第 i 天去 2 楼阅读"，事件 B_i 为"第 i 天去 3 楼阅读"，$i=1,2$，则 $P(A_1)=P(B_1)=0.5$，$P(B_2|A_1)=1-0.7=0.3$，$P(B_2|B_1)=1-0.8=0.2$，所以 $P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)=0.5\times 0.3+0.5\times 0.2=0.25$.
4. $\frac{1}{5}$ [解析] 分为第一位顾客中奖和没中奖两种情况，所以第二位顾客中奖的概率为$\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{5}$.
5. 0.323 [解析] 设事件 A 为"呈阳性反应"，事件 B 为"患有此种疾病"，则 $P(A)=0.5\%\times 95\%+99.5\%\times 1\%=1.47\%$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.5\%\times 95\%}{1.47\%}\approx 0.323$，则化验结果为阳性，此人确实患有此病的概率约为 0.323.

● 课堂考点探究

例 1 (1)B (2)B [解析] (1)因为 $P(A)=0.5$，所以 $P(\overline{A})=1-0.5=0.5$，所以 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5\times P(B|A)+0.5\times 0.2=0.3$，解得 $P(B|A)=0.4$. 故选 B.

(2)由题意可得 $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{A}|\overline{B})=1-P(A|\overline{B})=\frac{1}{2}$，所以 $P(\overline{A})=P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})+P(B)P(\overline{A}|B)=\frac{1}{2}[1-P(B)]+\frac{3}{4}P(B)=\frac{2}{3}$，解得 $P(B)=\frac{2}{3}$. 故选 B.

变式题 (1)$\frac{1}{3}$ (2)$\frac{83}{192}$ [解析] (1)因为 $P(A)=\frac{1}{3}$，所以 $P(\overline{A})=\frac{2}{3}$，由全概率公式得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{3}$.

(2)由题意得 $P(A_2|A_1)=3P(A_1)=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，$P(A_2|\overline{A_1})=\frac{1}{4}$，则 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$，则 $P(A_3|A_2)=3P(A_2)=3\times\frac{7}{24}=\frac{7}{8}$，又 $P(A_3|\overline{A_2})=\frac{1}{4}$，所以 $P(A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(\overline{A_2})P(A_3|\overline{A_2})=\frac{7}{24}\times\frac{7}{8}+\left(1-\frac{7}{24}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{83}{192}$.

例 2 (1)$\frac{3}{10}$ (2)C [解析] (1)记"从乙盒中取出的是红球"为事件 B，"从甲盒中任取 2 个球"为事件 A，事件 A_1 为"从甲盒中任取 2 个球均为白球"，事件 A_2 为"从甲盒中任取 2 个球为一白一红"，$A=A_1\cup A_2$，且 A_1,A_2 互斥，所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{C_4^2}{C_5^2}\times\frac{2}{8}+\frac{C_4^1}{C_5^2}\times\frac{3}{8}=\frac{6}{10}\times\frac{2}{8}+\frac{4}{10}\times$

$\frac{3}{8}=\frac{3}{10}$.

(2)根据题意,设任取一个零部件,来自甲、乙、丙三厂的事件分别为 A,B,C,设任取一个零部件为次品为事件 D,则 $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,$P(B)=\frac{3}{10}$,$P(C)=\frac{3}{10}$,$P(D|A)=\frac{1}{20}$,$P(D|B)=\frac{1}{15}$,$P(D|C)=\frac{1}{10}$,所以 $P(D)=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{20}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{15}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{10}=0.07$,故选 C.

变式题 (1)B (2)0.825 [解析](1)设事件 A 为"发送的信号为 0",事件 B 为"接收的信号为 0",则事件 $\overline{A}$ 为"发送的信号为 1",事件 $\overline{B}$ 为"接收的信号为 1",则 $P(A)=0.5$,$P(\overline{A})=0.5$,$P(B|A)=0.9$,$P(\overline{B}|A)=0.1$,$P(B|\overline{A})=0.05$,$P(\overline{B}|\overline{A})=0.95$,所以接收的信号为 0 的概率 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5\times0.9+0.5\times0.05=0.475$,所以接收的信号为 1 的概率 $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.475=0.525$.故选 B.

(2)设事件 E 为"小明与第一代传播者接触",事件 F 为"小明与第二代传播者接触",事件 G 为"小明与第三代传播者接触",事件 D 为"小明被感染",则 $P(E)=0.5$,$P(F)=0.25$,$P(G)=0.25$,$P(D|E)=0.9$,$P(D|F)=0.8$,$P(D|G)=0.7$,所以 $P(D)=P(D|E)P(E)+P(D|F)P(F)+P(D|G)P(G)=0.9\times0.5+0.8\times0.25+0.7\times0.25=0.825$,所以所求概率为 0.825.

例 3 (1)C (2)丙 [解析](1)记"视频是'AI'合成的"为事件 A,记"鉴定结果为'AI'"为事件 B,则 $P(A)=0.001$,$P(\overline{A})=0.999$,$P(B|A)=0.98$,$P(B|\overline{A})=0.04$,由贝叶斯公式得 $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.001\times0.98}{0.001\times0.98+0.999\times0.04}\approx0.024$,故选 C.

(2)取到一件产品为正品的概率为 $0.95\times\frac{2}{2+3+5}+0.9\times\frac{3}{2+3+5}+0.8\times\frac{5}{2+3+5}=0.86$,则它是由甲厂生产的概率为 $\frac{0.95\times\frac{2}{2+3+5}}{0.86}=\frac{19}{86}$,它是由乙厂生产的概率为 $\frac{0.9\times\frac{3}{2+3+5}}{0.86}=\frac{27}{86}$,它是由丙厂生产的概率为 $\frac{0.8\times\frac{5}{2+3+5}}{0.86}=\frac{20}{43}$,因为 $\frac{20}{43}>\frac{27}{86}>\frac{19}{86}$,所以它是由丙厂生产的概率最大.

变式题 (1)B (2)D [解析](1)记事件 A 为"从剩下的 9 箱中随机打开 2 箱,结果是 1 箱语文书、1 箱数学书",记事件 B_1 为"丢失的一箱是语文书",事件 B_2 为"丢失的一箱是数学书",事件 B_3 为"丢失的一箱是英语书",则 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{2}\times\frac{4\times3}{C_9^2}+\frac{3}{10}\times\frac{5\times2}{C_9^2}+\frac{1}{5}\times\frac{5\times3}{C_9^2}=\frac{1}{3}$,由贝叶斯公式可得 $P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{1}{4}$.故选 B.

(2)设事件 M 为"此人参加户外极限运动",事件 R 为"此人来自 A 地区",事件 S 为"此人来自 B 地区".依题意,$P(R)=\frac{2}{5}$,$P(S)=\frac{3}{5}$,$P(M|R)=\frac{3}{100}$,$P(M|S)=\frac{8}{100}$,则 $p_1=P(M)=P(MR)+P(MS)=P(M|R)P(R)+P(M|S)P(S)=\frac{3}{100}\times\frac{2}{5}+\frac{8}{100}\times\frac{3}{5}=\frac{30}{500}=\frac{3}{50}$,$p_2=P(R|M)=\frac{P(RM)}{P(M)}=\frac{P(M|R)P(R)}{P(M)}=\frac{\frac{3}{100}\times\frac{2}{5}}{\frac{3}{50}}=\frac{1}{5}$.故选 D.

例 4 解:(1)记事件 A 为"从这批产品中任取一件为一级品",则 $P(A)=0.8$,$P(\overline{A})=0.2$,记事件 B_n 为"使用零件 n 次,没有发生故障",则 $P(B_n|A)=1$,$P(B_n|\overline{A})=0.9^n$,则 $P(B_3)=P(B_3|A)P(A)+P(B_3|\overline{A})P(\overline{A})=1\times0.8+0.9^3\times0.2=0.8+0.145\ 8=0.945\ 8$,

所以 $P(A|B_3)=\frac{P(AB_3)}{P(B_3)}=\frac{P(B_3|A)P(A)}{P(B_3)}=\frac{1\times0.8}{0.945\ 8}=\frac{4000}{4729}$.

(2)依题意 X 的所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=P(B_2|A)P(A)+P(B_2|\overline{A})P(\overline{A})=1\times0.8+0.9^2\times0.2=0.962$,

$P(X=1)=P(\overline{A}\,\overline{B}_1)[P(A)+P(\overline{A}B_1)]+P[\overline{A}(B_1\overline{B}_2)]=P(\overline{B}_1|\overline{A})P(\overline{A})[P(A)+P(B_1|\overline{A})P(\overline{A})]+P[(B_1\overline{B}_2)|\overline{A}]P(\overline{A})=0.1\times0.2\times(0.8+0.9\times0.2)+0.9\times0.1\times0.2=0.037\ 6$,$P(X=2)=[P(\overline{A}\,\overline{B}_1)]^2=(0.2\times0.1)^2=0.000\ 4$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.962	0.037 6	0.000 4

所以 $E(X)=0\times0.962+1\times0.037\ 6+2\times0.000\ 4=0.038\ 4$.

变式题 解:(1)设事件 A_i 为"奖品在第 i 号箱子里($i=1,2,3$)",事件 B 为"主持人打开 3 号箱",由全概率公式,得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times0=\frac{1}{2}$.

(2)$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{1}{3}$,$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{2}{3}$,

因为 $P(A_1|B)<P(A_2|B)$,

所以建议抽奖人改选 2 号箱.

增分微课 9 利用数列递推关系解决概率问题

例 1 解:(1)记该顾客第 $i(i\in\mathbf{N}^*)$ 次摸球抽中奖品为事件 A_i.依题意知 $P_1=\frac{2}{7}$,

$P_2=P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{2}{7}\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{7}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{19}{42}$.当 $n\geqslant2$ 时,$P(A_n|A_{n-1})=\frac{1}{3}$,$P(A_n|\overline{A_{n-1}})=\frac{1}{2}$,$P_n=P(A_n)$,且 $P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(\overline{A_{n-1}})P(A_n|\overline{A_{n-1}})$,即 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{2}(1-P_{n-1})=-\frac{1}{6}P_{n-1}+\frac{1}{2}(n\geqslant2)$,所以 $P_n-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(P_{n-1}-\frac{3}{7}\right)(n\geqslant2)$,又因为 $P_1-\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}$,所以数列 $\left\{P_n-\frac{3}{7}\right\}$ 是首项为 $-\frac{1}{7}$,公比为 $-\frac{1}{6}$ 的等比数列,

所以 $P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

(2)当 n 为奇数时,$P_n=\frac{3}{7}-\frac{1}{7\times6^{n-1}}<\frac{3}{7}$.当 n 为偶数时,$P_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{7\times6^{n-1}}$,此时 P_n 随着 n 的增大而减小,所以 $P_n\leqslant P_2=\frac{19}{42}$.综上,该顾客第二次摸球抽中奖品的概率最大.

变式题 解:(1)依题意,每一个顶点有 3 个相邻的顶点,其中两个在同一底面,所以当点 Q 在下底面时,随机移动一次仍在下底面的概率为 $\frac{2}{3}$,当点 Q 在上底面时,随机移动一次回到下底面的概率为 $\frac{1}{3}$,所以 $P_1=\frac{2}{3}$,$P_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$.

(2) $P_{n+1}=\frac{2}{3}P_n+\frac{1}{3}(1-P_n)=\frac{1}{3}P_n+\frac{1}{3}$,所以 $P_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}P_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$,又因为 $P_1=\frac{2}{3}$,所以 $P_1-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\neq0$,所以数列 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为首项,$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列,所以 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2\times3^n}$,则 $P_n=\frac{1}{2\times3^n}+\frac{1}{2}$,

若 $P_n>\frac{1013}{2024}$,则 $\frac{1}{2\times3^n}+\frac{1}{2}>\frac{1013}{2024}$,所以 $3^n<1012$,又 $3^6=729$,$3^7=2187$,$n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n\leqslant6$,故 n 的最大值为 6.

例 2 解:(1)"跳子"开始在第 1 格为必然事件,则 $P_1=1$;第一次掷硬币出现反面,"跳子"前进到第 2 格,其概率为 $\frac{1}{2}$,即 $P_2=\frac{1}{2}$;第一次掷硬币出现正面或前两次掷硬币均出现反面,"跳子"前进到第 3 格,其概率为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,即 $P_3=\frac{3}{4}$.

(2)(i)证明:由(1)知,$P_1=1$,$P_2=\frac{1}{2}$.

"跳子"前进到第 $n(3\leqslant n\leqslant9)$ 格的情况是下面两种,而且只有两种:

①"跳子"先到第 $n-2$ 格,掷硬币掷出正面,其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-2}$;

②"跳子"先到第 $n-1$ 格,掷硬币掷出反面,其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.$\therefore P_n=\frac{1}{2}P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$,则 $P_n-P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_{n-1}-$

P_{n-2})，又 $P_2-P_1=-\frac{1}{2}\neq 0$，∴数列 $\{P_n-P_{n-1}\}$（$2\leqslant n\leqslant 9$）是以 $-\frac{1}{2}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(ii)由(i)得，$P_n-P_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$（$2\leqslant n\leqslant 9$），∴$P_n=(P_n-P_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2})+\cdots+(P_2-P_1)+P_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$（$2\leqslant n\leqslant 9$），∴$P_8=\frac{2}{3}\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{8}\right]=\frac{85}{128}$，

∴$P_{10}=\frac{1}{2}P_8=\frac{85}{256}$.

变式题 解：(1)甲每轮游戏的积分可能为0分、1分、2分，记其每轮积分为0分、1分、2分的概率分别为 $P'(0)$，$P'(1)$，$P'(2)$，则 $P'(0)=\frac{1}{2}$，$P'(1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，$P'(2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. 经过4轮游戏，甲的累计积分为4分的所有可能情况如下：4轮中甲掷2轮，且每轮积分均为2分；甲掷3轮，且3轮的积分情况为2，1，1；甲掷4轮，且每轮积分均为1分. 所以经过4轮游戏，甲的累计积分为4分的概率 $P=C_4^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_4^1C_3^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_4^4\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{289}{1296}$.

(2)(i)证明：记"累计积分之和为 $n+2$"为事件 A_{n+2}，"累计积分之和为 $n+1$"为事件 A_{n+1}，"累计积分之和为 n"为事件 A_n，则 $P(n+2)=P(A_n)P(A_{n+2}|A_n)+P(A_{n+1})P(A_{n+2}|A_{n+1})=\frac{2}{3}P(n)+\frac{1}{3}P(n+1)$，则 $P(n+2)-P(n+1)=-\frac{2}{3}[P(n+1)-P(n)]$，又 $P(1)=\frac{1}{3}$，$P(2)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$，$P(2)-P(1)=\frac{4}{9}\neq 0$，所以 $\{P(n+1)-P(n)\}$ 是首项为 $\frac{4}{9}$，公比为 $-\frac{2}{3}$ 的等比数列.

(ii)由(i)得，当 $n\geqslant 2$ 时，$P(n)-P(n-1)=\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$，$P(n-1)-P(n-2)=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，…，$P(2)-P(1)=\frac{4}{9}$，累加得 $P(n)-P(1)=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$，因此 $P(n)=\frac{3}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$（$n\geqslant 2$），当 $n\geqslant 5$ 且 n 为奇数时，$P(n)=\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ 是递增的，且 $P(n)<\frac{3}{5}$，当 $n\geqslant 5$ 且 n 为偶数时，$P(n)=\frac{3}{5}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ 是递减的，且 $P(n)>\frac{3}{5}$，则当 $n=6$ 时，$P(n)$ 最大，所以甲选择6分对自己最有利.

例3 解：(1)由题知，随机变量 X 的所有可能取值为1，2，3，$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^1}{\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_3^1\cdot 2}{\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，$P(X=3)=\frac{1}{\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{A_3^3}}=\frac{1}{15}$，所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$

所以 $E(X)=1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{1}{15}=\frac{23}{15}$.

(2)证明：不妨令绳头编号为1，2，3，4，…，$2n$，其中1，2是同一根绳子的两个绳头，若这 n 根绳子打结后恰好能围成一个圈，则与绳头1打结的绳头有 $(2n-2)$ 种可能，假设绳头1与绳头3打结，那么相当于对剩下 $(n-1)$ 根绳子进行打结. 设 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 根绳子打结后可围成一个圈的打结方法有 a_n 种，经过一次打结后，剩下 $(n-1)$ 根绳子打结后可围成一个圈的打结方法有 a_{n-1} 种，由此可得，$a_n=(2n-2)a_{n-1}$，$n\geqslant 2$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2n-2$，以此类推得 $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=2n-4$，…，$\frac{a_2}{a_1}=2$，所以 $\frac{a_n}{a_1}=(2n-2)\times(2n-4)\times\cdots\times 2=2^{n-1}\cdot(n-1)!$（$n\geqslant 2$），又 $a_1=1$，所以 $a_n=2^{n-1}\cdot(n-1)!$（$n\geqslant 2$）. 当 $n=1$ 时，也满足上式，所以 $a_n=2^{n-1}\cdot(n-1)!$.

在 $2n$ 个绳头中任意取2个绳头打结，共有 $N=\frac{C_{2n}^2C_{2n-2}^2C_{2n-4}^2\cdot\cdots\cdot C_2^2}{n!}=\frac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times 2\times 1}{2^n\cdot n!}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$（种）打结方法，所以所求概率 $P=\frac{a_n}{N}=\frac{2^{n-1}\cdot(n-1)!}{\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}}=\frac{2^{2n-1}\cdot n!\,(n-1)!}{(2n)!}$.

变式题 $\frac{3}{5}$　$\frac{27}{5005}$　[解析] 从 $2n$ 张卡片中选取3张卡片的选法共有 C_{2n}^3 种，手中这3张卡片中含有2张相同卡片的选法有 $n(2n-2)$ 种，由古典概型的概率计算公式可得手中这3张卡片中含有2张相同卡片的概率为 $\frac{n(2n-2)}{C_{2n}^3}=\frac{3}{2n-1}$. 书包中 $2n$ 张卡片全部被拿走的概率为 P_n，将2张相同的卡片拿掉以后，相当于从 $n-1$ 对卡片中已拿出一张卡片，事件"书包中 $2n$ 张卡片全部被拿走"发生需保证事件"书包中 $2n-2$ 张卡片全部被拿走"发生，且书包中 $2n-2$ 张卡片全部被拿走的概率为 P_{n-1}，因而 $P_n=\frac{3}{2n-1}P_{n-1}$，且 $P_2=1$，则 $P_3=\frac{3}{2\times 3-1}P_2=\frac{3}{5}$，$P_7=\frac{3}{13}\times\frac{3}{11}\times\frac{3}{9}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{27}{5005}$.

第66讲　离散型随机变量的分布列、数字特征

● 课前基础巩固

【知识聚焦】

1. 唯一确定
2. $P(X=x_k)=p_k$　概率分布　分布列
3. ②1
4. (1)$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$　平均取值
(2)$[x_1-E(X)]^2p_1+[x_2-E(X)]^2p_2+\cdots+[x_n-E(X)]^2p_n$
离散程度　标准差
(3)①$aE(X)+b$　②$a^2D(X)$

【对点演练】

1. 0.2　[解析] 由离散型随机变量分布列的性质以及已知条件得 $\begin{cases}m+n+0.2=1,\\ m+2n=1.2,\end{cases}$ 解得 $m=n=0.4$，因此 $m-\frac{n}{2}=0.2$.
2. $\frac{1}{3}$　[解析] 由题意可知 $P(X=1)=a$，则 $P(X=0)+P(X=1)=2a+a=1$，解得 $a=\frac{1}{3}$.
3. 10.4　[解析] 因为 $E(X)=1\times 0.1+2\times 0.3+3\times 0.4+4\times 0.1+5\times 0.1=2.8$，所以 $E(3X+2)=3E(X)+2=3\times 2.8+2=10.4$.
4. 1，2，3，4，5，6，7　[解析] 因为取到白球时停止操作，所以最少取球次数为1，即第一次就取到了白球；最多取球次数是7，即把所有的黑球取完之后才取到白球. 所以随机变量 X 的可能取值为1，2，3，4，5，6，7.
5. $\frac{3}{7}$　[解析] 因为随机变量 X 的概率分布为 $P(X=i)=\frac{k}{2^i}$（$i=1,2,3$），所以 $\frac{k}{2^1}+\frac{k}{2^2}+\frac{k}{2^3}=1$，解得 $k=\frac{8}{7}$，所以 $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{\frac{8}{7}}{4}+\frac{\frac{8}{7}}{8}=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.
6. $\frac{1}{2}$　$\frac{11}{16}$　[解析] 由题意知 $2c^2+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}c=1$，即 $2c^2+c-1=0$，即 $(2c-1)(c+1)=0$，解得 $c=\frac{1}{2}$ 或 $c=-1$，由 $c>0$，得 $c=\frac{1}{2}$. $E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，又 $E(X^2)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$，所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$.
7. 0.064　0.096　[解析] 当 $X=0$ 时，表示前三次都没有命中，第四次还要射击，但结果不计，所以 $P(X=0)=0.4^3=0.064$. 当 $X=1$ 时，表示前两次都没有命中，第三次命中，所以 $P(X=1)=0.6\times 0.4^2=0.096$.

● 课堂考点探究

例1 (1)C　(2)B　[解析] (1)由分布列可知 $a+c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，故 $P(|X|=1)=P(X=1)+P(X=-1)=a+c=\frac{2}{3}$，故选C.

(2)由分布列知 $P(X\leqslant -2)=0.2+0.1=0.3$，$P(X\leqslant 0)=0.2+0.1+0.2=0.5$，∴当 $m\in(-2,0]$ 时，$P(X<m)=$

0.3,即 m 的取值范围为$(-2,0]$.故选 B.

变式题 (1)0.6 (2)$\frac{3}{10}$ [解析](1)因为随机变量 X 服从参数为 p 的两点分布,且 $P(X=1)-P(X=0)=0.2$,所以 $\begin{cases}P(X=1)-P(X=0)=0.2,\\P(X=1)+P(X=0)=1,\end{cases}$ 解得 $P(X=1)=0.6$,所以 $p=0.6$.

(2)∵随机变量 X 的概率分布为 $P(X=k)=\frac{m}{k(k+1)}(k=1,2,3,4,5)$,∴$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=m\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}\right)=1$,解得 $m=\frac{6}{5}$,∴$P\left(\frac{3}{2}<X<\frac{7}{2}\right)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{6}{5}\times\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}\right)=\frac{3}{10}$.

例 2 (1)D (2)C [解析](1)由分布列可得 $E(X)=0.4a+0.2(a+1)+0.4(a+2)=a+1$,$D(X)=0.4(a-a-1)^2+0.2(a+1-a-1)^2+0.4(a+2-a-1)^2=0.8$,故选 D.

(2)根据题意可得,$E(X)=\frac{0+a+1}{3}=\frac{a+1}{3}$,则 $D(X)=\left(0-\frac{a+1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(a-\frac{a+1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{a+1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2a^2-2a+2}{9}=\frac{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}{9}$,所以当 a 在$(0,1)$内逐渐减小时,$D(X)$先减小后增大.故选 C.

变式题 (1)A (2)ABD [解析](1)XY 的分布列为

XY	1	2	4
P	$p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$	$p(1-p)$

$E(XY)=1\times p(1-p)+2\times[p^2+(1-p)^2]+4\times p(1-p)=-p^2+p+2$,$E(X)=2-p$,$E(Y)=p+1$,则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-p^2+p+2-(2-p)(1+p)=0$.故选 A.

(2)由分布列的性质可得 $\frac{1}{6}+a+b=1$,得 $a+b=\frac{5}{6}$①.因为 $E(X)=0\times a+1\times b+2\times\frac{1}{6}=1$,所以 $b=\frac{2}{3}$②,由①②得 $a=\frac{1}{6}$,所以 $D(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{6}+(1-1)^2\times\frac{2}{3}+(2-1)^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.因为 $Y=2X-1$,所以 $E(Y)=2E(X)-1=1$,$D(Y)=4D(X)=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.故选 ABD.

例 3 解:(1)一轮比赛中,甲的得分 X 的所有可能取值为$-1,0,1$,$P(X=-1)=(1-60\%)\times50\%=\frac{1}{5}$,$P(X=0)=60\%\times50\%+(1-60\%)\times(1-50\%)=\frac{1}{2}$,$P(X=1)=(1-50\%)\times60\%=\frac{3}{10}$,则 X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$

(2)甲在两轮比赛中的得分 Y 的所有可能取值为$-2,-1,0,1,2$,$P(Y=2)=P(X=1)\cdot P(X=1)=\frac{9}{100}$,$P(Y=1)=C_2^1\cdot P(X=1)\cdot P(X=0)=\frac{3}{10}$,$P(Y=0)=C_2^1\cdot P(X=-1)\cdot P(X=1)+P(X=0)\cdot P(X=0)=\frac{37}{100}$,$P(Y=-1)=C_2^1\cdot P(X=-1)\cdot P(X=0)=\frac{1}{5}$,$P(Y=-2)=P(X=-1)\cdot P(X=-1)=\frac{1}{25}$,所以在两轮比赛中,甲的得分 Y 的均值 $E(Y)=2\times\frac{9}{100}+1\times\frac{3}{10}+0\times\frac{37}{100}+(-1)\times\frac{1}{5}+(-2)\times\frac{1}{25}=\frac{1}{5}$,方差 $D(Y)=\left(2-\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{9}{100}+\left(1-\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{3}{10}+\left(0-\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{37}{100}+\left(-1-\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}+\left(-2-\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{1}{25}=\frac{49}{50}$.

变式题 解:(1)记事件 A 为"员工所获得的红包数额不低于 90 元",事件 B 为"取到所标面值为 60 元的球",因为袋中的球中有 2 个所标面值为 40 元,1 个为 50 元,1 个为 60 元,且 $40+50\geqslant90$,$40+60\geqslant90$,$50+60\geqslant90$,所以 $P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1+C_2^2}{C_4^2}=\frac{5}{6}$,又 $P(AB)=\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{5}$.

(2)设 X 为员工所获得的红包数额,则 X 的所有可能取值为 80,90,100,110,所以 $P(X=80)=\frac{1}{C_5^4}=\frac{1}{5}$,$P(X=90)=\frac{1}{C_5^4}=\frac{1}{5}$,$P(X=100)=\frac{2}{C_5^4}=\frac{2}{5}$,$P(X=110)=\frac{1}{C_5^4}=\frac{1}{5}$,所以 $E(X)=80\times\frac{1}{5}+90\times\frac{1}{5}+100\times\frac{2}{5}+110\times\frac{1}{5}=96$,$D(X)=(80-96)^2\times\frac{1}{5}+(90-96)^2\times\frac{1}{5}+(100-96)^2\times\frac{2}{5}+(110-96)^2\times\frac{1}{5}=104$.

例 4 解:(1)若甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分,则甲在第一阶段比赛中至少投中 1 次,乙在第二阶段比赛中也至少投中 1 次,∴甲、乙所在队比赛成绩不少于 5 分的概率 $P=(1-0.6^3)\times(1-0.5^3)=0.686$.

(2)(i)若甲参加第一阶段比赛,则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率 $P_{甲}=[1-(1-p)^3]q^3$,若乙参加第一阶段比赛,则甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率 $P_{乙}=[1-(1-q)^3]p^3$.

$P_{甲}-P_{乙}=q^3-(q-pq)^3-p^3+(p-pq)^3=3pq(p-q)(pq-p-q)$,∵$0<p<q<1$,∴$pq>0$,$p-q<0$,$pq-p-q<0$,∴$P_{甲}-P_{乙}>0$,得 $P_{甲}>P_{乙}$,∴应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii)若甲参加第一阶段比赛,记甲、乙所在队的比赛成绩为 X,则 X 的所有可能取值为 0,5,10,15,$P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3]\cdot(1-q)^3$,$P(X=5)=[1-(1-p)^3]C_3^1q\cdot(1-q)^2$,$P(X=10)=[1-(1-p)^3]C_3^2q^2\cdot(1-q)$,$P(X=15)=[1-(1-p)^3]\cdot q^3$,

∴$E(X)=15[1-(1-p)^3]q=15(p^3-3p^2+3p)\cdot q$.若乙参加第一阶段比赛,记甲、乙所在队的比赛成绩为 Y,则 Y 的所有可能取值为 0,5,10,15,同理可得 $E(Y)=15(q^3-3q^2+3q)\cdot p$.

∵$E(X)-E(Y)=15pq(p-q)(p+q-3)>0$,∴应该由甲参加第一阶段比赛.

变式题 解:(1)用事件 M 表示"学生甲答此题得 6 分",即对于选项 A,C 作出正确的判断,且对于选项 B,D 作出正确的判断或判断不了,所以 $P(M)=0.8\times(0.7+0.1)\times0.6\times(0.5+0.3)=0.307\ 2$.

(2)①记 X 为"从四个选项中随机选择一个选项的得分",则 $P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{C_4^1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{C_4^1}=\frac{3}{8}$,$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1}{C_4^1}=\frac{3}{8}$.

②对于方案Ⅰ:记 Y 为"从四个选项中随机选择一个选项的得分",则 Y 的所有可能取值为 0,2,3,则 $P(Y=0)=p\times\frac{2}{C_4^1}+(1-p)\times\frac{1}{C_4^1}=\frac{1+p}{4}$,$P(Y=2)=(1-p)\times\frac{C_3^1}{C_4^1}=\frac{3}{4}(1-p)$,$P(Y=3)=p\times\frac{C_2^1}{C_4^1}=\frac{1}{2}p$,所以 $E(Y)=0\times\frac{1+p}{4}+2\times\frac{3}{4}(1-p)+3\times\frac{1}{2}p=\frac{3}{2}$.

对于方案Ⅱ:记 Z 为"从四个选项中随机选择两个选项的得分",则 Z 的所有可能取值为 0,4,6,则 $P(Z=0)=p\times\frac{C_4^2-1}{C_4^2}+(1-p)\times\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}$,$P(Z=4)=(1-p)\times\frac{C_4^2-C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}(1-p)$,$P(Z=6)=p\times\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}p$,

所以 $E(Z)=0\times\left(\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}\right)+4\times\frac{1}{2}(1-p)+6\times\frac{1}{6}p=2-p$.

要使唯独选择方案Ⅰ最好,

则 $\begin{cases}2-p<\frac{3}{2},\\0<p<1,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<p<1$,故 p 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

第 67 讲 二项分布与超几何分布、正态分布

● **课前基础巩固**

【知识聚焦】

2. (1)$C_n^kp^kq^{n-k}$ $X\sim B(n,p)$
   (2)np $np(1-p)$
3. (1)$\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$
4. (1)面积 正态分布 (2)①$x=\mu$
   ②$x=\mu$ (3)μ σ^2
   (4)68.3% 95.4% 99.7%

【对点演练】

1. 6 [解析]由随机变量 X 服从正态分布 $N(4,3)$,得 $\mu=4$,$\sigma^2=3$,又 $P(X<a-5)=P(X>a+1)$,所以 $a-5+a+1=8$,解得 $a=6$.
2. $\frac{3}{7}$ [解析]∵该班有 50 名学生,∴从该班中任选 2 名学生共有 C_{50}^2 种不同的选法,∵15 人选修 A 课程,另外 35 人选修 B 课程,∴2 名学生选修不同课程的选法有 $C_{15}^1C_{35}^1$ 种,故从该班中任选 2 名学

生,他们选修不同课程的概率 $P=\frac{C_{15}^{1}C_{35}^{1}}{C_{50}^{2}}=\frac{3}{7}$.

3. $\frac{7}{8}$ [解析] 因为是有放回地取产品,所以每次取到次品的概率为 $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.任取3次,X 表示取得次品的次数,则 $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$,所以 $P(X\leqslant 2)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$.

4. ③ [解析] 将一枚硬币连抛3次,记正面向上的次数为 X,则 X 服从参数为3,$\frac{1}{2}$ 的二项分布,①不满足题意;某射手的射击命中率为0.8,现对目标射击1次,记命中的次数为 X,则 X 服从参数为0.8的两点分布,②不满足题意;从7男3女共10名学生干部中选出5名学生干部,记选出女生的人数为 X,则 X 服从参数为10,5,3的超几何分布,③满足题意;盒中有4个白球和3个黑球,每次从中随机摸出1个球且不放回,记第一次摸出黑球时摸取的次数为 X,则 X 不服从超几何分布,④不满足题意.故填③.

5. 0.14 [解析] 因为 $X\sim N(2,\sigma^2)$,所以 $P(X<2)=P(X>2)=0.5$,因此 $P(X>2.5)=P(X>2)-P(2<X\leqslant 2.5)=0.5-0.36=0.14$.

6. $\frac{4}{25}$ $\frac{1}{10}$ [解析] 若采取放回简单随机抽样,则每次摸出的1个球是白球的概率为 $\frac{2}{5}$,所以摸出的2个球都是白球的概率 $P_1=C_2^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$.若采取不放回简单随机抽样,则摸出的2个球都是白球的概率 $P_2=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$.

● 课堂考点探究

例1 (1)A [解析] 从袋子中一次性摸出两个球,共有 $C_5^2=10$(种)摸法,摸出的两个号码的和为偶数的有{1,3},{1,5},{2,4},{3,5},共4种情况,所以1个人摸球,能够获奖的概率为 $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$,所以4人参与摸球,恰有2人获奖的概率 $P=C_4^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$.故选A.

(2)解:①设从该批零件中任取1个是合格品的概率为 p,事件 A 表示"取出的3个零件中至多有2个是合格品",所以 $P(A)=1-p^3=\frac{511}{512}$,

所以 $p^3=\frac{1}{512}$,解得 $p=\frac{1}{8}$.

②设这4个零件中合格品的个数为 Y,由题可知 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{8}\right)$,因为 $X=10Y+(-1)(4-Y)=11Y-4$,所以 $P(X=-4)=P(Y=0)=C_4^0\times\left(\frac{1}{8}\right)^0\times\left(1-\frac{1}{8}\right)^4=\frac{2401}{4096}$,$P(X=7)=P(Y=1)=C_4^1\times\left(\frac{1}{8}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{8}\right)^3=\frac{343}{1024}$,

$P(X=18)=P(Y=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{147}{2048}$,$P(X=29)=P(Y=3)=C_4^3\times\left(\frac{1}{8}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{1024}$,

$P(X=40)=P(Y=4)=C_4^4\times\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{1}{4096}$,所以 X 的分布列为

X	-4	7	18	29	40
P	$\frac{2401}{4096}$	$\frac{343}{1024}$	$\frac{147}{2048}$	$\frac{7}{1024}$	$\frac{1}{4096}$

所以 $E(X)=(-4)\times\frac{2401}{4096}+7\times\frac{343}{1024}+18\times\frac{147}{2048}+29\times\frac{7}{1024}+40\times\frac{1}{4096}=\frac{3}{2}$ $\left(\text{或 } E(X)=E(11Y-4)=11E(Y)-4=11\times4\times\frac{1}{8}-4=\frac{3}{2}\right)$.

变式题 (1)ACD [解析] 设事件 A 为"向右下落",则事件 $\overline{A}$ 为"向左下落",$P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$,易知小球最后落入格子的号码 X 与事件 A 发生的次数有关,设事件 A 发生的次数为 Y,则 $X=Y$,因为小球下落的过程中共碰撞小木钉5次,所以 $Y\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$.对于A,$P(X=0)=P(Y=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$,故A正确;对于B,$P(X=5)=P(Y=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$,故B错误;对于C,$E(X)=E(Y)=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,故C正确;对于D,$D(X)=D(Y)=5\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$,故D正确.故选ACD.

(2)解:①记"射击1次获得'优秀射击手'称号"为事件 A,"射击1次获得一等奖"为事件 B,"射击1次获得二等奖"为事件 C,则 $A=B\cup C$,且 B,C 互斥,$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(C)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,所以 $P(A)=P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$.

②由题得 X 的所有可能取值为0,1,2,3,4.记"射击1次获得三等奖"为事件 D,则 $P(D)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,所以 $P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$,

$P(X=1)=C_4^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$,

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$,$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$,

$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}$,所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

显然 $X\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$,则 $E(X)=4\times\frac{1}{4}=1$.

例2 解:(1)根据三人投篮得分统计数据,在10场比赛中,甲共获胜3场,分别是第3场、第8场、第10场.用 A 表示"从10场比赛中随机选择一场,甲获胜",则 $P(A)=\frac{3}{10}$.

(2)根据三人投篮得分统计数据,在10场比赛中,甲得分不低于10分的场次有6场,分别是第2场、第3场、第5场、第8场、第9场、第10场,其中乙得分大于丙得分的场次有4场,分别是第2场、第5场、第8场、第9场,所以 X 的所有可能取值为0,1,2.$P(X=0)=\frac{C_2^2C_4^0}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,$P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_4^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_2^0C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$.所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3}$.

(3)由题意,每场比赛甲获胜的概率为 $\frac{3}{10}$,乙获胜的概率为 $\frac{1}{2}$,丙获胜的概率为 $\frac{1}{5}$.由甲、乙、丙还需要进行6场比赛,得甲、乙、丙获胜的场数服从二项分布,即 $Y_1\sim B\left(6,\frac{3}{10}\right)$,$Y_2\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$,$Y_3\sim B\left(6,\frac{1}{5}\right)$,所以 $D(Y_1)=6\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{63}{50}$,$D(Y_2)=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,$D(Y_3)=6\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$,

故 $D(Y_2)>D(Y_1)>D(Y_3)$.

变式题 解:(1)设"有女教师参加活动"为事件 A,"恰有一名女教师参加活动"为事件 B,则 $P(AB)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(A)=\frac{C_4^1C_2^1+C_2^2}{C_6^2}=\frac{3}{5}$,所以 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{3}{5}}=\frac{8}{9}$.

(2)依题意知 X 服从参数为6,2,2的超几何分布,且 $P(X=k)=\frac{C_2^kC_4^{2-k}}{C_6^2}(k=0,1,2)$,$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{2}{5}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$,$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$,所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$.

(3)设一名女教师参加活动可获得分数为 X_1,一名男教师参加活动可获得分数为 X_2,则 X_1 的所有可能取值为3,6,X_2 的所有可能取值为6,9,$P(X_1=3)=P(X_1=6)=\frac{1}{2}$,$E(X_1)=3\times\frac{1}{2}+6\times$

$\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$，$P(X_2=6)=P(X_2=9)=\frac{1}{2}$，

$E(X_2)=6\times\frac{1}{2}+9\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$.

有 X 名女教师参加活动，则有 $2-X$ 名男教师参加活动，故 $Y=\frac{9}{2}X+\frac{15}{2}(2-X)=15-3X$，所以 $E(Y)=E(15-3X)=15-3E(X)=15-3\times\frac{2}{3}=13$.

例 3 (1)C ［解析］对于 A，随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,6^2)$，所以随机变量 X 的方差为 $\sigma^2=6^2$，即 $D(X)=36$，所以 A 错误；对于 B，根据给定的正态曲线，可得 $\mu_1=30$，$\mu_2=34$，所以 $\mu_1<\mu_2$，所以 B 错误；对于 C，根据正态曲线，可得当 $X\leqslant 38$ 时，随机变量 X 对应的曲线与 x 轴围成的图形面积小于当 $Y\leqslant 38$ 时随机变量 Y 对应的曲线与 x 轴围成的图形面积，所以 $P(X\leqslant 38)<P(Y\leqslant 38)$，所以 C 正确；对于 D，根据正态曲线，可得 $P(X\leqslant 34)>\frac{1}{2}$，$P(Y\leqslant 34)=\frac{1}{2}$，所以 $P(X\leqslant 34)>P(Y\leqslant 34)$，所以 D 错误. 故选 C.

(2)解：①抽取的 200 名考生数学成绩的方差 $s^2=(80-110)^2\times 0.02+(90-110)^2\times 0.09+(100-110)^2\times 0.22+(110-110)^2\times 0.33+(120-110)^2\times 0.24+(130-110)^2\times 0.08+(140-110)^2\times 0.02=150$. 故估计这 20 000 名优秀考生数学成绩的方差为 150，标准差 $s=\sqrt{150}=5\sqrt{6}\approx 5\times 2.4=12$.

②由①知 $\mu=\bar{x}=110$，$\sigma^2=s^2=150$，故 $X\sim N(110,150)$，$\sigma\approx 12$. 又 $P(\mu+\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times[P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)]\approx\frac{1}{2}\times(0.954-0.683)=0.135\ 5$，

所以 $P(122<X\leqslant 134)\approx 0.135\ 5$.

又 $Y=5X-10$，所以 $P(600<Y\leqslant 660)=P(600<5X-10\leqslant 660)=P(122<X\leqslant 134)\approx 0.135\ 5$. 故这 20 000 名优秀考生中总成绩在 $(600,660]$ 内的人数约为 $20\ 000\times 0.135\ 5=2710$.

变式题 (1)BC (2)ABD ［解析］(1)由题可知 $X\sim N(1.8,0.1^2)$，$Y\sim N(2.1,0.1^2)$. 对于 A，$P(X>2)=P(X>\mu+2\sigma)<P(X>\mu+\sigma)\approx 1-0.841\ 3=0.158\ 7$，故 A 错误；对于 B，$P(X>2)<P(X>1.8)=0.5$，故 B 正确；对于 C，$P(Y>2)>P(Y>2.1)=0.5$，故 C 正确；对于 D，$P(Y>2)=P(Y>\mu-\sigma)=P(Y<\mu+\sigma)\approx 0.841\ 3>0.8$，故 D 错误. 故选 BC.

(2)由题意可知，$\mu=100$，$\sigma^2=100$，故 A，B 正确；由题意得 $\mu+\sigma=110$，$\mu+3\sigma=130$，所以 $P(X>\mu+\sigma)=\frac{1}{2}[1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)]\approx\frac{1}{2}\times 0.317\approx 15.85\%$，故 C 错误；$P(X<\mu+3\sigma)=1-\frac{1}{2}[1-P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)]\approx 1-0.001\ 5=99.85\%$，故 D 正确. 故选 ABD.

培优专题（八） 概率与其他知识的交汇问题

例 1 解：(1)设事件 A 为“某一天此款甜品销售量不超过 60 个”，

则 $P(A)=(0.01+0.03)\times 10=0.4$.

(2)根据题意得 $X\sim B(3,0.6)$，

则 $P(X=0)=0.4^3=0.064$，$P(X=1)=C_3^1\times 0.6\times 0.4^2=0.288$，$P(X=2)=C_3^2\times 0.6^2\times 0.4=0.432$，$P(X=3)=0.6^3=0.216$，所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

所以 $E(X)=0\times 0.064+1\times 0.288+2\times 0.432+3\times 0.216=1.8$.

(3)可以认为此款甜品的销售情况发生了变化. 设事件 C 表示“改变制作工艺之前，日销售量大于 70 个”，改变制作工艺之前，30 天内日销售量大于 70 个的天数为随机变量 Y，由频率分布直方图可得 $P(C)=0.2$，又 $Y\sim B(30,0.2)$，所以 $E(Y)=30\times 0.2=6<20$，所以可以认为改变工艺后，此款甜品的销售情况发生了变化.

【自测题】

解：(1)由频率分布直方图知，各小矩形面积从左到右依次为 0.06，0.12，0.18，0.34，0.16，0.08，0.06，

样本平均数的估计值 $\mu=0.06\times 35+0.12\times 45+0.18\times 55+0.34\times 65+0.16\times 75+0.08\times 85+0.06\times 95=64$，

则所有参赛学生的成绩 X 近似服从正态分布 $N(64,15^2)$，

又 $\mu+\sigma=79$，所以 $P(X>79)=P(X>\mu+\sigma)\approx\frac{1-0.683}{2}=0.158\ 5$，

所以参赛学生中成绩超过 79 分的学生人数约为 $0.158\ 5\times 10\ 000=1585$.

(2)由(1)知，$\mu=64$，$P(X\geqslant 64)=\frac{1}{2}$，

即从所有参赛学生中随机抽取 1 名学生，该学生竞赛成绩在 64 分及以上的概率为 $\frac{1}{2}$，因此随机变量 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$，$Y$ 的所有可能取值为 0，1，2，3，

则 $P(Y=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(Y=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(Y=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(Y=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，所以随机变量 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(Y)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$.

例 2 解：(1)(i)依题意得 2×2 列联表如下：

	正确识别音乐	错误识别音乐	总计
A 组软件	40	20	60
B 组软件	20	20	40
总计	60	40	100

根据列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\frac{100\times(40\times 20-20\times 20)^2}{60\times 40\times 60\times 40}=\frac{25}{9}\approx 2.778<3.841$，则没有 95% 的把握认为是否正确识别音乐与软件有关.

(ii)由(i)得 $P_1=\frac{2}{3}$，$P_2=\frac{1}{2}$，故方案二在一次测试中通过的概率为 $C_2^1\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+C_2^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{9}$.

(2)方案二每次测试通过的概率 $P=C_2^1\cdot P_1(1-P_1)\cdot C_2^2\cdot P_2^2+C_2^2P_1^2\cdot C_2^1\cdot P_2(1-P_2)+C_2^2P_1^2\cdot C_2^2P_2^2=P_1P_2\left(\frac{8}{3}-3P_1P_2\right)=-3(P_1P_2)^2+\frac{8}{3}P_1P_2=-3\left(P_1P_2-\frac{4}{9}\right)^2+\frac{16}{27}$，所以当 $P_1P_2=\frac{4}{9}$ 时，P 取得最大值 $\frac{16}{27}$，又 $P_1+P_2=\frac{4}{3}$，所以此时 $P_1=P_2=\frac{2}{3}$.

设 n 次测试中通过的次数为 X，则 $X\sim B(n,P)$，则 $E(X)=nP=16$，因为 $P\leqslant\frac{16}{27}$，所以 $n=\frac{16}{P}\geqslant 16\times\frac{27}{16}=27$，所以该测试至少要进行 27 次，此时 $P_1=P_2=\frac{2}{3}$.

例 3 解：(1)设 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，依题意，$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\frac{11+13+18+21+27}{5}=18$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=1\times 11+2\times 13+3\times 18+4\times 21+5\times 27=310$，$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$，因此 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{310-5\times 3\times 18}{55-5\times 9}=4$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=18-4\times 3=6$，则 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=4x+6$，令 $\hat{y}=4x+6>50$，解得 $x>11$，$x\in\mathbf{N}^*$，所以该地区新能源汽车的销量最早在 2030 年能突破 50 万辆.

(2)由题知，抽取的 12 人中有 9 人购置了传统燃油汽车，3 人购置了新能源汽车，X 的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_3^0C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{21}{55}$，

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_9^2}{C_{12}^3}=\frac{27}{55}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_9^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{220}$，

$P(X=3)=\frac{C_3^3C_9^0}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

$E(X)=0\times\frac{21}{55}+1\times\frac{27}{55}+2\times\frac{27}{220}+3\times\frac{1}{220}=\frac{3}{4}$.

【自测题】

解：(1)完善列联表如下：

	不控制碳水摄入	控制碳水摄入	总计
肥胖	40	60	100
不肥胖	25	75	100
总计	65	135	200

$\chi^2=\frac{200\times(40\times 75-60\times 25)^2}{65\times 135\times 100\times 100}\approx 5.128>3.841$，则有 95% 的把握认为是否肥胖与是否控制碳水摄入有关.

(2)从肥胖的学员中任意抽取 1 名，该学

员不控制碳水摄入的概率 $P=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$，则 $X\sim B\left(5,\frac{2}{5}\right)$. $P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^5=\frac{243}{3125}$, $P(X=1)=C_5^1\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{810}{3125}=\frac{162}{625}$, $P(X=2)=C_5^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{1080}{3125}=\frac{216}{625}$, $P(X=3)=C_5^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{720}{3125}=\frac{144}{625}$,

$P(X=4)=C_5^4\times\left(\frac{2}{5}\right)^4\times\frac{3}{5}=\frac{240}{3125}=\frac{48}{625}$, $P(X=5)=\left(\frac{2}{5}\right)^5=\frac{32}{3125}$.

所以当 $k=2$ 时, $P(X=k)$ 有最大值 $\frac{216}{625}$.

例4 解:(1)当 $n=3$ 时, $p_1+p_2+p_3=1$,且 $p_2=2p_1$, $p_3=2p_2$, $\therefore p_1=\frac{1}{7}$, $p_2=\frac{2}{7}$, $p_3=\frac{4}{7}$, $\therefore H(X)=-(p_1\ln p_1+p_2\ln p_2+p_3\ln p_3)=-\left(\frac{1}{7}\ln\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\ln\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\ln\frac{4}{7}\right)=-\frac{1}{7}\ln\frac{2^{10}}{7^7}=\ln 7-\frac{10}{7}\ln 2$.

(2)由题得 $H(X)=-(p_1\ln p_1+p_2\ln p_2+\cdots+p_n\ln p_n)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln p_i=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln\frac{1}{p_i}\leqslant\ln\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(p_i\cdot\frac{1}{p_i}\right)\right]=\ln n$,

当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$ 时,等号成立.

从数学角度理解,当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$ 时, $H(X)$ 取得最大值;从现实生活理解,在没有任何已知信息时,对于未知信息,不加主观臆断,对每一种可能性都有所估计,且等概率地分配是最保险的做法.

【自测题】

解:(1)设"恰好经过3次检验就能把有抗体的血液样本全部找出来"为事件 A,

事件 A 分为两种情况,一是前两次检验中,其中一次检验出抗体,第三次检验出抗体,二是前三次检验均无抗体,

所以 $P(A)=\frac{C_3^1C_2^1A_2^2+A_3^3}{A_5^3}=\frac{3}{10}$.

所以恰好经过3次检验就能把有抗体的血液样本全部找出来的概率为 $\frac{3}{10}$.

(2)①由已知得 $E(X_1)=k$, X_2 的所有可能取值为 $1,k+1$,所以 $P(X_2=1)=(1-p)^k$, $P(X_2=k+1)=1-(1-p)^k$,所以 $E(X_2)=(1-p)^k+(k+1)[1-(1-p)^k]=k+1-k(1-p)^k$,若 $E(X_1)=E(X_2)$,则 $k=k+1-k(1-p)^k$,

所以 $k(1-p)^k=1$, $(1-p)^k=\frac{1}{k}$,

所以 $1-p=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$,得 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$,所以 p 关于 k 的函数关系式为 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}(k\geqslant2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*)$.

②由①知 $E(X_1)=k$, $E(X_2)=k+1-ke^{-\frac{k}{8}}$,若 $E(X_1)>E(X_2)$,则 $k>k+1-ke^{-\frac{k}{8}}$,所以 $1-ke^{-\frac{k}{8}}<0$,得 $ke^{-\frac{k}{8}}>1$,所以 $\ln k-\frac{k}{8}>0(k\geqslant2$ 且 $k\in\mathbf{N}^*)$.

令 $f(x)=\ln x-\frac{x}{8}(x\geqslant2)$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{8}=\frac{8-x}{8x}$,当 $2\leqslant x<8$ 时, $f'(x)>0$,当 $x>8$ 时, $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $[2,8)$ 上单调递增,在 $(8,+\infty)$ 上单调递减,

因为 $f(2)=\ln 2-\frac{2}{8}\approx0.693-0.25>0$, $f(26)=\ln 26-\frac{26}{8}\approx3.258-3.25>0$, $f(27)=\ln 27-\frac{27}{8}\approx3.296-3.375<0$,

所以当 $k\in[2,26]$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$ 时, $E(X_1)>E(X_2)$,此时采用方案二更好,

当 $k\in[27,+\infty)$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$ 时, $E(X_1)<E(X_2)$,此时采用方案一更好.

例5 解:(1)由题意可知,静态密码为 $\overline{202}$,动态校验码 $x_s=4$.若 $s=1$,则 $M=2\times1^3+0\times1^2+2\times1=4$,得 $x_1=4$,符合题意;若 $s=2$,则 $M=2\times2^3+0\times2^2+2\times2=20$,得 $x_2=0$,不符合题意;若 $s=3$,则 $M=2\times3^3+0\times3^2+2\times3=60$,得 $x_3=0$,不符合题意;若 $s=4$,则 $M=2\times4^3+0\times4^2+2\times4=136$,得 $x_4=6$,不符合题意;若 $s=5$,则 $M=2\times5^3+0\times5^2+2\times5=260$,得 $x_5=0$,不符合题意.综上可得 $s=1$.

(2)对于三位静态密码 $\overline{a_1a_2a_3}$,由 $M=a_1\cdot5^3+a_2\cdot5^2+a_3\cdot5=5(a_1\cdot5^2+a_2\cdot5+a_3)$,可得 M 的个位数字是0或5,即 x_5 只能是0或5,又 $M=125a_1+25a_2+5a_3=10(12a_1+2a_2)+5(a_1+a_2+a_3)$,所以当 $a_1+a_2+a_3$ 为奇数时, $x_5=5$,当 $a_1+a_2+a_3$ 为偶数时, $x_5=0$.

下面计算 $a_1+a_2+a_3$ 为奇数时, $\overline{a_1a_2a_3}$ 的个数,

①当 a_1,a_2,a_3 均为奇数时,有 $5^3=125$(个) $\overline{a_1a_2a_3}$,

②当 a_1,a_2,a_3 一奇两偶时,有 $C_3^1\times5\times5^2=375$(个) $\overline{a_1a_2a_3}$,所以当 $a_1+a_2+a_3$ 为奇数时, $\overline{a_1a_2a_3}$ 共有 $125+375=500$(个),所以 $P(x_5=5)=\frac{500}{10^3}=\frac{1}{2}$, $P(x_5=0)=1-P(x_5=5)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,因此 x_5 的分布列为

x_5	0	5
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(3)记事件 A 为"得到的动态校验码 $x_s=0$",事件 B 为"得到的动态校验码 $x_s=1$",事件 C_i 为"收到动态校验钥匙 $s=i$ $(1\leqslant i\leqslant5,i\in\mathbf{N})$",则 $A=AC_1\cup AC_2\cup AC_3\cup AC_4\cup AC_5$, $B=BC_1\cup BC_2\cup BC_3\cup BC_4\cup BC_5$, $P(C_i)=p_i$,

从而 $Q_0=P(A)=\sum\limits_{i=1}^{5}P(AC_i)=\sum\limits_{i=1}^{5}P(C_i)P(A|C_i)=\sum\limits_{i=1}^{5}p_iP(A|C_i)$,

同理可得 $Q_1=P(B)=\sum\limits_{i=1}^{5}P(BC_i)=\sum\limits_{i=1}^{5}P(C_i)P(B|C_i)=\sum\limits_{i=1}^{5}p_iP(B|C_i)$.

①对于事件 C_5,由(2)可知 $P(A|C_5)=\frac{1}{2}$, $P(B|C_5)=0$,从而 $p_5\cdot P(A|C_5)>0$, $p_5\cdot P(B|C_5)=0$,所以 $p_5\cdot P(A|C_5)>p_5\cdot P(B|C_5)$.

②对于事件 C_2,C_4,静态密码 $\overline{a_1a_2a_3}$ 对应的 $M=a_1\cdot s^3+a_2\cdot s^2+a_3\cdot s$,当 $s=2$ 或4时, M 为偶数,所以 $x_s\neq1$,则 $P(B|C_2)=P(B|C_4)=0$,当 $\overline{a_1a_2a_3}=\overline{000}$ 时, $M=0$,则 $x_s=0$,所以 $P(A|C_2)>0$, $P(A|C_4)>0$,从而 $p_2\cdot P(A|C_2)>0$, $p_4\cdot P(A|C_4)>0$, $p_2\cdot P(B|C_2)=0$, $p_4\cdot P(B|C_4)=0$,所以 $p_2\cdot P(A|C_2)>p_2\cdot P(B|C_2)$, $p_4\cdot P(A|C_4)>p_4\cdot P(B|C_4)$.

③对于事件 C_1,C_3,静态密码 $\overline{a_1a_2a_3}$ 对应的 $M=a_1\cdot s^3+a_2\cdot s^2+a_3\cdot s$,

当 $s=1$ 时, $P(A|C_1)=P(B|C_1)=\frac{1}{10}$,从而 $p_1\cdot P(A|C_1)=p_1\cdot P(B|C_1)$,

当 $s=3$ 时,由 a_3 是0~9中的一个,得 $3a_3$ 的个位数字是0,3,6,9,2,5,8,1,4,7,从而 M 的个位数字也是0~9中的一个,可知 $P(A|C_3)=P(B|C_3)=\frac{1}{10}$,从而 $p_3\cdot P(A|C_3)=p_3\cdot P(B|C_3)$.

由①②③可知 $\sum\limits_{i=1}^{5}p_iP(A|C_i)>\sum\limits_{i=1}^{5}p_iP(B|C_i)$,即 $Q_0>Q_1$.

【自测题】

解:(1) a_1,a_2,a_3 的排序共有 $A_3^3=6$(种),且每种排序等可能, X 的所有可能取值为0,2,4,当 $X=0$ 时, a_1,a_2,a_3 的排序为1,2,3, $P(X=0)=\frac{1}{6}$,

当 $X=2$ 时, a_1,a_2,a_3 的排序为1,3,2或2,1,3, $P(X=2)=\frac{1}{3}$,

当 $X=4$ 时, a_1,a_2,a_3 的排序为3,2,1或2,3,1或3,1,2, $P(X=4)=\frac{1}{2}$,

所以 X 的分布列为

X	0	2	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

(2)① a_1,a_2,a_3,a_4 的排序共有 $A_4^4=24$(种),且每种排序等可能,又 $\sum\limits_{i=1}^{n}(i-a_i)=0$,所以 $i-a_i(i=1,2,3,4)$ 中有偶数个奇数,故 $\sum\limits_{i=1}^{n}|i-a_i|$ 必为偶数,当 $X=0$ 时, a_1,a_2,a_3,a_4 的排序与第一次排序无变化,此时仅有1种排序,故 $P(X=0)=\frac{1}{24}$,当 $X=2$ 时, a_1,a_2,a_3,a_4 的排序与第一次排序相比仅有相邻两个位置变化,此时有3种排序:(2,1,3,4),(1,3,2,4),(1,2,4,3),故 $P(X=2)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$,所以 $P(X\leqslant2)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$.

②因为各轮测试相互独立,所以连续三轮测试中,都有 $X\leqslant2$ 的概率为 $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}<\frac{5}{1000}$,所以 $\frac{1}{216}$ 是一个小概率,这表明仅凭随机猜测得到三轮测试都有 $X\leqslant2$ 的结果的可能性很小,

所以认为该品酒师有良好的鉴别能力.